第0章　可容集合论 KPU

我们知道一种逻辑和它的元理论(即集合论背景)是密切相关的. 例如,有穷逻辑和 ZF 系统. 但对无穷逻辑来说,用 ZFC=ZF+C(选择公理)或 ZF+GCH(广义连续统假说)作为元理论就显得不够. 例如在这样的元理论中,绝大多数用 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\pi\rho}$表述的无穷逻辑会丧失通常的紧致性定理,这对想要建立成果丰富一些的逻辑来说无疑是一场灾难. 因此除了继续对 ZF 系统进行增补以求获得更多的成果外,我们还需要新的集合论 KPU 作为元理论,由此产生了一大类无穷逻辑——可容无穷逻辑.

本章我们简介作为可容无穷逻辑背景的可容集合论 KPU.

在§1 我们引入 KPU 的公理系统和适于 KPU 的模型.

在§2 我们讨论 KPU 的一些重要性质.

在§3 我们扩张 KPU 以便它具有更强的表达能力.

在§4 我们讨论一种非常重要的递归定义:Σ-递归定义;该定义对我们研究无穷逻辑特别有用.

在§5 我们讨论崩塌定理,它是§4 采用的方法的延续.

在§6 我们研究谓词的保持性和绝对性,主要讨论结构间的终端扩张关系.

在§7 引入可容集概念,介绍一些常见且重要的可容集.

在§8 我们讨论内模型和可构成集.

由于本书不是全面讨论可容集合论的,所以本章只引入和证明对建立可容无穷逻辑必不可少的概念和定理. 对可容集合论在其它方面的结果,有兴趣的读者可见 J. Barwise 的[1975].

§1 公理系统 KPU

令 $\mathscr{L}$ 是带等词的一阶语言，令 $\mathfrak{A}=\langle A,---\rangle$ 是 $\mathscr{L}$ 的模型，其中 A 是**始元**(urelement)的聚合. **注意**：这里的始元不是集合，它们可以是实数、某个群的元素、甚至是物理对象，---表示用 A 的元素以通常的方式对 $\mathscr{L}$ 的关系、函数和个体常元符号作出的解释. 我们要用 A 作为出发点构造各种可容集，并用这些可容集作为集合论公理系统 KPU 的模型. 所以就这一点而言，A 已经与 ZF 所研究的对象大大地不同，因为对于后者，集合中的元素本身也是集合，归根结底都是由空集构造起来的.

令 $\mathscr{L}^*=\mathscr{L}\cup\{\in,\cdots\}$，即 $\mathscr{L}^*$ 是 $\mathscr{L}$ 的如下扩张：增加二元**属于符号** $\in$，此外还可以增加别的关系、函数和个体常元符号，我们用…表示. $\mathscr{L}^*$ 将用作 KPU 的语言.

0.1.1 定义 $\mathscr{L}^*$ 的结构 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}=(\mathfrak{A};M,E,\cdots)$ 由下列组成：

(1) $\mathscr{L}$ 的结构 $\mathfrak{A}=\langle A,---\rangle$，其中 A 可以是空的(A 的元素称为 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 的始元)；

(2) 与 A 不相交的非空集 M(M 的元素是集合，所以称为 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 的集合元素)；

(3) 关系 $E\subseteq(A\cup M)\times M$($E$ 解释属于符号 $\in$)；

(4) $A\cup M$ 上的其它的关系、函数和个体常元. 它们(用…表示)用通常的方式解释 $\mathscr{L}^*$ 中其它相应的符号.

$\mathscr{L}^*$ 的等词符号＝总是解释为通常的等于关系.

本章我们使用的各类变元受下列约定的限制：给定 $\mathscr{L}^*$ 的结构 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}=(\mathfrak{A};M,E,\cdots)$，

$p,q,p_1,\cdots$ 表示 A 中的元素(始元)，

$a,b,c,d,f,r,a_1,b_1,\cdots$ 表示 M 中的元素(集合)，

$x,y,z,x_1,\cdots$ 表示 $A\cup M$ 的元素.

使用上述记号易于区别有些公式对始元成立，有些对集合成立。例如，$\forall p\exists a\forall x(x\in a\leftrightarrow x=p)$断定对任意始元 p，$\{p\}$存在。

我们也用 $u,v,w,\cdots$统一表述上述任何一类变元。

为了方便，我们在元语言(汉语)中用"$\Rightarrow$"表示"若…，则…"，用"$\Leftrightarrow$"表示"…当且仅当…"。

0.1.2 定义 (1) $\mathscr{L}^*$的Δ_0-**公式**的聚合是最小的聚合$\mathscr{X}$包含$\mathscr{L}^*$的原子公式且在下列条件下封闭：

① $\varphi\in\mathscr{X}\Rightarrow\neg\varphi\in\mathscr{X}$，

② $\varphi,\psi\in\mathscr{X}\Rightarrow(\varphi\wedge\psi),(\varphi\vee\psi)\in\mathscr{X}$，

③ $\varphi\in\mathscr{X}\Rightarrow$ 对任意 u 和 v，$((\forall u\in v)\varphi),((\exists u\in v)\varphi)\in\mathscr{X}$。

上述公式$((\forall u\in v)\varphi)$，$((\exists u\in v)\varphi)$分别是$(\forall u(u\in v\rightarrow\varphi))$，$(\exists u(u\in v\wedge\varphi))$的缩写，$(\forall u\in v)$和$(\exists u\in v)$称为**有界量词**。

注意：Δ_0-公式的重要性在于任何由Δ_0-公式定义的谓词是绝对的(参见本章§6)；而且我们经常使用的许多谓词可以用Δ_0-公式来定义，见下表1(第7—8页)。

(2) $\mathscr{L}^*$的Σ-**公式**的聚合是最小的聚合$\mathscr{Y}$使得$\mathscr{Y}$包含上述$\mathscr{X}$，在$\wedge$，$\vee$和有界量词下封闭且满足下列规则：

$$\varphi\in\mathscr{Y}\Rightarrow \text{对任意 } u,\exists u\varphi\in\mathscr{Y}.$$

(3) $\mathscr{L}^*$的Π-**公式**的聚合是最小的聚合$\mathscr{Z}$使得$\mathscr{Z}$包含上述$\mathscr{X}$，在$\wedge$，$\vee$和有界量词下封闭且满足下列规则：

$$\varphi\in\mathscr{Z}\Rightarrow \text{对任意 } u,\forall u\varphi\in\mathscr{Z}.$$

(4) 若$\varphi(u)$是$\mathscr{L}^*$的Δ_0-公式，则$(\exists u)\varphi(u)$和$(\forall u)\varphi(u)$分别称为$\mathscr{L}^*$的Σ_1-**公式**和Π_1-**公式**。

0.1.3 定义 $\mathscr{L}^*$表述的**KPU**由下列公式的全称闭包组成：

(1) **外延性公理**：$\forall x(x\in a\leftrightarrow x\in b)\rightarrow a=b$.

(2) **基础**(foundation)**公理**：对所有公式$\varphi(x)$，y不在$\varphi(x)$中自由出现，

$$\exists x\varphi(x)\rightarrow\exists x[\varphi(x)\wedge\forall y\in x\neg\varphi(y)].$$

(3) **对集公理**：$\exists a(x\in a\wedge y\in a)$.

(4) **并集公理**：$\exists b \forall y \in a \forall x \in y (x \in b)$.

(5) **Δ_0-分离公理**：对所有 Δ_0-公式 $\varphi(x)$，b 不在 $\varphi(x)$ 中自由出现，

$$\exists b \forall x [x \in b \leftrightarrow x \in a \wedge \varphi(x)].$$

(6) **Δ_0-聚合公理**：对所有 Δ_0-公式 $\varphi(x,y)$，b 不在 $\varphi(x,y)$ 中自由出现，

$$\forall x \in a \exists y \varphi(x,y) \rightarrow \exists b \forall x \in a \exists y \in b \varphi(x,y).$$

注意：(Ⅰ) 上述公式 $\varphi(x)$，$\varphi(x,y)$ 中可以有别的自由变元. 上述(5)和(6)中对 Δ_0-公式的规定是本质的. 例如，若(5)中的公式 $\varphi(x)$ 不是 Δ_0-公式就会导致罗素悖论. (Ⅱ) Δ_0-分离公理是对 **ZF** 系统的子集公理的修正. **KPU** 与 **ZF** 相比最大的差异在于前者没有幂集公理. 请读者切记. (Ⅲ) 由 0.1.1—0.1.3 显见**KPU**是由有穷长公式组成的理论. 但到第 1 章，我们知道这些公式中的变元可以用以表示无穷逻辑中的公式.

0.1.4 定义 **KPU$^+$**是 **KPU** 加上下列公理：

$$\exists a \forall x [x \in a \leftrightarrow \exists p (x \equiv p)],$$

该公理断定：*存在包含所有始元的集合*.

0.1.5 定义 **KP** 是 **KPU** 加上下列公理：

$$\forall x \exists a (x \equiv a),$$

该公理断定：*每一对象都是集合，即不存在始元*.

注意：(Ⅰ) 显然，**KP** 是 **ZF** 的子系统.

(Ⅱ) **KP** 首先由 R. Platek 在其[1966]提出的. S. Kripke 在其[1964]提出一个与 **KP** 稍有不同的系统.

(Ⅲ) 还存在一些公理，它们可以用 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{M}}$ 的定义来构造. 下列使这些条件明确的句子应该看作是 **KPU** 的公理：

$\forall p \forall a \neg (p \equiv a)$， (参见 0.1.1(2)).

$\exists a (a \equiv a)$， (在 0.1.1(2)中表达 $M \neq \varnothing$).

$\forall p \forall x (x \notin p)$， (参见 0.1.1(3)).

练 习

0.1.6 证明 Δ_0-公式的否定逻辑等价 Δ_0-公式. Σ_1-公式(或 Π_1-公式)的否定逻辑等价 Π_1-公式(或 Σ_1-公式).

§2 KUP 的一些重要性质

为了简便,下面表述和证明 **KPU** 的**内定理**(常用 **KPU** $\vdash \varphi$ 表示 φ 是 **KPU** 的内定理)时,经常不用完全严格的形式语言,而用汉语夹杂人工语言来进行. 例如,对

$$\mathbf{KPU} \vdash \forall xy \exists ! a \forall z (z \in a \leftrightarrow z \equiv x \vee z \equiv y),$$

我们只是说下列命题是 **KPU** 的定理:

"任给 x,y 存在唯一只以 x,y 为元素的集合 $a=\{x,y\}$";

然后对后者给出一个非形式的证明:

任给 x,y,据对集公理,存在 b 使得 $x,y \in b$. 据 Δ_0-分离公理,存在 a 使得 $z \in a \leftrightarrow z \in b \wedge (z \equiv x \vee z \equiv y)$,因为括号中的那部分是 Δ_0-公式. 据外延性公理,至多只能存在一个这样的 a.

此外,为了自然,我们将用 $=$ 来代替 $\equiv$. 以后把 **KPU** 作为无穷逻辑的元理论时也是如此.

0.2.1 定理 (1) 存在唯一没有元素的集合 $\varnothing$.

(2) 任给 a 存在唯一 $b=\bigcup a$ 使得 $[x \in b \Leftrightarrow \exists y \in a (x \in y)]$.

(3) 任给 a,b 存在唯一 $c=a \cup b$ 使得 $(x \in c \Leftrightarrow x \in a$ 或 $x \in b)$.

(4) 任给 a,b 存在唯一 $c=a \cap b$ 使得 $(x \in c \Leftrightarrow x \in a$ 且 $x \in b)$.

证明:据 0.1.1(2),存在集合 b. 对(1),施 Δ_0-分离公理于 b 和 Δ_0-公式: $\neg(x=x)$,立得空集 $\varnothing$. 对(2),据并集公理,得到 b_1 使得 $\forall y \in a \forall x \in y (x \in b_1)$,然后据 Δ_0-分离公理,构造

$$b=\{x \in b_1 : \exists y \in a (x \in y)\}.$$

对(3),构造 $\bigcup\{a,b\}$(见 0.2.1 前面的说明). 为了证明(4),令 $c=\{x \in a : x \in b\}$,因为据 Δ_0-分离公理,这样的 c 是存在的.

在上述(1)—(4)的情况下,唯一性据外延性公理. □[1]

象通常那样定义 x,y 的有序对 $\langle x,y\rangle$,易证

$$\langle x,y\rangle=\langle z,w\rangle \Rightarrow x=z \text{ 且 } y=w.$$

0.2.2 定理 对所有 a,b,存在集合 $c=a\times b$,使得

$$c=\{\langle x,y\rangle : x\in a \text{ 且 } y\in b\}.$$

证明:据后面的表 1,以 a,b,u 为变目的谓词

$$u \text{ 是序列} \langle x,y\rangle \text{ 使得 } x\in a \text{ 且 } y\in b$$

是 Δ_0-公式,所以若我们能证明,对所有 $x\in a, y\in b$,存在集合 c 使得 $\langle x,y\rangle\in c$,则据 Δ_0-分离公理,就能得到本定理要求的 c.

给定 $x\in a$,对任意 $y\in b$,根据对集公理,存在集合 $\{x,x\}$ 和 $\{x,y\}$,所以存在集合 $d=\langle x,y\rangle$,即 $\forall y\in b\exists d(d=\langle x,y\rangle)$. 据下表 1,$d=\langle x,y\rangle$ 是 Δ_0-公式,所以据 Δ_0-聚合公理,存在集合 w_x 使得对所有 $y\in b$,$\langle x,y\rangle\in w_x$. 再据 Δ_0-聚合公理,有

$$\forall x\in a\exists w[\forall y\in b\exists d\in w(d=\langle x,y\rangle)].$$

由于上式方括号中是 Δ_0-公式,所以再据 Δ_0-聚合公理,有

$$\exists c_1\forall x\in a\exists w\in c_1\forall y\in b(\langle x,y\rangle\in w),$$

所以存在 c_1 使得对所有 $x\in a$ 和 $y\in b$,存在某个 $w\in c_1$,$\langle x,y\rangle\in w$,因此,若 $c=\bigcup c_1$,则对所有 $x\in a, y\in b$,$\langle x,y\rangle\in c$. □

注意:在 ZF 中,由于有幂集公理,所以上述证明中的 c 可直接取作 $\mathscr{P}(\mathscr{P}(a\cup b))$,但这样的方法不能贯彻到 KPU 中.

类似地,施归纳于 n,可以如下定义有序 n 元组,其中 $n>2$:

$$\langle x_1,\cdots,x_n\rangle=\langle x_1,\langle x_2,\cdots,x_n\rangle\rangle$$

和

$$a_1\times\cdots\times a_n=a_1\times(a_2\times\cdots\times a_n).$$

因此 $a_1\times\cdots\times a_n$ 就是所有 n 元组 $\langle x_1,\cdots,x_n\rangle$ 的集合使得

$$x_i\in a_i, \quad \text{对 } i=1,\cdots,n.$$

有了有序对概念,就可以如下表那样用 Δ_0-公式来定义关系、函数等重要概念.

---

[1] 本书在定理、引理和推论的证明或无证明的表述之后标以□.

表1　某些重要的Δ_0-谓词

谓　词	缩　写	Δ_0 定义
$x\subseteq y$		$\forall z\in x(z\in y)$
$a=x-y$		$\forall b\in a(b\in x\wedge b\notin y)\wedge\forall b\in x(b\notin y\to b\in a)$
$a=x\cup y$		$\forall b\in a(b\in x\vee b\in y)\wedge\forall b\in x(b\in a)\wedge\forall b\in y(b\in a)$
$a=x\cap y$		$\forall b\in a(b\in x\wedge b\in y)\wedge\forall b\in x(b\in y\to b\in a)$
$a=\{y,z\}$		$y\in a\wedge z\in a\wedge\forall x\in a(x=y\vee x=z)$
$a=(y,z)$		$\exists b\in a\exists c\in a[b=\{y\}\wedge c=\{y,z\}\wedge a=\{b,c\}]$
$a=(x,y)$，对某个 y	$1^{st}(a)=x$	$\exists c\in a\exists y\in c(a=(x,y))$
$a=(x,y)$，对某个 x	$2^{nd}(a)=y$	$\exists c\in a\exists x\in c(a=(x,y))$
$a=(x,y)$，对某些 x,y	$\mathrm{OrdPr}(a)$	$\exists c\in a\exists x\in c\exists y\in c(a=(x,y))$
a 是关系	$\mathrm{Rel}(a)$	$\forall x\in a\,\mathrm{OrdPr}(x)$
f 是函数	$\mathrm{Fun}(f)$	$\mathrm{Rel}(f)\wedge\forall a\in f\forall b\in f[1^{st}(a)=1^{st}(b)\to 2^{nd}(a)=2^{nd}(b)]$
r 是定义域为 a 的关系	$\mathrm{Dom}(r)=a$	$\mathrm{Rel}(r)\wedge\forall b\in r(1^{st}(b)\in a)\wedge\forall x\in a\exists b\in r(1^{st}(b)=x)$
r 是值域为 a 的关系	$\mathrm{Ran}(r)=a$	$\mathrm{Rel}(r)\wedge\forall b\in r(2^{nd}(b)\in a)\wedge\forall x\in a\exists b\in r(2^{nd}(b)=x)$
r 是域为 a 的关系	$\mathrm{Fie}(r)=a$	$a=\mathrm{Dom}(r)\cup\mathrm{Ran}(r)$
$y=f(x)$		$a=\mathrm{Fun}(f)\wedge(x,y)\in f$
$a=\bigcup b$		$\forall x\in b(x\subseteq a)\wedge\forall y\in a\exists x\in b(y\in x)$
a 是传递集	$\mathrm{Tran}(a)$	$\forall b\in a(b\subseteq a)$
a 是序数	$\mathrm{Ord}(a)$	$\mathrm{Tran}(a)\wedge\forall b\in a\forall c\in a(b\in c\vee c\in b\vee b=c)$

续上表　某些重要的 Δ_0-谓词

a 是空集	$a=\varnothing$	$\forall x\in a\neg(x=x)$
a 是大于 0 的自然数	$a=n$	$\bigwedge_{i<n}\exists b\in a(b=i)\wedge\forall b\in a(\bigvee_{i<n}b=i)$
a 是后继函数	$a=s(b)$	$\forall c\in a(c\in b\vee c=b)\wedge b\subseteq a\wedge b\in a$
a 是自然数集 ω	$a=\omega$	$\varnothing\in a\wedge\forall b\in a(s(b)\in a)$ $\wedge\forall b\in a[b=\varnothing\vee\exists c\in b(b=s(c))]$
a 是序列	$\mathrm{Seq}(a)$	$\mathrm{Fun}(a)\wedge\mathrm{Ord}(\mathrm{Dom}(a))$
a 是 b 对 c 的限制	$a=b\upharpoonright c$	$\forall d\in b[\mathrm{OrdPr}(d)\wedge 1^{st}(d)\in c\to d\in a]$ $\wedge\forall d\in a[\mathrm{OrdPr}(d)\wedge d\in b$ $\wedge 1^{st}(d)\in c]$
$a=b\times c$		$\forall d\in a[\mathrm{OrdPr}(d)\wedge 1^{st}(d)\in b$ $\wedge 2^{nd}(d)\in c]\wedge\forall d\in b\forall e\in c(\langle d,e\rangle\in a)$
a 是 b 限制于 c 的象	$a=b''c$	$\forall x\in a\exists y\in c(\langle y,x\rangle\in b)\wedge\forall z\in b$ $[\mathrm{OrdPr}(z)\wedge 1^{st}(z)\in c\to 2^{nd}(z)\in a]$

0.2.3 定义　任给公式 φ 和不在 φ 中出现的变元 w，用 $\varphi^{(w)}$ 表示用**相对 w 的有界量词**置换 φ 中每一非有界量词而得到的公式．即对 φ 中每一 $\exists u$，用 $\exists u\in w$ 换之；对 φ 中每一 $\forall u$，用 $\forall u\in w$ 换之．

注意：$\varphi^{(w)}$ 是 Δ_0-公式，且若 φ 是 Δ_0-公式，则 $\varphi^{(w)}=\varphi$．

0.2.4 引理　对每一 Σ-公式 φ，下列公式是**逻辑有效公式**（即在所有结构 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 中真，这里暂且用 $\mathfrak{M}\models\varphi$ 表示 φ 在 $\mathfrak{M}$ 中真）：

(1) $\varphi^{(u)}\wedge u\subseteq v\to\varphi^{(v)}$．

(2) $\varphi^{(u)}\to\varphi$．

其中 u,v 是不在 φ 中出现的变元（下面在不致混淆之处，我们不再重申这些关于变元的规定）．

证明：施归纳于公式的复杂度．证(1)：任给结构 $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 和 $x,y\in M\cup A$ 使得 $\mathfrak{M}\models x\subseteq y$．对 Δ_0-公式 φ，有 $\varphi=\varphi^{(x)}=\varphi^{(y)}$．假设 $\mathfrak{M}\models(\varphi\wedge\psi)^{(x)}$，则 $\mathfrak{M}\models\varphi^{(x)}$ 且 $\mathfrak{M}\models\psi^{(x)}$，据归纳假设，$\mathfrak{M}\models\varphi^{(y)}$ 且 $\mathfrak{M}$

$\models \psi^{(y)}$，所以 $\mathfrak{M} \models (\varphi \wedge \psi)^{(y)}$. 对 $\neg$，$\vee$ 和有界量词的情况也类似可证. 现假设 $\mathfrak{M} \models (\exists w \varphi(w))^{(x)}$，则存在 $w \in x$ 使得 $\mathfrak{M} \models \varphi(w)^{(x)}$. 据归纳假设，$\mathfrak{M} \models \varphi(w)^{(y)}$，又因为 $x \subseteq y$，所以 $\mathfrak{M} \models \exists w \in y \varphi(w)^{(y)}$，即 $\mathfrak{M} \models (\exists w \varphi(w))^{(y)}$. (2)的证明类似(1). □

说明：0.2.4 可以重述为：对每一 Σ-公式 φ，

(1) **KPU** $\vdash \varphi^{(u)} \wedge u \subseteq v \rightarrow \varphi^{(v)}$，

(2) **KPU** $\vdash \varphi^{(u)} \rightarrow \varphi$.

因为在 **KPU** 中推演(1)和(2)中公式的方式和上述集合论模型论证方式完全相同，后者也只用集合的包含、并、交等集合论运算和有穷逻辑的方法. 所以我们以后对上述两种表述方式不加区别.

0.2.5 定理(Σ-自返原则) 对所有 Σ-公式 φ，

$$\mathbf{KPU} \vdash \varphi \leftrightarrow \exists a \varphi^{(a)}.$$

特别地，在 **KPU** 中，每一 Σ-公式等价一 Σ_1-公式.

证明：据 0.2.4，有 $\exists a \varphi^{(a)} \rightarrow \varphi$. 所以 **KPU** 的公理只用来证明 **KPU** $\vdash \varphi \rightarrow \exists a \varphi^{(a)}$. (下面在不致混淆之处省略“**KPU** $\vdash$”这个条件). 施归纳于公式 φ 的复杂度. 若 φ 是 Δ_0-公式或 $\neg\psi$，则证明平凡，所以只须考虑以下 4 种情况.

情况 1　假设 $\varphi = \psi \wedge \theta$ 成立：据归纳假设，$\exists a_1 \psi^{(a_1)}$ 且 $\exists a_2 \theta^{(a_2)}$. 令 $a = a_1 \cup a_2$，据 0.2.4(1)，有 $\psi^{(a)}$ 和 $\theta^{(a)}$ 成立.

情况 2　假设 $\varphi = \exists u \in v \psi(u)$ 成立：要证 $\exists a \exists u \in v \psi(u)^{(a)}$. 而据归纳假设，这是显然的.

情况 3　假设 $\varphi = \forall u \in v \psi(u)$ 成立：要证 $\exists a \forall u \in v \psi(u)^{(a)}$. 据归纳假设，对每一 $u \in v$，存在 b 使得 $\psi(u)^{(b)}$. 据 Δ_0-聚合公理，存在 a_0 使得 $\forall u \in v \exists b \in a_0 \psi(u)^{(b)}$. 令 $a = \bigcup a_0$，因为 $b \in a_0 \rightarrow b \subseteq a$，所以对每一 $u \in v$，有 $\exists b \subseteq a \psi(u)^{(b)}$，据 0.2.4，$\forall u \in v \psi(u)^{(a)}$ 成立.

情况 4　假设 $\varphi = \exists u \psi(u)$ 成立：须找一 a 使得 $\exists u \in a \psi(u)^{(a)}$. 若 $\psi(u)$ 成立，据归纳假设，存在 b 使得 $\psi(u)^{(b)}$. 令 $a = b \cup \{u\}$，则 $u \in a$. 因为 $b \subseteq a$，所以据 0.2.4，有 $\psi(u)^{(a)}$，所以 $\exists a \exists u \psi(u)^{(a)}$. □

注意：在上述证明中，Δ_0-聚合公理只用于 $\varphi = \forall u \in v\psi$.

0.2.6 定理(Σ-聚合原则) 对每一Σ-公式 φ，下列是 **KPU** 的定理：若 $\forall x \in a \exists y \varphi(x,y)$，则存在集合 b 使得

$$\forall x \in a \exists y \in b \varphi(x,y), \quad \forall y \in b \exists x \in a \varphi(x,y).$$

证明：设 $\forall x \in a \exists y \varphi(x,y)$，据Σ-自返原则，存在集合 c 使得

$$\forall x \in a \exists y \in c\, \varphi(x,y)^{(c)}. \tag{0.1}$$

据 Δ_0-分离公理，令

$$b = \{y \in c : \exists x \in a\, \varphi(x,y)^{(c)}\}. \tag{0.2}$$

据 0.2.4，$\varphi(x,y)^{(c)} \to \varphi(x,y)$，据(0.1)，有 $\forall x \in a \exists y \in b \varphi(x,y)$. 而据(0.2)，有 $\forall y \in b \exists x \in a \varphi(x,y)$. □

注意：Σ-聚合原则描述了一种 back and forth-方法. 以后我们要详细讨论这种方法.

0.2.7 Δ-分离定理 对任意Σ-公式 $\varphi(x)$ 和Π-公式 $\psi(x)$，下列是 **KPU** 的定理：若对所有 $x \in a$，$\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)$，则存在集合

$$b = \{x \in a : \varphi(x)\}.$$

证明：设 $\forall x \in a[\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)]$，则 $\forall x \in a[\varphi(x) \vee \neg\psi(x)]$，而后者等价一Σ-公式，所以据Σ-自返原则，存在 c 使得

$$\forall x \in a[\varphi(x)^{(c)} \vee \neg\psi(x)^{(c)}]. \tag{0.3}$$

据 Δ_0-分离公理，令 $b = \{x \in a : \varphi(x)^{(c)}\}$. 显然，每一 $x \in b$ 满足 $\varphi(x)$. 若 $x \in a$ 且 $\varphi(x)$，据假设，$\psi(x)$. 因为 $\psi(x)$ 是Π-公式，因此 $\neg\psi(x)$ 是Σ-公式，据 0.2.4，$\neg\psi(x)^{(c)} \to \neg\psi(x)$，所以有 $\psi(x)^{(c)}$，据(0.3)，$\varphi(x)^{(c)}$. 因为 $x \in a$ 且 $\varphi(x)^{(c)}$ 成立，所以 $x \in b$. □

0.2.8 Σ-置换定理 对每一Σ-公式 $\varphi(x,y)$，下列是 **KPU** 的定理：若 $\forall x \in a \exists! y \varphi(x,y)$，则存在函数 f，$\mathrm{Dom}(f) = a$，使得

$$\forall x \in a \varphi(x, f(x)).$$

证明：据Σ-聚合原则，存在集合 b 使得

$$\forall x \in a \exists y \in b \varphi(x,y).$$

显然对所有 $\langle x,y \rangle \in a \times b$，

$$\varphi(x,y) \leftrightarrow \neg\exists z[\varphi(x,z) \wedge y \neq z],$$

而↔的右边是Π-公式，因此据Δ-分离定理，存在f使得

$$f=\{\langle x,y\rangle\in a\times b:\ \varphi(x,y)\}$$
$$=\{\langle x,y\rangle\in a\times b:\ \neg\exists z[\varphi(x,z)\wedge y\neq z]\}.\ \square$$

上述定理往往由于假设中的唯一性要求"∃!"在运用中受到限制，在这种情况下我们通常用下列定理.

0.2.9 Σ-强置换定理 对每一Σ-公式$\varphi(x,y)$，下列是KPU的定理：若$\forall x\in a\exists y\varphi(x,y)$，则存在函数$f$，$\mathrm{Dom}(f)=a$，使得

$$\forall x\in af(x)\neq\varnothing,\quad \forall x\in a\forall y\in f(x)\varphi(x,y). \tag{0.4}$$

证明：根据Σ-聚合原则，存在集合b使得

$$\forall x\in a\exists y\in b\varphi(x,y),\quad \forall y\in b\exists x\in a\varphi(x,y).$$

所以据Σ-自返原则，存在w使得

$$\forall x\in a\exists y\in b\varphi(x,y)^{(w)},\quad \forall y\in b\exists x\in a\varphi(x,y)^{(w)}.$$

对任意固定的$x\in a$，$\exists y\in b\varphi(x,y)^{(w)}$是$\Delta_0$-公式，所以据$\Delta_0$-分离公理，存在集合$c_x=\{y\in b:\ \varphi(x,y)^{(w)}\}$. 据外延性公理，这样存在的$c_x$是唯一的，因此据Σ-置换定理，存在函数$f$，$\mathrm{Dom}(f)=a$，使得对每一$x\in a$，$f(x)=c_x$. 易证$f$满足上述条件(0.4). $\square$

练 习

0.2.10 证明对每一Σ-公式φ，

$$\mathbf{KPU}\vdash\varphi\leftrightarrow\exists a[x_1\in a\wedge\cdots\wedge x_n\in a\wedge\varphi^{(a)}].$$

0.2.11 任给Σ-公式φ，令φ^{*a}是用$\exists u\in a$(a是某个新集合变元)置换φ中部分(不必然是全部)$\exists u$得到的公式. 证明：

$$\mathbf{KPU}\vdash\varphi\leftrightarrow\exists a\varphi^{*a}.$$

§3 增加有定义符号给KPU

为了简洁，本书我们固定用$\vec{x}_n$表示$x_1,\cdots,x_n$；在不致混淆之处，甚至用$\vec{x}$表示$x_1,\cdots,x_n$.

在类似 ZF 的理论中，我们能用任意公式 $\varphi(\vec{x})$ 来定义新 n 元关系符号 R：

$$\forall\vec{x}[R(\vec{x})\leftrightarrow\varphi(\vec{x})], \qquad (\mathscr{R})$$

且用 R 作为其它公式中的原子公式，即使在置换公理中也是如此，因为我们总能反过来用 φ 置换 R. 但是在 KPU 中，必须注意我们的公理所采取的语法形式.

0.3.1 定义 令 $\varphi(\vec{x})$ 是 $\mathscr{L}^*$ 的 Σ-公式，$\psi(\vec{x})$ 是 $\mathscr{L}^*$ 的 Π-公式使得 KPU $\vdash\varphi\leftrightarrow\psi$. 令 R 是新 n 元关系符号，且令 φ 和 ψ 用上式 $(\mathscr{R})$ 定义 R，则 R 称为 KPU 的 **Δ-关系符号**.

确切地说，上述 R,φ,ψ 构成关系符号 R 的 **Δ-定义**.

下一引理说明，我们能把 Δ-关系符号当作 $\mathscr{L}^*$ 的原子公式.

0.3.2 引理 令 KPU 由 $\mathscr{L}^*$ 表述，R 是 KPU 的 Δ-关系符号. 令 KPU_1 是用 $\mathscr{L}^*(R)=\mathscr{L}^*\cup\{R\}$ 表述的 KPU$+(\mathscr{R})$，则

(1) 对 $\mathscr{L}^*(R)$ 的每一公式 $\theta(\vec{x},R)$，存在 $\mathscr{L}^*$ 的公式 $\theta_0(\vec{x})$ 使

$$\text{KPU}_1\vdash\theta(\vec{x},R)\leftrightarrow\theta_0(\vec{x}).$$

若 θ 还是 $\mathscr{L}^*(R)$ 的 Σ-公式，则 θ_0 也是 $\mathscr{L}^*$ 的 Σ-公式.

(2) 对 $\mathscr{L}^*(R)$ 的每一 Δ_0-公式 $\theta(\vec{x},R)$，存在 $\mathscr{L}^*$ 的 Σ-公式 $\theta_0(\vec{x})$ 和 Π-公式 $\theta_1(\vec{x})$ 使得下列公式是 KPU_1 的定理：

$$\theta(\vec{x},R)\leftrightarrow\theta_0(\vec{x}), \quad \theta(\vec{x},R)\leftrightarrow\theta_1(\vec{x}).$$

(3) KPU_1 是 KPU 的保守扩张，即对 $\mathscr{L}^*$ 的每一句子 σ，

$$\text{KPU}_1\vdash\sigma\Leftrightarrow\text{KPU}\vdash\sigma.$$

证明：证(1)：因为 R 是 KPU 的 Δ-关系符号，所以据 0.3.1，可以假设 R 由 Σ-公式 $\varphi(\vec{x})$ 定义：$R(\vec{x})\leftrightarrow\varphi(\vec{x})$.

设 KPU $\vdash\varphi(\vec{x})\leftrightarrow\psi(\vec{x})$，其中 ψ 是 Π-公式. 我们可以用 R 的定义公式 $\varphi(\vec{x})$ 来置换 θ 中 R 的每一出现，这样得到的公式就是我们要求的 θ_0. 所以(1)的第一个命题显然成立.

为了使(1)中第二个命题成立，我们需要用 de Morgan-律把 θ 中的否定号内移至原子公式，再消去 $R(\vec{x})$ 前偶数个否定号且用 φ 置换 θ 中 $R(\vec{x})$ 的每一正出现（*即 $R(\vec{x})$ 前没有否定号*），用等价 $\neg\psi$

的 Σ-公式(内移$\neg\psi$的$\neg$)置换 θ 中 $R(\vec{x})$ 的每一负出现(也即 $\neg R(\vec{x})$ 的出现). 这样得到的结果称为 θ_0. 因为

$$\mathbf{KPU}_1 \vdash R(\vec{x}) \leftrightarrow \varphi(\vec{x}), \quad \mathbf{KPU}_1 \vdash \neg R(\vec{x}) \leftrightarrow \neg\psi(\vec{x}),$$

所以
$$\mathbf{KPU}_1 \vdash \theta(\vec{x}, R) \leftrightarrow \theta_0(\vec{x}).$$

在上述从 Σ-公式 θ 到 θ_0 的置换变形中,Σ-性质仍保留下来,所以 θ_0 也是 Σ-公式. **注意**:这样的置换变形并没有把 Δ_0-公式变成 Δ_0-公式,而只是变成 Σ-公式.

证(2):因为 Δ_0-公式在否定下封闭,所以从(1)直接可得(2).

证(3):只须证"⇒":显然当 $R(\vec{x})$ 如上置换后,$\mathbf{KPU}_1$ 的每一公理能转为 **KPU** 的定理. 例如,$\mathbf{KPU}_1$ 的 Δ_0-分离公理成为 **KPU** 的 Δ-分离定理,$\mathbf{KPU}_1$ 的 Δ_0-聚合公理成为 **KPU** 的 Σ-聚合原则的演绎后承,而($\mathscr{R}$)成为普遍有效式. □

用上述引理,我们还可以澄清一个也许一直困扰读者的问题. 有一种形式化 $\mathscr{L}^* = \mathscr{L}(\in, \cdots)$ 的方法是把 $\mathscr{L}^*$ 变成一种**单类**(single sorted)**语言**,其中用谓词符号 U 表示始元,用 S 表示集合. 用这种方法,$\forall p(\cdots p \cdots)$ 表示 $\forall x[U(x) \to (\cdots x \cdots)]$, $\forall a(\cdots)$ 表示 $\forall x[S(x) \to (\cdots x \cdots)]$,而且"$x$ 是始元"是一个 Δ_0-公式 $U(x)$. 另一种把 $\mathscr{L}^*$ 形式化的方法是把 $\mathscr{L}^*$ 变成一种**多类**(many sorted)**语言**,就象我们前面所做的那样,使用 3 类变元:

$$p, q, \cdots; \qquad a, b, \cdots; \qquad x, y, \cdots.$$

谓词"x 是始元"不再是 Δ_0-公式,而是 Δ-公式. 我们关于 $\mathscr{L}^*$ 的定义保证有下列等价关系:

$$x \text{ 是始元} \leftrightarrow \exists p(x = p), \quad x \text{ 不是始元} \leftrightarrow \exists a(x = a),$$

因此该谓词和它的否定都是 Σ_1-公式. 0.3.2 保证我们能如下式引入一个新符号:

$$U(x) \leftrightarrow x \text{ 是始元},$$

而且可以把 $U(x)$ 作为 Δ_0-公式. 类似地,可以引入

$$S(x) \leftrightarrow \exists a(x = a), \quad S(x) \leftrightarrow \neg\exists p(x = p)$$

来表示"x 是集合",并把 $S(x)$ 看作是 Δ_0-公式.

朴素集合论(intuitive set theory)的谓词称为 **KPU** 的 **Δ-谓词** ⟺ 它可以用一 Δ-关系符号来定义. 据 0.3.2, 我们可以把 Δ-谓词看作是用 $\mathscr{L}^*$ 的原子公式定义的, 而且 Δ-谓词在 $\wedge$, $\vee$, $\forall u\in v$, $\exists u\in v$ 下封闭. 类似地, 我们有"Δ_1-谓词"、"Π_1-谓词"等概念. 下表 2 列出几种最重要的 Δ-谓词:

表 2　某些最重要的 Δ-谓词

谓　词	缩　写	Δ-定义
x 是primitive元	$U(x)$	$\exists p(x=p)$ (或$\forall a(x\neq a)$)
x 是集合	$S(x)$	$\exists a(x=a)$ (或$\forall p(x\neq p)$)
x 是传递的	$\mathrm{Tran}(x)$	$S(x)\wedge\forall y\in x\forall z\in y(z\in x)$
x 是序数	$\mathrm{Ord}(x)$	$\mathrm{Tran}(x)\wedge\forall y\in x\mathrm{Tran}(y)$
x 是极限序数	$\mathrm{Lim}(x)$	$\mathrm{Ord}(x)\wedge x\neq\varnothing$ $\wedge\forall y\in x\exists z\in x(z=y\cup\{y\})$
x 是自然数	$\mathrm{NatNo}(x)$	$\mathrm{Ord}(x)\wedge\forall y\in x\neg\mathrm{Lim}(y)$ $\wedge\neg\mathrm{Lim}(x)$
序数的小于关系	$\alpha<\beta$	$\mathrm{Ord}(\alpha)\wedge\mathrm{Ord}(\beta)\wedge\alpha\in\beta$
序数的小于或等于关系	$\alpha\leqslant\beta$	$\alpha<\beta\vee\alpha=\beta$

0.3.3 定义　令 $\varphi(\vec{x},y)$ 是 $\mathscr{L}^*$ 的 Σ-公式使得

$$\mathbf{KPU}\vdash\forall\vec{x}\exists!\,y\varphi(\vec{x},y),$$

令 F 是新 n 元函数符号且用下列公式定义 F:

$$\forall\vec{x}\forall y[F(\vec{x})=y\leftrightarrow\varphi(\vec{x},y)],\qquad(\mathscr{F})$$

则称 F 是 **KPU** 的 **Σ-函数符号**.

据下一引理我们能把 Σ-函数符号看作是 $\mathscr{L}^*$ 中的原子符号.

0.3.4 引理　令 **KPU** 由 $\mathscr{L}^*$ 表述, F 是 **KPU** 的 Σ-函数符号, $\mathbf{KPU}_1$ 是用 $\mathscr{L}^*(F)$ 表述的 $\mathbf{KPU}+(\mathscr{F})$, 则

(1) 对 $\mathscr{L}^*(F)$ 的每一公式 $\theta(\vec{x},F)$, 存在 $\mathscr{L}^*$ 的公式 $\theta_0(\vec{x})$ 使

得 $\theta(\vec{x},F)\leftrightarrow\theta_0(\vec{x})$是 $\mathbf{KPU}_1$ 的定理.

若 θ 还是 $\mathscr{L}^*(F)$的 Σ-公式,则 θ_0 也是 $\mathscr{L}^*$的 Σ-公式.

(2) 对 $\mathscr{L}^*(F)$的每一 Δ_0-公式 $\theta(\vec{x},F)$,存在 $\mathscr{L}^*$的 Σ-公式 $\theta_0(\vec{x})$和 Π-公式 $\theta_1(\vec{x})$使得下列是 $\mathbf{KPU}_1$ 的定理:

$$\theta(\vec{x},F)\leftrightarrow\theta_0(\vec{x}),\quad \theta(\vec{x},F)\leftrightarrow\theta_1(\vec{x}).$$

(3) $\mathbf{KPU}_1$ 是 $\mathbf{KPU}$ 的保守扩张.

证明:假设 $\varphi(\vec{x},y)$是 Σ-公式且

$$F(\vec{x})=y \Leftrightarrow \varphi(\vec{x},y),$$

则我们能用

$$F(\vec{x})\neq y \Leftrightarrow \exists z[\varphi(\vec{x},z)\wedge y\neq z] \tag{0.5}$$

得到 $F(\vec{x})\neq y$ 的 Σ-定义. 显然,$\forall z\neg[\varphi(\vec{x},z)\wedge y\neq z]$就是 $F(\vec{x})=y$ 的 Π-定义. 因此 F 的**图形**(graph,n 元函数的图形是

$$\{\langle y,\vec{x}\rangle:\langle\vec{x}\rangle\in \mathrm{Dom}(F)\wedge F(\vec{x})=y\})$$

是 Δ-谓词,所以在此出现而不在 0.3.2 中出现的唯一复杂情况是,F 可以在象下列那样的复杂情况中出现在 θ 中:

$$F(G(x))=H(y),\quad R(F(x),y).$$

称一公式是**简单公式** $\Leftrightarrow$ F 只出现在象下列那样的简单情况中:

$$F(\vec{x})=y,\quad F(\vec{x})\neq y.$$

重复使用下面的等价式,我们可以把每一公式变成一逻辑等价的简单公式使得 Σ-公式变形后仍是 Σ-公式:

$$F(G(x),x_2,\cdots,x_n)=y\leftrightarrow\exists z[G(x)=z\wedge F(z,x_2,\cdots,x_n)=y],$$

$$F(G(x),x_2,\cdots,x_n)\neq y\leftrightarrow\exists z[G(x)=z\wedge F(z,x_2,\cdots,x_n)\neq y],$$

$$F(\vec{x})=H(y)\leftrightarrow\exists z[H(y)=z\wedge F(\vec{x})=z],$$

$$F(\vec{x})\neq H(y)\leftrightarrow\exists z[H(y)=z\wedge F(\vec{x})\neq z],$$

$$\varphi(F(\vec{x}),\cdots)\leftrightarrow\exists z[z=F(\vec{x})\wedge\varphi(z,\cdots)],\quad \varphi\text{ 是无量词公式}.$$

剩下的证明如同 0.3.2,除了用 $\varphi(\vec{x},y)$置换 $F(\vec{x})=y$ 的出现,用(0.5)中的 Σ-公式$\exists z[\varphi(\vec{x},z)\wedge y\neq z]$置换 $F(\vec{x})\neq y$ 的出现. □

下表 3 列出一些最重要的 Σ-运算:

表 3　一些重要的 Σ-运算

运　算	运算范围	缩　写	Σ-定义(唯一的 z 使得)
f 的定义域	所有函数 f	Dom(f)	见表 1
f 的值域	所有函数 f	Ran(f)	见表 1
x 的第一个坐标	所有序对 x	$1^{st}(x)$	见表 1
x 的第二个坐标	所有序对 x	$2^{nd}(x)$	见表 1
f 对 a 的限制	所有函数 f 和集合 a	$f\upharpoonright a$	$z=\{x\in f:\ 1^{st}(x)\in a\}$
f 限制于 a 的象	所有函数 f 和集合 a	$f''a$	$z=\{x\in \mathrm{Ran}(f):\ \exists y\in a(f(y)=x)\}$
后继	所有集合 x	$s(x)$	$z=x\cup\{x\}$
序数的后继	所有序数 α	$\alpha+1$	$z=s(\alpha)$
上确界	序数集	$\sup(a)$	$z=\bigcup a$

朴素集合论的一运算称为 **KPU 的 Σ-运算** ⇔ 它能用 KPU 的一 Σ-函数符号来定义. 可以证明朴素集合论的许多运算是 KPU 的 Σ-运算. 下列练习就是两例.

练　习

0.3.5　$\mathscr{L}^*$ 的每一函数符号是 Σ-函数符号.

0.3.6　Σ-运算在复合运算下封闭.

§4　Σ-递归定义

递归定义是一种强有力的工具,它允许我们引入诸如序数加法、序数乘法那样的重要运算(参见后面的表 4). 首先我们来证明 Σ-递归定义的一个特例.

0.4.1 传递闭包存在定理　在 KPU 中我们可以引入 Σ-函数

符号 TC 使得下列是 **KPU** 的定理：对每一 x，$\mathrm{TC}(x)$是传递集使得 $x\subseteq\mathrm{TC}(x)$；且对任何其它传递集 a，若 $x\subseteq a$，则 $\mathrm{TC}(x)\subseteq a$.

在本定理的证明中，我们要用基础公理施归纳于$\in$. 若我们采用基础公理的逆否形式，就能得到下列结果：对每一公式 φ，

$$\mathbf{KPU}\vdash\forall x[\forall y\in x\varphi(y)\rightarrow\varphi(x)]\rightarrow\forall x\varphi(x).$$

为了证明$\forall x\varphi(x)$，我们选择任意 x 且在该证明中用"对任意 $y\in x$，$\varphi(y)$成立"作为前提来证明 $\varphi(x)$成立.

0.4.1 **的证明**：若我们有序数 ω(**注意**：我们不能在 **KPU** 中证明它存在)，则能够用它来定义

$$\mathrm{TC}(a)=a\cup(\bigcup a)\cup(\bigcup\bigcup a)\cup\cdots.$$

请读者记住这个定义以便理解下列证明：首先定义 $Q(x,a)$如下：

$$x\subseteq a\wedge\mathrm{Tran}(a)\wedge\forall b[x\subseteq b\wedge\mathrm{Tran}(b)\rightarrow a\subseteq b].$$

因此 Q 可以用一 Π-公式来定义，且

$$Q(x,a)\text{成立}\Leftrightarrow a\text{ 是包含 }x\text{ 的最小传递集}.$$

显然，$Q(x,a)\wedge Q(x,a_1)\rightarrow a=a_1$.

现令 $P(x,a)$是下列 Σ-谓词：

x 是始元 $\wedge a=\varnothing$，或

x 是集合 $\wedge x\subseteq a\wedge\mathrm{Tran}(a)\wedge\forall z\in a\exists f[f$ 是函数 $\wedge\mathrm{Dom}(f)$ 是自然数 $n+1=\{0,\cdots,n\}\wedge z=f(0)\in\cdots\in f(n)\in x]$.

施归纳于自然数 n，易证 $P(x,a)\rightarrow Q(x,a)$，尤其

$$P(x,a)\wedge P(x,a_1)\rightarrow a=a_1.$$

若我们能证明，对每一 x，存在 a 使得 $P(x,a)$，则我们能用

$$\mathrm{TC}(x)\Leftrightarrow P(x,a)$$

来定义 Σ-函数符号 TC 且 TC 有我们要求的传递闭包性质. 为此只须证$\forall x\exists aP(x,a)$. 若 x 是始元，则令 $a=\varnothing$. 所以下面只须施归纳于$\in$来证明$\forall b\exists aP(b,a)$. 任给 b，在证明$\exists aP(b,a)$时，我们可以归纳假设$\forall x\in b\exists cP(x,c)$. 因此据上述结果，$\forall x\in b\exists!cP(x,c)$. 根据 Σ-置换定理 0.2.8，存在函数 g，$\mathrm{Dom}(g)=b$，使得对所有 $x\in b$，$P(x,g(x))$成立. 令

$$a=b\cup(\bigcup \mathrm{Ran}(g))=b\cup\bigcup_{x\in b}g(x).$$

显然，$b\subseteq a$ 且对任意 $x\in b$，$g(x)$是 x 的传递闭包，下面我们先来验证 a 是传递的. 假设$\forall y\in a$ 且$\forall z\in y$，只须证 $z\in a$. 设任意 $y\in a$，则 $y\in b$ 或 $y\in \bigcup_{x\in b}g(x)$. 若 $y\in b$，则据归纳假设，$g(y)$是传递闭包且 $y\subseteq g(y)$，所以对任意 $z\in y$，有 $z\in g(y)$，而 $a=b\cup\bigcup_{x\in b}g(x)$，即 $g(x)\subseteq a$，所以 $z\in a$. 若对某个 $x\in b$，$y\in g(x)$，因为 $g(x)$是传递集，所以$\forall z\in y\in g(x) \Rightarrow z\in g(x)\subseteq a$，因此 $z\in a$.

下证 $P(a,b)$的最后一合取肢成立：令$\forall z\in a=b\cup\bigcup\mathrm{Ran}(g)$. 若 $z\in b$，则取 $f=\{\langle 0,z\rangle\}$. 现假设 $z\in\bigcup\mathrm{Ran}(g)$，即对某个 $x\in b$，$z\in g(x)$，因为 $P(x,g(x))$成立，所以存在函数 h 使得$\mathrm{Dom}(h)$是整数 $n+1$，$h(0)=z$，$h(i)\in h(i+1)$且 $h(n)\in x$.

令 $f=h\cup\{\langle n+1,x\rangle\}$，则

$$f(0)=z\in f(1)\in\cdots\in f(n)\in f(n+1)=x\in b.$$

所以 $P(b,a)$成立. □

0.4.2 定理(TC 上的归纳证明) 对任意公式 $\varphi(x)$，下列是 **KPU** 的定理：若对每一 x，$[\forall y\in \mathrm{TC}(x)\varphi(y)]\to\varphi(x)$，则$\forall x\varphi(x)$.

证明：施归纳于$\in$，不妨假设对所有 $z\in x$，$\forall y\in\mathrm{TC}(z)\varphi(y)$. 我们只须证$\forall y\in\mathrm{TC}(x)\varphi(y)$. 据题设，

$$\forall y\in\mathrm{TC}(z)\varphi(y)\Rightarrow\varphi(z),$$

所以对所有 $y\in x\cup\bigcup\{\mathrm{TC}(z): z\in x\}=\mathrm{TC}(x)$，有 $\varphi(y)$. □

0.4.3 定理(Σ-递归定义原则) 令 G 是 $n+2$ 元 Σ-函数符号，$n\geq 0$，则我们可以定义一个新 Σ-函数符号 F 使得下式是 **KPU**(+**定义公理**($\mathscr{F}$))的定理：对所有 $\vec{x},y$，

$$F(\vec{x},y)=G(\vec{x},y,\{\langle z,F(\vec{x},z)\rangle: z\in\mathrm{TC}(y)\}). \qquad (*)$$

证明：一旦我们找到一种定义 F 的方法，就只须证明：对所有 $\vec{x},y$，存在 f 使得

$$f\text{ 是函数}\wedge\mathrm{Dom}(f)=\mathrm{TC}(y), \qquad (0.6)$$

$$\forall w\in\mathrm{Dom}(f)[f(w)=F(\vec{x},w)], \qquad (0.7)$$

$$F(\vec{x},y)=G(\vec{x},y,f). \tag{0.8}$$

这就提示了 F 的正确的定义公式. 为了简化记号,我们令 $\vec{x}=x$, $P(x,y,z,f)$是下列 Σ-谓词:

f 是函数 $\wedge \mathrm{Dom}(f)=\mathrm{TC}(y)$

$$\wedge \forall w\in \mathrm{TC}(y)[f(w)=G(x,w,f\upharpoonright \mathrm{TC}(w))]\wedge z=G(x,y,f).$$

只须证:

$$\forall xy\exists ! z\exists f[P(x,y,z,f)]. \tag{0.9}$$

若能证明(0.9),我们就可以用下列(0.10)引入 Σ-函数符号 F:

$$F(x,y)=z\leftrightarrow \exists f[P(x,y,z,f)]. \tag{0.10}$$

显然,(0.10)的右边也是 Σ-公式. 为了证明(0.9),只须证:

$$P(x,y,z,f)\wedge P(x,y,z_1,f_1)\rightarrow z=z_1\wedge f=f_1. \tag{0.11}$$

$$\forall y\exists z\exists f[P(x,y,z,f)]. \tag{0.12}$$

施归纳于 TC(y),下证(0.11)和(0.12). 显然从 P 的定义能得到下列(0.13)和(0.14):

$$P(x,y,z,f)\rightarrow z=G(x,y,f). \tag{0.13}$$

$$P(x,y,z,f)\wedge w\in \mathrm{TC}(y)\rightarrow P(x,w,f(w),f\upharpoonright \mathrm{TC}(w)). \tag{0.14}$$

下面施归纳于 TC(y)来证明(0.11). 为此我们可以(归纳)假设,对 $w\in \mathrm{TC}(y)$,至多存在 u 和 g 使得 $P(x,w,u,g)$,来证:

$$P(x,y,z,f)\wedge P(x,y,z_1,f_1)\rightarrow z=z_1\wedge f=f_1.$$

假设 $P(x,y,z,f)$和 $P(x,y,z_1,f_1)$成立,根据(0.13),我们有 $z=G(x,y,f)$和 $z_1=G(x,y,f_1)$. 所以若我们证明了 $f=f_1$,也就证明了 $z=z_1$. 因为 f 和 f_1 是函数且有相同的定义域 TC(y),所以只须证对所有 $w\in \mathrm{TC}(y)$, $f(w)=f_1(w)$. 但据(0.14),有

$$P(x,w,f(w),f\upharpoonright \mathrm{TC}(w)),$$

$$P(x,w,f_1(w),f_1\upharpoonright \mathrm{TC}(w)),$$

所以据归纳假设,$f(w)=f_1(w)$,这就证明了(0.11).

下证(0.12):仍施归纳于 TC. 假设

$$\forall w\in \mathrm{TC}(y)\exists u\exists g[P(x,w,u,g)],$$

我们来证$\exists z\exists f[P(x,y,z,f)]$. 据(0.11),存在唯一的 u_w, g_w 使得 $P(x,w,u_w,g_w)$. 据 Σ-置换定理,存在函数 f 使得 $\mathrm{Dom}(f)=\mathrm{TC}(y)$,且$\forall w\in \mathrm{TC}(y)[P(x,w,f(w),g_w)]$,所以

$$f=\{\langle w,u_w\rangle : w\in \mathrm{TC}(y)\} \tag{0.15}$$

存在. 因此为了证明(0.12),只须证$P(x,y,G(x,y,f),f)$成立,而这又可以从 $z\in \mathrm{TC}(x)[f(z)=G(x,z,f\upharpoonright \mathrm{TC}(z))]$得到. 所以下证后者:因为据假设,对 $z\in \mathrm{TC}(x)$,有 $P(x,z,u_z,g_z)$,所以 $u_z=G(x,z,g_z)$,而据(0.15),$f(z)=u_z$,因此 $f(z)=G(x,z,g_z)$. 下面我们只须证明:$f\upharpoonright \mathrm{TC}(z)=g_z$. 对 $w\in \mathrm{Dom}(g_z)=\mathrm{TC}(z)$和 $P(x,w,u_w,g_w)$,据(0.14),有 $P(x,w,g_z(w),g_z\upharpoonright \mathrm{TC}(w))$,所以据(0.11),有 $g_z(w)=u_w=f(w)$,所以 $g_z=f\upharpoonright \mathrm{TC}(z)$,因此

$$f(z)=G(x,z,g_z)=G(x,z,f\upharpoonright \mathrm{TC}(z)),$$

所以

$$\forall z\in \mathrm{TC}(x)[f(z)=G(x,z,f\upharpoonright \mathrm{TC}(z))],$$

由此证明了(0.12),从而证明了(0.10).

现在我们可以据(0.10)引入 F,然后回过头来证明本定理的(∗). 据(0.10),有

$$\exists f[P(x,y,G(x,y,f),f)\leftrightarrow F(x,y)=G(x,y,f)],$$

所以,有

$$F(x,y)=G(x,y,f), \tag{0.16}$$

其中 $P(x,y,G(x,y,f),f)$成立. 所以只须证

$$f=\{\langle z,F(x,z)\rangle : z\in \mathrm{TC}(y)\}. \tag{0.17}$$

对 $z\in \mathrm{TC}(y)$,据(0.14),有 $P(x,z,f(z),f\upharpoonright \mathrm{TC}(z))$,所以据(0.10),$F(x,z)=f(z)$. 把(0.17)代入(0.16),就得到(∗)的简单式:

$$F(x,y)=G(x,y,\{\langle z,F(x,z)\rangle : z\in \mathrm{TC}(y)\}).$$

施归纳于 n,不难证明(∗). □

说明:Σ-递归定义原则是 **KPU** 最重要的导出规则,因为许多超穷类型的归纳都能解释为 $\mathrm{TC}(x)$上的归纳,即归纳假设是某一公式对所有 $y\in \mathrm{TC}(x)$成立的归纳. 例如,普通的超穷归纳和本书

后面要讨论的(可容逻辑的)无穷公式上的归纳都属于这类归纳.

0.4.4 推论 (1) 令 G 是 $n+2$ 元 Σ-函数符号, $n\geqslant 0$, 则我们可以定义新 $n+1$ 元函数符号 F 使得下列是 **KPU**(+**定义公理**($\mathscr{F}$))的定理:对所有 $\vec{x},y$,

$$F(\vec{x},y)=G(\vec{x},y,\{\langle z,F(\vec{x},z)\rangle:\ z\in y\}).$$

(2) 令 H 和 G 分别是 $n+1$ 元和 $n+2$ 元 Σ-函数符号, $n\geqslant 0$, 则可以定义新 $n+1$ 元函数符号 F 使得下列是 **KPU**(+**定义公理**($\mathscr{F}$))的定理:对所有 $\vec{x},y$,

$$F(\vec{x},p)=H(\vec{x},p),$$

$$F(\vec{x},a)=G(\vec{x},a,\{\langle z,F(\vec{x})\rangle:\ z\in \mathrm{TC}(a)\}).$$

证明:证(1):令 $G_1(\vec{x},y,f)=G(\vec{x},y,f\upharpoonright y)$, 再据 0.4.3.

证(2):若 y 是始元,则令 $G_1(\vec{x},y,f)=H(\vec{x},y)$;若 y 是集合,则令 $G_1(\vec{x},y,f)=G(\vec{x},y,f)$. 再施 0.4.3 于 G_1. □

注意:在后面我们经常使用上述推论的(2).

0.4.5 推论(递归定义的 Δ-谓词) 令 P,Q 分别是 $n+1$ 元和 $n+2$元的 Δ-谓词, $n\geqslant 0$, 则我们可以用定义引入 Δ-谓词 R 使得下列是 **KPU** 的定理:

$$R(\vec{x},p)\leftrightarrow P(\vec{x},p),$$

$$R(\vec{x},a)\leftrightarrow Q(\vec{x},a,\{b\in \mathrm{TC}(a):\ R(\vec{x},b)\}).$$

证明:分别引入 P,Q 的特征函数 H,G:

$$P(\vec{x},p)\leftrightarrow H(\vec{x},p)=1\leftrightarrow H(\vec{x},p)\neq 0,$$

$$\begin{aligned}&Q(\vec{x},a,\{b\in \mathrm{TC}(a):\ R(\vec{x},b)\})\\ &\quad\leftrightarrow G(\vec{x},a,\{b\in \mathrm{TC}(a):\ R(\vec{x},b)\})=1\\ &\quad\leftrightarrow G(\vec{x},a,\{b\in \mathrm{TC}(a):\ R(\vec{x},b)\})\neq 0.\end{aligned}$$

据 Σ-递归定义的另一种形式(0.4.4),有

$$F(\vec{x},p)=H(\vec{x},p),$$

$$F(\vec{x},a)=G(\vec{x},a,\{\langle b,F(\vec{x})\rangle:\ b\in \mathrm{TC}(a)\}).$$

由此定义了 R 的特征函数 F:

$$R(\vec{x},y)\leftrightarrow F(\vec{x},y)=1\leftrightarrow F(\vec{x},y)\neq 0.$$

所以，

$$R(\vec{x},p) \Leftrightarrow F(\vec{x},p)=H(\vec{x},p)=1$$
$$\Leftrightarrow P(\vec{x},p).$$
$$R(\vec{x},a) \Leftrightarrow F(\vec{x},a)=G(\vec{x},a,\{\langle b,F(\vec{x})\rangle : b\in \mathrm{TC}(a)\})=1$$
$$\Leftrightarrow Q(\vec{x},a,\{\langle b,F(\vec{x})\rangle : b\in \mathrm{TC}(a)\}).$$

此外，不难证明 R 是 Δ-谓词. □

下面表 4 列出一些最重要的递归定义的 Σ-运算，其中有一些在后面详细定义：

表 4　一些最重要的递归定义的 Σ-运算

运　算	运算范围	缩　写	递 归 定 义
秩函数	所有事物	$\mathrm{Rank}(x)$	$\mathrm{Rank}(p)=0$， $\mathrm{Rank}(a)=\sup\{\mathrm{Rank}(x)+1: x\in a\}$
支持函数	所有事物	$\mathrm{sp}(x)$	$\mathrm{sp}(p)=\{p\}$，　$\mathrm{sp}(a)=\bigcup_{x\in a}\mathrm{sp}(x)$
序数加法	序数对 α,β	$\alpha+\beta$	$\alpha+\beta=\alpha\cup\sup\{(\alpha+\gamma)+1: \gamma<\beta\}$
序数乘法	序数对 α,β	$\alpha\cdot\beta$	$\alpha\cdot\beta=\sup\{\alpha\cdot\gamma+\alpha: \gamma<\beta\}$
崩塌函数	序对 a,x	$\mathrm{C}_a(x)$	$\mathrm{C}_a(p)=p$，　$\mathrm{C}_a(b)=\{\mathrm{C}_a(x): x\in a\cap b\}$
可构成集	序对 a,α	$\mathrm{L}(a,\alpha)$	$\mathrm{L}(a,0)=\mathrm{TC}(a)$， $\mathrm{L}(a,\alpha+1)=\mathscr{D}(\mathrm{s}(\mathrm{L}(a,\alpha)))$， $\mathrm{L}(a,\lambda)=\bigcup_{\alpha<\lambda}\mathrm{L}(a,\alpha)$，　对极限序数 λ

练　习

0.4.6　证明：

$$\mathrm{TC}(p)=\varnothing,\quad \mathrm{TC}(a)=a\cup\bigcup\{\mathrm{TC}(x): x\in a\}.$$

0.4.7（秩函数）

(1) 证明如何使表 4 给出的 rank 的定义适合 0.4.3 的形式.

(2) 证明 $\mathrm{rank}(x)$是序数；对序数 α，$\mathrm{rank}(\alpha)=\alpha$；且

$$y\in \mathrm{TC}(x) \Rightarrow \mathrm{rank}(y)<\mathrm{rank}(x).$$

(3) 证明 $\mathrm{rank}(a)=\{\mathrm{rank}(y): y\in \mathrm{TC}(a)\}$. (可以用此作为 Rank 的另一个递归定义.)

0.4.8(支持函数)

(1) 证明如何使表 4 给出的 sp 的定义适合 0.4.3 的形式.

(2) 证明 $\mathrm{sp}(a)=\{x\in \mathrm{TC}(a): x$ 是始元$\}$.

§5 崩塌引理

下面我们来讨论一个重要的二元运算 $\mathrm{C}(x,y)$. 为了方便,我们把它记作 $\mathrm{C}_x(y)$. 这个运算可以用下列等式来 Σ-递归定义:

$$\mathrm{C}_x(p)=p,\quad \mathrm{C}_x(a)=\{\mathrm{C}_x(y): y\in a\cap x\}.$$

我们称 C 为 **Mostowski-崩塌函数**(collaping function). 在此,我们只讨论当 $y\in x$ 时的 $\mathrm{C}_x(y)$.

0.5.1 引理 (1) $\mathrm{C}_p(a)=\varnothing$, 对所有 p,a.

(2) $a\subseteq b$ 且 a 是传递集 $\Rightarrow \forall x\in a, \mathrm{C}_b(x)=x$.

(3) $\{\mathrm{C}_b(x): x\in b\}$是传递集, 对任意 b.

证明:证(1):显然,$\mathrm{C}_p(a)=\{\mathrm{C}_p(y): y\in a\cap p\}=\varnothing$.

证(2):施归纳于∈. 任给 $x\in a$,据归纳假设,对所有 $y\in x$, $\mathrm{C}_b(y)=y$. 要证 $\mathrm{C}_b(x)=x$. 因为 a 是传递集,所以 $x\subseteq a\subseteq b$,因此

$$\mathrm{C}_b(x)=\{\mathrm{C}_b(y): y\in x\cap b\}=\{\mathrm{C}_b(y): y\in x\}=\{y: y\in x\}=x.$$

证(3):令 $a=\{\mathrm{C}_b(x): x\in b\}$. 下证 a 是传递集. 令 $z\in y\in a$, 则对某个 $x\in b, y=\mathrm{C}_b(x)$,故$z\in y=\mathrm{C}_b(x)=\{\mathrm{C}_b(x_1): x_1\in x\cap b\}$, 所以对某个 $x_1\in b, z=\mathrm{C}_b(x_1)$,因此 $z\in a$. □

0.5.2 定义 对任意集合 b,令 $\mathrm{c}_b=\{\langle x,\mathrm{C}_b(x)\rangle: x\in b\}$,令

$$\mathrm{clpse}(b)=\mathrm{Ran}(\mathrm{c}_b)=\{\mathrm{C}_b(x): x\in b\}=\mathrm{C}_b(b).$$

注意:据 Σ-置换定理,函数 c_b(作为集合)存在,据 0.5.1(3), $\mathrm{clpse}(b)$是传递集.

0.5.3 定义 集合 b 称为**外延集** $\Leftrightarrow$ 对两两不同的 a_1 和 $a_2\in b$，存在 $x\in b$ 使 x 在 a_1 或 a_2 中，但不同时在 a_1 和 a_2 中；换句话说，

$$\forall x\in b(x\in a_1\leftrightarrow x\in a_2)\rightarrow a_1=a_2.$$

注意：我们想要说

$$b\text{ 是外延的 }\Leftrightarrow \langle b,\in\cap b^2\rangle\models\text{ 外延性公理}.$$

但我们现在还不能这样做.因为我们在此还没有在 **KPU** 中严格定义语法和语义（例如，还没有严格定义 $\models$，请见第 1 章 §1 的第二小节），所以现在我们能做的只是把这一点详细地写出来.

正象任意序数集那样，任意传递集是外延的. 下面的引理证明，任何外延集同构一传递集.

0.5.4 Mostowski-崩塌引理（Mostowski，[1949]） 若 a 是外延集，则 c_a 把 a 双射到传递集 clpse(b)，且对所有 $x,y\in a$，$x\in y\Leftrightarrow c_a(x)\in c_a(y)$；换句话说，

$$c_a:\langle a,\in\cap a^2\rangle\cong\langle \mathrm{clpse}(a),\in\cap(\mathrm{clpse}(a))^2\rangle.$$

证明：据 c_a 的构造，$x\in y\Rightarrow c_a(x)\in c_a(y)$. 所以下面只须证 c_a 是单射，且 $c_a(x)\in c_a(y)$ 蕴涵 $x\in y$. 为此只须证 $\forall xyP(x,y)$，其中 $P(x,y)$ 是下列三个公式的合取：

$$x,y\in a\wedge c_a(x)=c_a(y)\rightarrow x=y,$$

$$x,y\in a\wedge c_a(x)\in c_a(y)\rightarrow x\in y,$$

$$x,y\in a\wedge c_a(y)\in c_a(x)\rightarrow y\in x.$$

给定 x_0，据 $\in$ 上的归纳，我们可以假设

$$\forall x\in x_0\forall yP(x,y)\tag{0.18}$$

来证 $\forall yP(x_0,y)$. 任给 y_0，再据 $\in$ 上的归纳，不妨假设

$$\forall y\in y_0\,P(x_0,y)\tag{0.19}$$

来证 $P(x_0,y_0)$. 因此假设 $x_0,y_0\in a$.

情况 1 $c_a(x_0)=c_a(y_0)$：设 $x_0\neq y_0$. 因为 $c_a(p)=p$，所以 x_0,y_0 都是集合. 因为 a 是外延集，所以存在 $z\in a$ 使得 $z\in(x_0\cup y_0)-(x_0\cap y_0)$. 设 $z\in x_0-y_0$，则据"$\Rightarrow$"，$c_a(z)\in c_a(x_0)=c_a(y_0)$，而据(0.18)，$P(z,y_0)$成立，所以 $z\in y_0$，矛盾. 若 $z\in y_0-x_0$ 也同理可证.

情况 2　$c_a(x_0)\in c_a(y_0)$：则对某个 $z\in y_0$，$c_a(x_0)=c_a(z)$，而据(0.19)，$P(x_0,z)$成立，所以 $x_0=z$ 且 $x_0\in y_0$.

情况 3　$c_a(y_0)\in c_a(x_0)$：证明类似情况 2 的证明. □

练　习

0.5.5　证明若 a 有穷，则 $C_b(a)$也有穷.

[提示：施归纳于自然数.]

0.5.6　证明在 KPU 中，

$$\text{序数集 } a \text{ 是有穷的} \Leftrightarrow \text{clpse}(a)\text{是自然数}.$$

这就证明了，谓词"a 是诸序数的有穷集"在 KPU 中是 Δ-谓词.

0.5.7　令 a、b 是传递集，$f:\langle a,\in\rangle\cong\langle b,\in\rangle$. 证明若对所有始元 $p\in a$，$f(p)=p$，则对所有 $x\in a$，$f(x)=x$，从而 $a=b$.

§6　谓词的保持性和绝对性

0.6.1 定义　令 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}=(\mathfrak{A};M,E,\cdots)$是 $\mathscr{L}^*$ 的结构，对 $a\in M$，我们定义：

$$a_E=\{y\in A\cup M:\ yEa\}.$$

普通的子结构概念可以自然地概括到 $\mathscr{L}^*$ 上. 我们称 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}=(\mathfrak{A};M,E,\cdots)$是 $\mathfrak{N}_{\mathfrak{B}}=(\mathfrak{B};N,E_1,\cdots)$的**子结构**(即 $\mathfrak{N}_{\mathfrak{B}}$ 是 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 的**扩张结构**)，记作 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}\subseteq\mathfrak{N}_{\mathfrak{B}}$，$\Leftrightarrow$ $\mathfrak{A}\subseteq\mathfrak{B}$，$M\subseteq N$，且 $E,\cdots$的解释恰是 $E_1,\cdots$的解释对 $A\cup M$ 的限制.

显然，$\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}\subseteq\mathfrak{N}_{\mathfrak{B}}$ 保证 $a_E\subseteq a_{E_1}=\{y\in B\cup N:\ yE_1a\}$，但对某个 $x\in N-M$，可能有 $x\in(a_E-a_{E_1})$，所以为了进一步研究 KPU 的性质，我们需要更强的扩张(结构)概念.

0.6.2 定义　任给 $\mathscr{L}^*$ 的结构 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}=(\mathfrak{A};M,E,\cdots)$和 $\mathfrak{N}_{\mathfrak{B}}=(\mathfrak{B};N,E_1,\cdots)$. 称 $\mathfrak{N}_{\mathfrak{B}}$ 是 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 的**终端扩张**(end extension)，记作 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}\subseteq_{\text{end}}\mathfrak{N}_{\mathfrak{B}}$，$\Leftrightarrow$ $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}\subseteq\mathfrak{N}_{\mathfrak{B}}$ 且对每一 $a\in M$，$a_E=a_{E_1}$.

0.6.3 例　若 M 是传递集、$M\subseteq N$，$E=\in\cap M^2$，$E_1=\in\cap$

N^2，则 $(\mathfrak{A};M,E)\subseteq_{\mathrm{end}}(\mathfrak{A};N,E_1)$.

对上述两结构中的任意 $a\in M$，有 $a_E=a_{E_1}=a$. 但若 M 不是传递集，则上述命题不必然成立.

0.6.4 引理 令 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$，$\mathfrak{N}_{\mathfrak{B}}$ 是 $\mathscr{L}^*$ 的结构，$\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}\subseteq_{\mathrm{end}}\mathfrak{N}_{\mathfrak{B}}$，若 φ 是 $\mathscr{L}^*$ 的 Σ-公式，则对所有 $\vec{x}\in A\cup M$，

$$\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}\models\varphi[\vec{x}]\Rightarrow\mathfrak{N}_{\mathfrak{B}}\models\varphi[\vec{x}].$$

证明：施归纳于 φ 的复杂度. 据有穷逻辑模型论相应的定理，我们在此只须考虑 $\varphi=x\in a$ 和 $\varphi=\forall x\in a\psi$ 两种情况.

情况 1 $\varphi=x\in a$：假设对 $x_1,x_2\in A\cup M$，$\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}\models x\in a[x_1,x_2]$，因为 $\in$ 是 $A\cup M$ 上的关系，所以 $E=E_1\upharpoonright(A\cup M)$，因此 $x_1E_1x_2$，即 $\mathfrak{N}_{\mathfrak{B}}\models x\in a[x_1,x_2]$.

情况 2 $\varphi=\forall x\in a\psi$：假设 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}\models\varphi[\vec{x}]$，其中 $\vec{x}\in A\cup M$. 要证 $\mathfrak{N}_{\mathfrak{B}}\models\forall x(x\in a\to\psi)[\vec{x}]$. 假设对任意 $y\in B\cup N$，$\mathfrak{N}_{\mathfrak{B}}\models x\in a[y,\vec{x}]$，则存在 $\vec{x}$ 中某个 x_i 使得 yE_1x_i（**注意**：y 可以不在 $A\cup M$ 中，所以只依赖子结构的 $E=E_1\upharpoonright(A\cup M)$ 这样的条件不能证明 yEx_i），则 $y\in x_{iE_1}=\{z\in B\cup N:zE_1x_i\}$. 因此 x_i 是集合，所以 $x_i\in N$，又因为 $\vec{x}\in A\cup M$，所以 $x_i\in M$. 据终端扩张条件，$x_{iE_1}=x_{iE}$，所以 $y\in x_{iE}$，即 yEx_i，因此 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}\models x\in a[y,\vec{x}]$. 因为 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}\models\forall x(x\in a\to\psi)[\vec{x}]$，所以 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}\models\psi[y,\vec{x}]$，据归纳假设，$\mathfrak{N}_{\mathfrak{B}}\models\psi[y,\vec{x}]$. □

注意：终端扩张定义的前提条件在上述证明中用于确保 $\forall x\in a$ 在 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 和 $\mathfrak{N}_{\mathfrak{B}}$ 中有相同的语义.

0.6.5 定义 称 $\mathscr{L}^*$ 的公式 $\varphi(\vec{x})$ 相对 $\mathscr{L}^*$ 的理论 T 是**保持公式** $\Leftrightarrow$ 对 T 的所有模型 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$，$\mathfrak{N}_{\mathfrak{B}}$，$\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}\subseteq_{\mathrm{end}}\mathfrak{N}_{\mathfrak{B}}$，和 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 中所有 $\vec{x}$，

$$\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}\models\varphi[\vec{x}]\Rightarrow\mathfrak{N}_{\mathfrak{B}}\models\varphi[\vec{x}].$$

称 $\varphi(\vec{x})$ 相对 T 是**绝对公式** $\Leftrightarrow$ 对上述 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$，$\mathfrak{N}_{\mathfrak{B}}$ 和 $\vec{x}$，

$$\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}\models\varphi[\vec{x}]\Leftrightarrow\mathfrak{N}_{\mathfrak{B}}\models\varphi[\vec{x}].$$

说明：0.6.5 的意义应该是很清楚的. 当我们从 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 过渡到它的终端扩张 $\mathfrak{N}_{\mathfrak{B}}$ 而又返回时，绝对公式的语义不变，所以绝对性是一种很好的性质.

0.6.6 引理 （相对任何理论 T）所有的 Σ-公式都是保持公式，所有的 Δ_0-公式都是绝对公式.

证明：据 0.6.4，所有的 Σ-公式都是保持的，所以所有的 Δ_0-公式也是保持的，但 Δ_0-公式在否定号下封闭，因此易证，

$$\varphi \text{是绝对的} \Leftrightarrow \varphi \text{和} \neg\varphi \text{是保持的}. \ \square$$

0.6.7 例 令 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 和 $\mathfrak{N}_{\mathfrak{B}}$ 是 **KPU** 的模型，$\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}\subseteq_{\text{end}}\mathfrak{N}_{\mathfrak{B}}$. 我们能在这两个模型中解释 **KPU** 中所有的定义和定理. 例如，令 $a\in \mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$，因为 $\text{Ord}(x)$ 是 Δ_0-公式，所以

$$\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}} \models \text{Ord}(a) \Leftrightarrow \mathfrak{N}_{\mathfrak{B}} \models \text{Ord}(a).$$

0.6.8 定理 令 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}\subseteq_{\text{end}}\mathfrak{N}_{\mathfrak{A}}$，且 $\mathfrak{N}_{\mathfrak{A}}\models$ **KPU**. 假设不存在 $\beta\in A\cup N$ 使得 $\mathfrak{N}_{\mathfrak{A}}\models \text{Ord}(\beta)$ 且 β 是 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 中诸序数的最小上界. 假设

$$\mathfrak{N}_{\mathfrak{A}} \models \text{Rank}(a)=\alpha \Rightarrow (a\in M \Leftrightarrow \alpha\in M).$$

证明有可能除了基础公理外，**KPU** 的其它公理都在 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 中成立.

证明：我们在此验证三个公理，而把剩下的两个（外延性公理和并集公理）留给读者去验证.

对集公理：假设 $x,y\in A\cup M$，$\alpha,\beta\in M$ 且

$$\mathfrak{N}_{\mathfrak{A}} \models \alpha=\text{Rank}(x)\wedge\beta=\text{Rank}(y).$$

若 $\mathfrak{N}_{\mathfrak{A}}\models \gamma=(\alpha+1)\cup(\beta+1)$，则 $\gamma\in M$，因为否则，γ 将是 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 中序数的最小上界. 因此若我们选择 $b\in A\cup N$ 使得 $\mathfrak{N}_{\mathfrak{A}}\models b=\{x,y\}$ 从而 $\mathfrak{N}_{\mathfrak{A}}\models \text{Rank}(b)=\gamma$，则 $b\in M$，据表 1 和公式 $b=\{x,y\}$ 的绝对性，

$$\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}\models b=\{x,y\}.$$

Δ_0-分离公理：假设 $a,y\in A\cup M$. 令 $\varphi(x,y)$ 是 Δ_0-公式. 我们要找 $b\in A\cup M$ 使得

$$b=\{x\in a:\ \varphi(x,y)\} \qquad (0.20)$$

在 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 中成立. 因为 Δ_0-分离公理在 $\mathfrak{N}_{\mathfrak{A}}$ 中成立，所以令 $b\in A\cup N$ 使得(0.20)在 $\mathfrak{N}_{\mathfrak{B}}$ 中成立. 但因为 $\mathfrak{N}_{\mathfrak{A}}\models \text{Rank}(b)\leqslant\text{Rank}(a)$，所以集合 b 在 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 中. 据上述公式的绝对性，(0.20)在 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 中成立.

Δ_0-聚合公理：假设 $a\in A\cup M$，公式 $\varphi(x,y)$ 是 Δ_0-公式，其参数在 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 中（即 $\varphi(x,y)$ 可以含有常元 $y_1,\cdots,y_m\in A\cup M$），还假设

$\forall x\in a\exists y\varphi(x,y)$在 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 中成立. 则我们有

对每一 $x\in a$,存在 $y,\alpha\in M$ 使 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}\models\varphi(x,y)$ 且 $\mathfrak{N}_{\mathfrak{A}}\models \text{Rank}(y)=\alpha$,因此据绝对性,$\mathfrak{N}_{\mathfrak{A}}\models\varphi(x,y)\wedge\text{Rank}(y)=\alpha$. (0.21)

因此在 $\mathfrak{N}_{\mathfrak{A}}$ 中,我们有$\forall x\in a\exists\alpha\exists y[\text{Rank}(y)=\alpha\wedge\varphi(x,y)]$. 因为 Σ-自返原则在 $\mathfrak{N}_{\mathfrak{A}}$ 中成立,所以存在序数 $\beta\in N\cup A$ 使得

$$\forall x\in a\exists\alpha<\beta\exists y[\text{Rank}(y)=\alpha\wedge\varphi(x,y)],$$

从而

$$\forall x\in a\exists y[\text{Rank}(y)<\beta\wedge\varphi(x,y)] \qquad (0.22)$$

在 $\mathfrak{N}_{\mathfrak{A}}$ 中成立. 在 $\mathfrak{N}_{\mathfrak{A}}$ 中选择满足(0.22)的最小序数 β;因为根据 $\mathfrak{N}_{\mathfrak{A}}$ 中的基础公理,这样的 β 存在. 据(0.21),β 是诸序数 $\alpha\in M\cup A$ 的上确界,所以 $\beta\in M\cup A$. 运用在 $\mathfrak{N}_{\mathfrak{A}}$ 中成立的 Δ_0-聚合公理于(0.22),存在集合 $b\in N\cup A$ 使得

$$\forall x\in a\exists y\in b[\varphi(x,y)\wedge\text{Rank}(y)<\beta]$$

在 $\mathfrak{N}_{\mathfrak{A}}$ 中成立. 因为 $\mathfrak{N}_{\mathfrak{A}}\models\text{Rank}(b)\leqslant\beta$,所以 $b\in M\cup A$. 但公式 $\forall x\in a\exists y\in b\varphi(x,y)$是 $\mathfrak{N}_{\mathfrak{A}}$ 中成立的 Δ_0-公式,且它的参数都在 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 中,因此据绝对性,它在 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 中成立. □

练 习

0.6.9 任给 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}\subseteq\mathfrak{N}_{\mathfrak{B}}$,称 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ Σ_1-嵌入 $\mathfrak{N}_{\mathfrak{B}}$,记作 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}\prec_{\Sigma_1}\mathfrak{N}_{\mathfrak{B}}$,$\Leftrightarrow$ 对 $\mathscr{L}^*$ 的所有 Σ_1-公式 $\varphi(\vec{x}_n)$和 $\vec{x}_n\in A\cup M$,$\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}\models\varphi[\vec{x}_n]\Leftrightarrow\mathfrak{N}_{\mathfrak{B}}\models\varphi[\vec{x}_n]$. 假设 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}\subseteq_{\text{end}}\mathfrak{N}_{\mathfrak{B}}$,$\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}\prec_{\Sigma_1}\mathfrak{N}_{\mathfrak{B}}$,且 $\mathfrak{N}_{\mathfrak{B}}\models$ **KPU**. 证明有可能除了基础公理外,**KPU** 的其它公理都在 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 中成立.

[提示:终端扩张假设用以确保 Σ-公式从 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 到 $\mathfrak{N}_{\mathfrak{B}}$ 能保持.]

0.6.10 任给 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}\subseteq\mathfrak{N}_{\mathfrak{B}}$. 证明:

$\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}\prec_{\Sigma_1}\mathfrak{N}_{\mathfrak{B}}\Leftrightarrow$ 对每一 Δ_0-公式$\varphi(\vec{v}_n,v_{n+1})$和 $\vec{x}_n\in A\cup M$,

$$\mathfrak{N}_{\mathfrak{B}}\models\exists v_{n+1}\varphi[\vec{x}_n]\Rightarrow\exists x_{n+1}\in A\cup M(\mathfrak{N}_{\mathfrak{B}}\models\varphi[\vec{x}_n,x_{n+1}]).$$

(**注意**:我们没有假设 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}\subseteq_{\text{end}}\mathfrak{N}_{\mathfrak{B}}$!)

§7 可容集

为了方便，我们在任意的始元聚合 A 上固定一个最大可能的集合域 $\mathbf{V}_A$；**集合域** $\mathbf{V}_A$ 递归定义如下：

$$\mathbf{V}_A(0)=\varnothing,$$

$$\mathbf{V}_A(\alpha+1)=\mathscr{P}(A\cup\mathbf{V}_A(\alpha)),$$

$$\mathbf{V}_A(\lambda)=\bigcup_{\alpha<\lambda}\mathbf{V}_A(\alpha),\quad \text{若}\ \lambda\ \text{是极限序数},$$

$$\mathbf{V}_A=\bigcup_{\alpha\in\mathbf{ON}}\mathbf{V}_A(\alpha),$$

其中 $\mathbf{ON}$ 表示所有序数的集合. 我们用 $\in_A$ 表示 $\mathbf{V}_A$ 上的属于关系（在不致混淆之处省略下标 A）. 若 $\mathfrak{A}=(A,---)$，则用 $\mathbf{V}_{\mathfrak{A}}$ 表示 $\mathbf{V}_A$. 若 $A=\varnothing$，则用 $\mathbf{V}(\alpha)$表示 $\mathbf{V}_A(\alpha)$，用 $\mathbf{V}$ 表示 $\mathbf{V}_A$.

0.7.1 定义 令 $\mathscr{L}^*=\mathscr{L}\cup\{\in,\cdots\}$，$\mathfrak{A}$ 是 $\mathscr{L}$ 的结构，（$\mathfrak{A}$ **的**）**可容集**(abmissible set)是 **KPU** 的下列形式的 $\mathscr{L}^*$-模型 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$：

$$\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}=(\mathfrak{A};M,\in,\cdots),$$

其中 $A\cup M$ 在 $\mathbf{V}_A$ 中是传递的，且 $\in=\in_A\restriction(A\cup M)$. 称（$\mathfrak{A}$ 的）可容集 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 是 $\mathfrak{A}$ **上的可容集** $\Leftrightarrow$ $A\in M$（即 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}\models\mathbf{KPU}^+$）.

说明：可容集的定义最早由 R. Platek 在其[1966]中提出的.

以后若不特别说明，我们总用 $\mathfrak{M},\mathfrak{N},\cdots$带或不带下标，来表示可容集. 当需要揭示其内部结构时，也写作 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}},\mathfrak{N}_{\mathfrak{B}},\cdots$.

0.7.2 定义 称 a 是 $\mathbf{V}_A$ 中的**纯集**(pure set) $\Leftrightarrow$ $\mathrm{sp}(a)=\varnothing$（即 $\mathrm{TC}(a)\cap A=\varnothing$；参见 0.4.8. 例如，序数都是纯集）. 称 $\mathfrak{M}$ 是**纯可容集** $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{M}$ 是可容集且 $\mathfrak{M}\models\mathbf{KP}$.

纯可容集没有始元，所以可以写作 $\mathfrak{M}=(M,\in,\cdots)$.

0.7.3 定理 (1) 假设 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}=(\mathfrak{A};M,\in_A,\cdots)$，$\mathfrak{N}_{\mathfrak{B}}=(\mathfrak{B};N,\in_N,\cdots)$且 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}\subseteq\mathfrak{N}_{\mathfrak{B}}$. 证明若 $A\cup M$ 在 $\mathbf{V}_A$ 中是传递的，则

$$\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}\subseteq_{\mathrm{end}}\mathfrak{N}_{\mathfrak{B}}.$$

(2) 若 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}=(\mathfrak{A};M,\in)$ 是可容集且 $\mathfrak{M}_0=\{a\in M: a$ 是纯集$\}$，则 $\mathfrak{M}_0$ 是纯可容集（这样的 $\mathfrak{M}_0$ 称为 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 的**纯部**(pure part)）.

证明：(1) 因为 $A\cup M$ 在 $\mathbf{V}_A$ 中是传递的，所以若 $a\in M$，则据 0.6.1，

$$a_{\in_A}=a=a_{\in_B}.$$

(2) 据(1)，我们有 $\langle M_0,\in\rangle\subseteq_{\text{end}}\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}\subseteq_{\text{end}}\mathbf{V}_{\mathfrak{A}}$. 据绝对性，$\text{sp}(a)$ 在 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 中和在 $\mathbf{V}_{\mathfrak{A}}$ 中的语义相同. 下面我们来验证 Δ_0-聚合公理，请读者自行验证其它公理.

假设 $a,b\in M_0$ 且 $\langle M_0,\in\rangle$ 满足 $\forall x\in a\exists y\varphi(x,y,b)$，其中 φ 是 Δ_0-公式. 若 $\varphi(x,y,b)$ 在 $\langle M_0,\in\rangle$ 中真，则据绝对性，它也在 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 中真，因此 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 满足：

$$\forall x\in a\exists y[\text{sp}(y)=\varnothing\wedge\varphi(x,y,b)].$$

施 Σ-聚合原则于 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$，存在 $c\in A\cup M$ 使得下面两式满足：

$$\forall x\in a\exists y\in c[\text{sp}(y)=\varnothing\wedge\varphi(x,y,b)]. \tag{0.23}$$

$$\forall y\in c\exists x\in a[\text{sp}(y)=\varnothing\wedge\varphi(x,y,b)]. \tag{0.24}$$

据(0.24)，我们有 $\text{sp}(c)=\bigcup\{\text{sp}(y): y\in c\}=\varnothing$，所以 $c\in M_0$. 但(0.23)是含有 M_0 中参数的 Δ_0-公式，所以它在 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 中真，从而在 $\langle M_0,\in\rangle$ 中真. □

0.7.4 定义　称 α 是**可容集 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 的序数**，记为 $\alpha=o(\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}})$，$\Leftrightarrow$ α 是不在 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 中的最小序数（即 $o(\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}})$ 是 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 中诸序数的序型）. 称序数 α 是**可容序数** $\Leftrightarrow$ 对某个可容集 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$，$\alpha=o(\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}})$. 称序数 α 是 **$\mathfrak{A}$-可容序数** $\Leftrightarrow$ 对某个 $\mathfrak{A}$ 上可容集 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$，$\alpha=o(\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}})$.

说明：可容序数最早是 S. A. Kripke 在其[1964]提出的.

0.7.5 定理　序数 α 是可容的 $\Leftrightarrow$ 对某个纯可容集 $\mathfrak{M}$，

$$\alpha=o(\mathfrak{M}).$$

证明："$\Leftarrow$"显然. 下证"$\Rightarrow$"：若 α 是可容的，则对某个可容集 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$，$\alpha=o(\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}})$. 因为序数都是纯集，所以 $\alpha=o(\langle M_0,\in\rangle)$，其中 $\langle M_0,\in\rangle$ 是 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 的纯部. □

0.7.6 定义　令 $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}=(\mathfrak{A};M,\in,\cdots)$. 我们通常使用下列记号和术语. 若 $x\in A\cup M$，则称 x 在 $\mathfrak{M}$ 中，记作 $x\in\mathfrak{M}$. **$\mathfrak{M}$ 上**

的关系是指 $A\cup M$ 上的关系.

$\mathfrak{M}$ 上的 n 元关系 S 称为 **$\mathfrak{M}$ 上的 Σ_1** $\Leftrightarrow$ 存在 Σ_1-公式 φ，φ 可以含有常元 $\vec{y}_m\in\mathfrak{M}$ 使得对所有 $\vec{x}_n\in\mathfrak{M}$，

$$S(\vec{x}_n)\text{成立}\Leftrightarrow\mathfrak{M}\models\varphi[\vec{x}_n].$$

关系 S 称为 **$\mathfrak{M}$ 上的 Π_1** $\Leftrightarrow$ 上述等价式对某个 Π_1-公式成立.

关系 S 称为 **$\mathfrak{M}$ 上的 Δ_1** $\Leftrightarrow$ S 既是 $\mathfrak{M}$ 上的 Σ_1 又是 $\mathfrak{M}$ 上的 Π_1. **$\mathfrak{M}$ 上的函数** F 是一函数，其中对某个 n，$\mathrm{Dom}(F)\subseteq(A\cup M)^n$，$\mathrm{Ran}(F)\subseteq A\cup M$. 称 F 是 **$\mathfrak{M}$ 上的 Σ_1** $\Leftrightarrow$ F 的图形是 $\mathfrak{M}$ 上的 Σ_1.

0.7.7 定理　令 $\mathfrak{M}$ 是可容集，

(1) 若 $a\in\mathfrak{M}$，则 a 是 $\mathfrak{M}$ 上的 Δ_1.

(2) 若 $x\in\mathfrak{M}$，则 $\{x\}$ 是 $\mathfrak{M}$ 上的 Δ_1.

(3) $\mathfrak{M}$ 上的 Σ_1-关系在 $\wedge$，$\vee$，$\exists x\in a$，$\forall x\in a$，$\exists x$ 下封闭.

证明：(1) 因为 $x\in a\Leftrightarrow\mathfrak{M}\models x\in a$，所以 a 作为 $\mathfrak{M}$ 的子集是 $\mathfrak{M}$ 上的 Δ_1. (2)可从(1)推得.

(3)直接来自下列事实：据 Σ-自返原则，每一 Σ-公式在 $\mathfrak{M}$ 上等价一 Σ_1-公式，而 Σ-公式在上述运算下封闭. □

下面考察几个具体的可容集，它们对无穷逻辑非常重要.

0.7.8 定义　集合 $a\in\mathbf{V}_{\mathfrak{A}}$ 称为**遗传有穷集** $\Leftrightarrow$ $\mathrm{TC}(a)$是有穷的. 令 $\mathbf{HF}_A$ 指称 $\mathbf{V}_{\mathfrak{A}}$ 的所有遗传有穷集的集合. $\mathbf{HF}_A$ 也可递归定义如下：其中 $\mathscr{P}_\omega(A)$表示 A 的所有有穷子集的集合，

$$\mathrm{HF}_A(0)=\varnothing,$$

$$\mathrm{HF}_A(n+1)=\mathscr{P}_\omega(A\cup\mathrm{HF}(n)),$$

$$\mathbf{HF}_A=\bigcup_{n<\omega}\mathrm{HF}_A(n).$$

0.7.9 定理　令 $\mathbf{HF}_{\mathfrak{A}}=(\mathfrak{A};\mathbf{HF}_A,\in,\cdots)$是 $\mathscr{L}^*$ 的结构，则 $\mathbf{HF}_{\mathfrak{A}}$ 是 $\mathfrak{A}$ 的最小可容集，即

(1) $\mathbf{HF}_{\mathfrak{A}}$ 是 $\mathfrak{A}$ 的可容集.

(2) 若 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}=(\mathfrak{A};M,\in,\cdots)$是 $\mathfrak{A}$ 的可容集，则 $\mathbf{HF}_{\mathfrak{A}}\subseteq\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$.

(**注意**：$\mathbf{HF}_{\mathfrak{A}}$ 作为集合和作为 $\mathscr{L}^*$ 的结构是有差别的，但通常

我们清楚这一点.)

证明:(1) 因为 $\mathbf{HF}_{\mathfrak{A}}$ 在 $\mathbf{V}_{\mathfrak{A}}$ 中是传递的,所以我们有外延性公理和基础公理. 施归纳易证每一 $HF_A(n)$ 也是传递的. 若 $x,y\in HF_A(n)$,则 $\{x,y\}\in HF_A(n+1)$,所以有对集公理. 若 $a\in HF_A(n)$,则 $\bigcup a$ 是 $HF_A(n)$ 的有穷子集,所以也是 $HF_A(n+1)$ 的元素,因此有并集公理. 设 $a\subseteq b\in HF_A(n)$,因为有穷集的子集是有穷的,所以 $a\in HF_A(n)$,因此对 $\mathscr{L}^*$ 的所有公式 φ,有

$$\exists b\forall x[x\in b\leftrightarrow x\in a\wedge\varphi(x)],$$

因此有 Δ_0-分离公理. 类似地,对 $\mathscr{L}^*$ 的所有公式 φ,有

$$\forall x\in a\exists y\varphi(x,y)\rightarrow\exists b\forall x\in a\exists y\in b\varphi(x,y),$$

因为若 $a\in\mathbf{HF}_{\mathfrak{A}}$ 有(比方说)k 个元素 $\vec{y}_k$,且对这些元素中的每一个 y_i,存在 x_i 使得 $\varphi(x_i,y_i)$ 成立,则所有 $\vec{x}_k$ 出现在某个 $HF_A(n)$ 中,所以 $\{x_1,\cdots,x_k\}\in HF_A(n+1)$,因此有 Δ_0-聚合公理.

(2) 因为 M 在对集公理和并集公理下封闭. 所以施归纳于 n 易证:对所有 n,$HF_A(n)\subseteq M$. 由此易得结论. □

0.7.10 推论 最小的可容集是 $\mathbf{HF}=\{a\in\mathbf{V}: a$ 是纯遗传有穷集$\}$,最小的可容序数是 ω.

证明:HF 是任意 $\mathbf{HF}_{\mathfrak{A}}$ 的纯部,且 $o(\mathbf{HF})=\omega$. □

0.7.11 引理 存在函数 $e:\omega\to\mathbf{HF}$ 使得下列条件皆满足:

(1) e 是双射使得 e 是 $\langle\mathbf{HF},\in\rangle$ 上的 Σ_1,

(2) $n=e(m)$ 是 m,n 的递归关系,

(3) 对任意 Δ_0-公式 $\varphi(\vec{x}_k)$,$n_1,\cdots,n_k$ 的下列关系是递归的:

$$\text{“}\langle\mathbf{HF},\in\rangle\models\varphi(e(n_1),\cdots,e(n_k))\text{”}.$$

证明:定义整数的**二元膨胀** e 如下:

$e(0)=0$,

$e(1)=\{e(0)\}=\{0\}=1$, $\qquad (1=2^0)$

$e(2)=\{e(1)\}=\{\{0\}\}$, $\qquad (2=2^1)$

$e(3)=\{e(1),e(0)\}=2$, $\qquad (3=2^1+2^0)$

⋮ $\qquad$ ⋮

$e(5)=\{e(2),e(0)\}=2,$ $(5=2^2+2^0)$

$\vdots$ $\vdots$

$e(2^{n_1}+2^{n_2}+\cdots+2^{n_k})=\{e(n_1),\cdots,e(n_k)\}.$ $(n_1>n_2>\cdots>n_k)$

显然，对所有 n，$e(n)$ 由 Σ-递归定义．因此据 0.4.3 和后面的练习 0.7.22，e 是 Σ_1．施归纳易证 e 是双射．验证(2)时须注意，若 $e(k)$ 是整数 n，则 $e(k+2^k)=n+1$．验证(3)时须注意，

$e(n)\in e(m)\Leftrightarrow n$ 在 m 的二元膨胀 $2^{k_1}+\cdots+2^{k_l}$ 中是指数．

施归纳于 Δ_0-公式，据我们熟悉的递归谓词的封闭性质，就能得到其它的 Δ_0-公式．□

0.7.12 定理 令 S 是诸自然数上的关系，

(1) S 是递归枚举的 $\Leftrightarrow$ S 是 **HF** 上的 Σ_1．

(2) S 是递归的 $\Leftrightarrow$ S 是 **HF** 上的 Δ_1．

证明：因为 S 是递归的 $\Leftrightarrow$ S 和 $\neg S$ 是递归枚举的，所以(1) $\Rightarrow$ (2)．但我们先证明(2)的"$\Rightarrow$"以便证明(1)的"$\Rightarrow$"．显然，只须证 ω 上的每一递归全函数 f 可以由下列定义

$$\hat{f}=\begin{cases}f(x), & \text{对 } x\in\omega;\\ 0, & \text{对 } x\notin\omega.\end{cases}$$

扩张到 **HF** 上的一个 Σ_1-函数 $\hat{f}$．

为了证明这一点，我们采用递归函数的定义．这个定义从基本全函数开始，然后在某些从全函数到全函数的运算下封闭．我们选择 J. R. Shoenfield 在其[1967]给出的运算，因此，我们考虑的递归(全)函数类是最小的函数类使得它包含 $+$，$\cdot$，$K_<$($<$ 的特征函数)，$F(\vec{x})=x_i$(投影函数)，且在复合和下列 μ-运算下封闭：

若 G 是递归函数使得 $\forall\vec{n}\exists m[G(\vec{n},m)=0]$，且对所有自然数的 n 元组 $\vec{n}$，$F(\vec{n})=\mu m[G(\vec{n},m)=0]$，其中 m 是最小的 m 使得 $G(\vec{n},m)=0$，则 F 是递归的．

据前面的表 2 和表 4，$\alpha<\beta$ 是 Δ_0-关系，$+$ 和 $\cdot$ 是 Σ_1-运算，易证 Σ_1-全函数的复合仍是 Σ_1-全函数(参见 0.3.6)，所以我们只需证明 f 的扩张 $\hat{f}$ 是 Σ_1 且在 μ-运算下封闭．设 $\forall\vec{n}\exists m[G(\vec{n},m)=0]$

且 G 是递归的，据归纳假设，不妨假设 $\hat{G}$ 是 **HF** 上的 Σ_1，此外，我们还假设 $F(\vec{n})=\mu m[G(\vec{n},m)=0]$. 则 $\hat{F}(\vec{x})=y \Leftrightarrow$

某个 x_i 不是自然数 $\wedge y=0$，或所有 x_i 和 y_i 都是自然数

$\wedge G(\vec{x},y)=0 \wedge \forall z<y \exists n[n\neq 0 \wedge G(\vec{x},z)=n]$.

因为 G 是 Σ_1，所以 F 是 Σ. 据 Σ-自返原则，$\hat{F}$ 是 Σ_1. 所以 ω 上每一递归函数和谓词都是 **HF** 上的 Δ_1. 但每一递归枚举谓词 $S(\vec{x})$ 能写作形如 $\exists nR(\vec{x},n)$，其中 R 据普通递归论的结果是递归的，所以每一递归谓词是 **HF** 上的 Σ_1. 由此不难证明(1)的"$\Rightarrow$".

下证(1)的"$\Leftarrow$"：假设 S 是 **HF** 上的 Σ_1（例如，$S(n) \Leftrightarrow \mathbf{HF}\models \exists y\varphi(n,y)$，且 φ 是 Δ_0-公式；S 的变目多于一个的情况也类似），则

$$S(n) \Leftrightarrow \exists k\exists m[e(k)=n \wedge \varphi(e(k),e(m))].$$

据 0.7.11(2)，"$e(k)=n$"是 n,k 的递归关系，据 0.7.11(3)，关系"$(\mathbf{HF},\in)\models \varphi[e(k),e(m)]$"是递归的，所以 S 是递归枚举的. □

下面我们要考虑的可容集是 $\mathbf{HF}_{\mathfrak{A}}$ 的一个简单概括.

0.7.13 定义 令 κ 是无穷基数，$|X|$ 是 X 的基数，定义

$$\mathbf{H}(\kappa)_A=\{a\in \mathbf{V}_A : |\mathrm{TC}(a)|<\kappa\}.$$

特别地，$\mathbf{H}(\omega)_A=\mathbf{HF}_A$. 当 $A=\varnothing$ 时，我们用 $\mathbf{H}(\kappa)$ 表示 $\mathbf{H}(\kappa)_A$.

0.7.14 定理 令 κ 是正则基数，则 $\mathscr{L}^*$-结构 $(\mathfrak{A};\mathbf{H}(\kappa)_A,\in)$ 是可容集.

证明：本证明如同 0.7.9 的证明. □

0.7.15 向下-Löwenheim-Skolem-定理 令 $\mathscr{L}^*=\mathscr{L}(\in,\cdots)$，$\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}=(\mathfrak{A};M,\in)$ 是可容集，$M_0\subseteq A\cup M$ 是传递集，κ 是基数使得 $\kappa\geq|\mathscr{L}^*|+|M_0|$，则存在可容集 $\mathfrak{N}_{\mathfrak{B}}=(\mathfrak{B};N,\in,\cdots)$ 使得：

(1) $\mathfrak{B}\prec\mathfrak{A}$，　$|B\cup N|\leq\kappa$，　$M_0\subseteq B\cup N$，

(2) 对 $\mathscr{L}^*$ 的任意公式 $\varphi(\vec{v})$ 和任意 $\vec{x}\in M_0$，

$$\mathfrak{N}_{\mathfrak{B}}\models\varphi[\vec{x}] \Leftrightarrow \mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}\models\varphi[\vec{x}],$$

(3) 尤其，$\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}\equiv\mathfrak{N}_{\mathfrak{B}}$.

证明：(**注意**：我们并没有断定 $\mathfrak{N}_{\mathfrak{B}}\subseteq\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$！)把 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 看作是一种单类语言的结构：

$$\mathfrak{M}=\langle A\cup M, A, M, \in, ---, \cdots\rangle,$$

其中 $\mathfrak{A}=\langle A, ---\rangle$. 据通常向下-Löwenheim-Skolem-定理，存在 $\mathfrak{M}_1\prec\mathfrak{M}$ 使得 $M_0\subseteq\mathfrak{M}_1$，且 $|\mathfrak{M}_1|\leqslant\kappa$. 假设 $\mathfrak{M}_1$ 形如：

$$\mathfrak{M}_1=\langle B\cup M_1, B, M_1, \in\cap(B\cup M_1)^2, ---, \cdots\rangle.$$

因为 M_1 中没有始元，故 $\mathrm{clpse}(B\cup M_1)\subseteq\mathbf{V}_B$. 令 $N=\mathrm{clpse}(B\cup M_1)\cap\mathbf{V}_B$（即 N 是 $\mathrm{clpse}(B\cup M_1)$ 中诸集合的集合）. **注意**：在 $\mathrm{clpse}(B\cup M_1)$ 中的始元集就是 B. 用 0.5.2 的记号，令 $f=c_{B\cup M_1}$. 由于 $B\cup M_1$ 是外延的，据崩塌引理，f 是 $\mathfrak{M}_1$ 和结构 $\mathfrak{N}=\langle B\cup N, B, N, \in, ---, \cdots\rangle$ 间的同构. 据 0.5.1(2)，f 在 M_0 上是恒等函数. 令 $\mathfrak{B}=\langle B, ---\rangle$，$\mathfrak{N}_{\mathfrak{B}}=(\mathfrak{B}; N, \in, \cdots)$，易见 $\mathfrak{N}_{\mathfrak{B}}$ 满足(1)—(3). □

0.7.16 定理 对所有无穷基数 κ，集合 $\mathbf{H}(\kappa)_{\mathfrak{A}}=(\mathfrak{A}; \mathbf{H}(\kappa)_A, \in)$ 是可容集. 它是 $\mathfrak{A}$ 上的可容集 $\Leftrightarrow$ $|A|<\kappa$.

证明：只须证若 κ 是奇异基数，则 $\mathbf{H}(\kappa)_{\mathfrak{A}}$ 是 $\mathfrak{A}$ 的可容集. 显然，**KPU** 的前 5 个公理在 $\mathbf{H}(\kappa)_{\mathfrak{A}}$ 中成立，所以剩下只须验证 Δ_0-聚合公理. 假设

$$\forall x\in a\exists y\varphi(x, y, z) \tag{0.25}$$

在 $\mathbf{H}(\kappa)_{\mathfrak{A}}$ 中真，其中 $z\in\mathbf{H}(\kappa)_{\mathfrak{A}}$，$\varphi(x, y, z)$ 是 Δ_0-公式. 显然，φ 只含有穷多个 $\mathscr{L}^*$ 的符号. 所以，不妨假设 $|\mathscr{L}^*|\leqslant\aleph_0<\kappa$. 令 $a, z\in X$，X 是传递的且 $|X|<\kappa$；比方说，$X=\mathrm{TC}(\{a, z\})$. 因为(0.25)在 $\mathbf{H}(\kappa)_{\mathfrak{A}}$中真，所以它对 $\mathbf{H}(\kappa^+)_{\mathfrak{A}}$ 保持，其中 κ^+是$>\kappa$ 的最小基数. 据 0.7.14，$\mathbf{H}(\kappa^+)_{\mathfrak{A}}$ 是可容集. 据 0.7.15，存在可容集 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{B}}$ 使得 $\mathfrak{B}\subseteq\mathfrak{A}$，$X\subseteq\mathfrak{M}_{\mathfrak{B}}$，$|\mathfrak{M}_{\mathfrak{B}}|<\kappa$ 且(0.25)在 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{B}}$ 中成立. 据 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{B}}$ 中成立的 Δ_0-聚合公理，存在 $b\in\mathfrak{M}_{\mathfrak{B}}$，使得

$$\forall x\in a\exists y\in b\varphi(x, y) \tag{0.26}$$

在 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{B}}$ 中成立. 但 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{B}}\subseteq_{\mathrm{end}}\mathbf{H}(\kappa)_{\mathfrak{A}}$，所以据保持性，(0.26)在 $\mathbf{H}(\kappa)_{\mathfrak{A}}$ 中成立. □

0.7.17 推论 每一无穷基数是可容序数. 对每一不可数基数 $\kappa>\beta$，存在可容序数 α 使得 $\beta<\alpha<\kappa$.

证明：据 0.7.16 和 $\kappa=o(\mathbf{H}(\kappa))$，立得第一个断定. 令 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}=\mathbf{H}(\kappa)$，$M_0=\beta+1$ 且 $\kappa=|\beta|$. 据 0.7.15，可得第二个断定. □

0.7.18 定理 对所有不可数基数 κ,λ 使得 $\kappa<\lambda$，则

$$\mathbf{H}(\kappa)_{\mathfrak{A}}\prec_{\Sigma_1}\mathbf{H}(\lambda)_{\mathfrak{A}}.$$

证明：本证明如同 0.7.16：设 $\theta=\exists y\varphi(x,y)$ 在 $\mathbf{H}(\lambda)_{\mathfrak{A}}$ 中成立，其中 $x\in\mathbf{H}(\kappa)_{\mathfrak{A}}$. 如同 0.7.16 证明那样，存在可容集 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{B}}$ 使得 $\mathfrak{B}\subseteq\mathfrak{A}$，$\theta$ 在 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{B}}$ 中成立且 $|\mathfrak{M}_{\mathfrak{B}}|<\kappa$. 但 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{B}}\subseteq_{\text{end}}\mathbf{H}(\kappa)_{\mathfrak{A}}$，所以据保持性，$\theta$ 也在 $\mathbf{H}(\kappa)_{\mathfrak{A}}$ 中成立. □

练 习

0.7.19 令 $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 是可容集，G 是定义在 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 中所有三元组上的运算使得 $G\restriction\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 在 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 上是 Σ_1. 在 $\mathbf{V}_{\mathfrak{A}}$ 中 Σ-递归定义

$$F(x,y)=G(x,y,\{F(x,z);\ z\in\mathrm{TC}(y)\}).$$

证明 $x\in\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}\Rightarrow F(x)\in\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$，且 $F\restriction\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}\times\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 在 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 上是 Σ_1.

0.7.20 证明 $\mathbf{HF}_{\mathfrak{A}}\subseteq\mathbf{V}_{\mathfrak{A}}(\omega)$；$\mathbf{HF}_{\mathfrak{A}}=\mathbf{V}_{\mathfrak{A}}(\omega)\Leftrightarrow\mathfrak{A}$ 是有穷的.

0.7.21 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 是可容集且 $o(\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}})=\omega\Rightarrow\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 的纯部是 $\mathbf{HF}$.

0.7.22 证明 $\mathrm{H}(l)=\{n_1,\cdots,n_k\}$ 是 l 的 Σ_1-运算，其中

$$l=2^{n_1}+\cdots+2^{n_k},\quad n_1>\cdots>n_k.$$

§8 可构成集

假设读者理解理论 T_1（用语言 $\mathscr{L}_1$ 来表述）在另一理论 T_2（用可能不同的语言 $\mathscr{L}_2$ 来表述）中的解释 I 的概念. 关于这方面的文献可以见 H. B. Enderton 的[1972]和 Shoenfield 的[1967]. 我们用 φ^I 来表示 I 给出的 φ 的解释，所以 φ 和 φ^I 分别是 $\mathscr{L}_1$ 和 $\mathscr{L}_2$ 的公式. 若 φ 是 T_1 的公理，则 φ^I 是 T_2 的定理. 若 $\mathfrak{A}$ 是 T_2 的模型，则用 $\mathfrak{A}^{-1}$ 表示由 $\mathfrak{A}$ 和 I 给定的 $\mathscr{L}_1$-结构. 显然，$\mathfrak{A}^{-1}$ 是 T_1 的模型.

举一简单的例子：在 KPU 中 I 如下解释 Peano-算术：

用“有穷序数”定义“自然数”， 用“序数加法”定义“加法”，

用“序数乘法”定义“乘法”， 用“$x\in y$”定义“$x<y$”，

则（用 $+$，$\cdot$，$<$ 表示的）Peano-算术的每一公理 φ 转变为（用 $\mathscr{L}(\in,\cdots)$ 表示的）KPU 的定理 φ^I. 若 $\mathfrak{M}_\mathfrak{A}\models$ KPU，则 $\mathfrak{M}_\mathfrak{A}{}^{-I}=\langle N_1,+,\cdot,<\rangle$ 是 Peano-算术的模型，其个体域 N_1 是 $\mathfrak{M}_\mathfrak{A}$ 的有穷序数的集合，$\mathfrak{M}_\mathfrak{A}{}^{-I}$ 中的 $+$，$\cdot$，$<$ 是 $\mathfrak{M}_\mathfrak{A}$ 的相应的函数和关系对 N_1 的限制. 下列结果是 0.7.3 的一种概括：

0.8.1 定理 令 $\mathfrak{M}_\mathfrak{A}=(\mathfrak{A};M,\in)$ 是可容集，$\mathfrak{A}_0\subseteq\mathfrak{A}$，且 A_0 在 $\mathfrak{M}_\mathfrak{A}$ 上是 Σ_1. 若 $\mathfrak{N}_{\mathfrak{A}_0}=(\mathfrak{A}_0;N,\in)$ 使得 $N=\{a\in M:\ \mathrm{sp}(a)\subseteq A_0\}$，则 $\mathfrak{N}_{\mathfrak{A}_0}$ 是 $\mathfrak{A}_0$ 的可容集.

证明：因为 N 是传递的，所以外延性公理和基础公理成立. 对集公理、并集公理和 Δ_0-分离公理的验证是例行公事，所以下面只验证 Δ_0-聚合公理. 设 $\mathfrak{N}_{\mathfrak{A}_0}$ 满足 $\forall x\in a\exists y\varphi(x,y)$，其中 a 和 φ 中其它参数在 $\mathfrak{N}_{\mathfrak{A}_0}$ 中. 对固定的 $y\in\mathfrak{N}_{\mathfrak{A}_0}$，在 $\mathfrak{M}_\mathfrak{A}$ 中有 $\forall p\in\mathrm{sp}(y)\theta(p)$，其中 $\theta(p)$ 是 $\mathfrak{M}_\mathfrak{A}$ 中成立的、定义 $\mathfrak{A}_0$ 的 Σ_1-公式. 因此 $\mathfrak{M}_\mathfrak{A}$ 满足

$$\forall x\in a\exists y[\varphi(x,y)\wedge\forall p\in\mathrm{sp}(y)\theta(p)].$$

据 $\mathfrak{M}_\mathfrak{A}$ 中成立的 Σ-聚合原则，$\mathfrak{M}_\mathfrak{A}$ 中存在 b 使得

$$\forall x\in a\exists y\in b\varphi(x,y),\quad \forall y\in b\forall p\in\mathrm{sp}(y)\theta(p).$$

但 $\mathrm{sp}(b)\subseteq A_0$，所以据绝对性，$b\in N$，且上两式在 $\mathfrak{N}_{\mathfrak{A}_0}$ 中成立. □

说明：0.8.1 是解释 I 的一平凡运用. 若 $\theta(p)$ 定义 $\mathfrak{A}_0$，则事实上 I 只是用“x 是始元 $\wedge\theta(x)$”重新定义“x 是始元”，用“x 是集合 $\wedge\forall p\in\mathrm{sp}(x)\theta(p)$”重新定义“$x$ 是集合”，且使 $\in$ 和 $\mathscr{L}$ 的符号保持不变. 如同 0.8.1 的证明那样，我们可以证明 KPU 的每一公理 φ 是 KPU_1 的定理 φ^I（这里的 KPU_1 是 KPU 加上断定“θ 在 $\mathscr{L}$ 的任意函数符号下封闭”的公理），所以对 KPU_1 的每一模型 $\mathfrak{M}_\mathfrak{A}$，结构 $\mathfrak{M}_\mathfrak{A}{}^{-I}$ 也是 KPU 的模型. 因此，据 0.8.1，我们有 $\mathfrak{N}_{\mathfrak{A}_0}=\mathfrak{M}_\mathfrak{A}{}^{-I}$.

0.8.2 定义 令 $\mathscr{L}^*=\mathscr{L}(\in)$，I 是在 $\mathscr{L}^*$ 表述的 KPU 中对 $\mathscr{L}^*$ 的解释，称 I 是**传递的 $\in$-解释** $\Leftrightarrow$ I 使 $\mathscr{L}$ 的符号和 $\in$ 保持不

变，只是限制始元和集合使得下列在 **KPU** 中可证：

(1) 若(x 是始元)^{I}，则 x 是始元，

(2) 若(x 是集合)^{I}，则 x 是集合且对所有 $y \in x$，

$$(y\text{ 是始元})^{\mathrm{I}}\text{ 或}(y\text{ 是集合})^{\mathrm{I}}.$$

若 I 是传递的 $\in$-解释，且 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}} \models$ **KPU**，则 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}{}^{-\mathrm{I}}$ 称为由 I 给定的 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 的**内子模型**(inner submodel)。

注意：0.8.2 的诸条件保证 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}{}^{-\mathrm{I}} \subseteq_{\mathrm{end}} \mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$。

0.8.3 引理　令 I 是传递的 $\in$-解释，

(1) **KPU** $\vdash$ (外延性公理)^{I}.

(2) 对基础公理的每一特例 φ，**KPU** $\vdash \varphi^{\mathrm{I}}$.

(3) 对每一 Σ-公式 $\varphi(x)$，

$$\mathbf{KPU} \vdash \mathrm{Urelement}(x)^{\mathrm{I}} \vee \mathrm{Set}(x)^{\mathrm{I}} \to [\varphi(x)^{\mathrm{I}} \to \varphi(x)].$$

(4) 对每一 Δ_0-公式 $\varphi(x)$，

$$\mathbf{KPU} \vdash \mathrm{Urelement}(x)^{\mathrm{I}} \vee \mathrm{Set}(x)^{\mathrm{I}} \to [\varphi(x)^{\mathrm{I}} \leftrightarrow \varphi(x)].$$

证明：证(1)：显然，(外延性公理)^{I} 能写成：

$$\mathrm{Set}(a)^{\mathrm{I}} \wedge \mathrm{Set}(b)^{\mathrm{I}} \wedge a \neq b$$
$$\to \exists x[(\mathrm{Set}(x)^{\mathrm{I}} \vee \mathrm{Urelement}(x)^{\mathrm{I}}) \wedge \neg(x \in a \leftrightarrow x \in b)].$$

而这可以直接从 0.8.2(2)得到.

证(2)：令 $\varphi = \exists a\psi(a) \to \exists a[\psi(a) \wedge \neg\exists b \in a\psi(b)]$. 运用基础公理于公式 $\mathrm{Set}(a)^{\mathrm{I}} \wedge \psi(a)^{\mathrm{I}}$，则

$$\varphi^{\mathrm{I}} = [\exists a(\mathrm{Set}(a)^{\mathrm{I}} \wedge \psi(a)^{\mathrm{I}})$$
$$\to \exists a[\mathrm{Set}(a)^{\mathrm{I}} \wedge \psi(a)^{\mathrm{I}} \wedge \neg\exists b \in a(\mathrm{Set}(b)^{\mathrm{I}} \wedge \psi(b)^{\mathrm{I}})]].$$

证(3)：因为对所有 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}} \models$ **KPU**，$\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}{}^{-\mathrm{I}} \subseteq_{\mathrm{end}} \mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$，所以据 $\subseteq_{\mathrm{end}}$ 的基本性质，有(3)成立. 也可施归纳于 φ 的复杂度直接证明(3).

(4)的证明来自(3). □

下面我们用带始元的可构成集(constructible set)的 **Gödel-谱系**(hierarchy)来构造更重要的可容集. 以下规定语言 $\mathscr{L}$ 只含有穷个关系符号，$\mathscr{L}^* = \mathscr{L}(\in)$. (当然，经过简单的修正我们能够把这里得到的结果扩张到有函数和个体常元符号的语言上去.)

0.8.4 定义 固定 $\mathscr{F}_1,\cdots,\mathscr{F}_N$ 是引入 **KPU** 的、有两个变目的 Σ_1-运算使得：其中 $\mathscr{D}(b)=b\bigcup\{\mathscr{F}_i(x,y):x,y\in b,1\leqslant i\leqslant N\}$，

(1) $\mathscr{F}_1(x,y)=\{x,y\}$，

(2) $\mathscr{F}_2(x,y)=\bigcup x$，

(3) $\mathbf{KPU}\vdash \mathrm{sp}(\mathscr{F}_i(x,y))\subseteq \mathrm{sp}(x)\bigcup \mathrm{sp}(y)$， 对所有 $i\leqslant N$，

(4) $\mathbf{KPU}\vdash[\mathrm{Tran}(b)\rightarrow \mathrm{Tran}(\mathscr{D}(b))]$，

(5) 对自由变元在 $\vec{x}_n$ 中的每一 Δ_0-公式 $\varphi(\vec{x}_n)$ 和每一变元 x_i，$i\leqslant n$，存在由 $\mathscr{F}_1,\cdots,\mathscr{F}_N$ 构造的 n 元项 $\mathscr{F}$ 使得

$\mathbf{KPU}\vdash \mathscr{F}(a,x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_n)=\{x_i\in a:\varphi(\vec{x}_n)\}$.

注意：因为 $\mathscr{F}_1,\cdots,\mathscr{F}_N$ 是 Σ-运算，所以 $\mathscr{D}$ 也是 Σ-运算. 在 KPU 中(在第二个变目上)递归定义 Σ-运算 $\mathbf{L}(\cdot,\cdot)$ 如下：

$$\mathbf{L}(a,0)=\mathrm{TC}(a),$$

$$\mathbf{L}(a,\alpha+1)=\mathscr{D}(\mathrm{s}(\mathbf{L}(a,\alpha)))=\mathscr{D}(\mathbf{L}(a,\alpha)\bigcup\{\mathbf{L}(a,\alpha)\}),$$

$$\mathbf{L}(a,\lambda)=\bigcup_{\alpha<\lambda}\mathbf{L}(a,\alpha),\quad 若\ \mathrm{Lim}(\lambda).$$

0.8.5 定义 称 x 是**由 a 可构成集**，记作 $x\in\mathbf{L}(a)$，$\Leftrightarrow \exists\alpha(x\in\mathbf{L}(a,\alpha))$. 若 x 由 $a=\varnothing$ 可构成，则称 x 是**可构成集**，记为 $x\in\mathbf{L}$.

以后用 $\mathbf{V}=\mathbf{L}$ 表示我们考虑问题时最大可能的集合域是 $\mathbf{L}$.

0.8.6 引理 (在 KPU 中)对所有集合 a 和序数 α：

(1) a 是传递的 $\Rightarrow a\in\mathbf{L}(a,1)$.

(2) $\mathbf{L}(a,\alpha)$是传递的.

(3) $\alpha<\beta\Rightarrow\mathbf{L}(a,\alpha)\subseteq\mathbf{L}(a,\beta)$.

(4) $\mathbf{L}(a,\alpha)\in\mathbf{L}(a,\alpha+1)$.

(5) $x,y\in\mathbf{L}(a,\alpha)\Rightarrow\mathscr{F}_i(x,y)\in\mathbf{L}(a,\alpha+1)$， $1\leqslant i\leqslant N$.

(6) $\alpha\in\mathbf{L}(a,\beta)$， 对某个 β.

(7) 始元 $p\in\mathbf{L}(a)\Leftrightarrow p\in\mathrm{sp}(a)$.

证明：从 $\mathbf{L}(a,\alpha)$的定义可直接推得(1)，(3)，(4)，(5). 施归纳于 α 且据定义 0.8.4(4)就能得到(2). 对(7)，只须据 0.8.4(3)且施归纳于 α 以证明：

$$p\in\mathbf{L}(a,\alpha)\Leftrightarrow p\in\mathrm{sp}(a).$$

证(6)：施归纳于 α. 据归纳假设，有 $\forall\gamma<\alpha\exists\delta[\gamma\in\mathbf{L}(a,\delta)]$. 据 Σ-自返原则，存在序数 λ 使得 $\forall\gamma<\alpha\exists\delta<\lambda[\gamma\in\mathbf{L}(a,\delta)]$. 但是据(3)，每一 $\gamma<\alpha$ 在 $\mathbf{L}(a,\lambda)$ 中，即 $\alpha\subseteq\mathbf{L}(a,\lambda)$. 据 0.8.4(5)，对某个 $\lambda_1\geqslant\lambda$，集合 $b=\{x\in\mathbf{L}(a,\lambda):\mathrm{Ord}(x)\}$ 在 $\mathbf{L}(a,\lambda_1)$ 中. 因为 $\mathbf{L}(a,\lambda)$ 是传递的，所以 b 是某个序数 β 且 $\beta\leqslant\alpha$. 又因为 $\mathbf{L}(a,\lambda_1)$ 是传递的，且 $\alpha=\beta$ 或 $\alpha\in\beta$，所以 $\alpha\in\mathbf{L}(a,\lambda_1)$. □

现定义一传递的 $\in$-解释 $\varphi^{\mathbf{L}(a)}$ 如下：

$(x$ 是始元$)^{\mathbf{L}(a)}$ 是 $(x\in\mathrm{sp}(a))$，

$(x$ 是集合$)^{\mathbf{L}(a)}$ 是 $(x$ 是集合 $\wedge x\in\mathbf{L}(a))$，

且使得 $\in$ 和原来语言 $\mathscr{L}$ 的所有符号保持不变.

0.8.7 定理 对 $\mathbf{KPU}^+$ 的每一公理 φ，$\mathbf{KPU}\vdash\varphi^{\mathbf{L}(a)}$.

证明：分别考虑 $\mathbf{KPU}^+$ 的 7 个公理. 外延性和基础公理据 0.8.3. 对集公理和并集公理据 0.8.4(1)，(2)和 0.8.3(4). Δ_0-分离公理据 0.8.4(5)和 0.8.3(4). 所以下面只须考虑最后两个公理：

Δ_0-聚合公理：设 $\varphi(x,y,z)$ 是 Δ_0-公式，在 $\mathbf{KPU}$ 中假设 $a_0,z\in\mathbf{L}(a)$ 且 $\forall x\in a_0\exists y\in\mathbf{L}(a)[\varphi(x,y,z)^{\mathbf{L}(a)}]$. 忽略 z，施 0.8.3(4)于 $\varphi(x,y)$，有 $\forall x\in a_0\exists\alpha[\exists y\in\mathbf{L}(a,\alpha)\varphi(x,y)]$. 据 Σ-聚合原则，存在 β 使得 $\forall x\in a_0\exists\alpha<\beta[\exists y\in\mathbf{L}(a,\alpha)\varphi(x,y)]$. 据 0.8.6(3)，

$$\forall x\in a_0\exists y\in\mathbf{L}(a,\beta)\varphi(x,y).$$

令 $b=\mathbf{L}(a,\beta)$，据 0.8.3(4)，有 $[\forall x\in a_0\exists y\in b\varphi(x,y)]^{\mathbf{L}(a)}$. 所以 Δ_0-聚合公理的解释是可证的.

最后证 $[\exists b\forall x(x\in b\leftrightarrow\exists p(x=p))]^{\mathbf{L}(a)}$，即相对 $\mathbf{L}(a)$ 存在所有始元的集合. 据 Δ-分离定理，只须证 $[\exists b\forall p(p\in b)]^{\mathbf{L}(a)}$. 下令 $b=\mathrm{TC}(a)=\mathbf{L}(a,0)$. 据 $\mathbf{L}$ 的定义，$b\in\mathbf{L}(a,1)$，且 $(x$ 是始元$)^{\mathbf{L}(a)}$ 恰好是"$x\in\mathrm{sp}(a)$"，但 $\mathrm{sp}(a)\subseteq b$，所以得证. □

0.8.8 定义 $\mathbf{L}(\alpha)_{\mathfrak{A}}=(\mathfrak{A};\mathbf{L}(A,\alpha)\cap\mathbf{V}_A,\in)$.

注意：$\mathbf{L}(\alpha)_{\mathfrak{A}}$ 是($\mathscr{L}^*=\mathscr{L}(\in)$的)结构，也可以不是可容集.

0.8.9 定理 若存在 $\mathfrak{A}$ 上的可容集 $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 使得 $o(\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}})=\alpha$，则 $\mathbf{L}(\alpha)_{\mathfrak{A}}$ 是最小这样的可容集. 等价地说，据假设，$\mathbf{L}(\alpha)_{\mathfrak{A}}$ 是可

容集，$\mathbf{L}(\alpha)_{\mathfrak{A}}\subseteq\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$，$A\in\mathbf{L}(\alpha)_{\mathfrak{A}}$ 且 $o(\mathbf{L}(\alpha)_{\mathfrak{A}})=\alpha$.

证明：对 $\beta<\alpha$，据绝对性，$\mathbf{L}(A,\beta)$ 在 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 和 $\mathbf{V}_{\mathfrak{A}}$ 中有相同的语义，所以 $\mathbf{L}(\alpha)_{\mathfrak{A}}$ 是由前面定义的解释给定的 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 的内模型. 特别是，$\mathbf{L}(\alpha)_{\mathfrak{A}}\subseteq\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$. 据 0.8.7，$\mathbf{L}(\alpha)_{\mathfrak{A}}$ 是可容集，且 $A\in\mathbf{L}(\alpha)_{\mathfrak{A}}$. 而根据 0.8.6(6)，$o(\mathbf{L}(\alpha)_{\mathfrak{A}})=\alpha$. □

0.8.10 定义（下一个可容集） 定义 $\mathbf{HYP}_{\mathfrak{A}}=(\mathfrak{A};M,\in)$，其中 $M=\bigcap\{N:(\mathfrak{A};N,\in)$ 是 $\mathfrak{A}$ 上的可容集$\}$.

0.8.11 定理 (1) $\mathbf{HYP}_{\mathfrak{A}}$ 是 $\mathfrak{A}$ 上最小的可容集.

(2) $\mathbf{HYP}_{\mathfrak{A}}=\mathbf{L}(\alpha)_{\mathfrak{A}}$， 对 $\alpha=o(\mathbf{HYP}_{\mathfrak{A}})$.

证明：只须证 $\mathbf{HYP}_{\mathfrak{A}}$ 是 $\mathfrak{A}$ 的可容集，因为它总包含在所有其它的、把 A 作为一元素的、$\mathfrak{A}$ 的可容集之中. 据 0.7.16，存在可容集 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 使得 $A\in\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$. 令 α 是形如 $o(\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}})$ 的序数中最小的一个使得 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 是 $\mathfrak{A}$ 上的可容集. 施 0.8.9 于 α 和 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$，易得结论. □

说明：因为 $\mathbf{L}(\alpha)=\mathbf{L}(\varnothing,\alpha)$，所以 $\mathbf{L}(\alpha)$ 是纯集，因此有：

0.8.12 推论 序数 α 是可容的 $\Leftrightarrow$ $\mathbf{L}(\alpha)$ 是纯可容集. □

0.8.13 定理 令 a 是纯传递集，$M=\bigcap\{N: N$ 是可容的，$a\in N\}$. 则 M 是可容的；对某个可容序数 α，$M=\mathbf{L}(a,\alpha)$；且它是包含 a 为元素的最小可容集.

证明：证明类似 0.8.11. □

0.8.14 推论 α 是可容序数且 $a\in\mathbf{L}(\alpha)\Rightarrow\mathbf{L}(a,\alpha)=\mathbf{L}(\alpha)$.

证明：$\mathbf{L}(a,\alpha)$ 和 $\mathbf{L}(\alpha)$ 都是包含 a 和 α 的最小可容集. □

练 习

0.8.15 令 $A\subseteq sp(a)$，λ 是极限序数. 证明 $(\mathfrak{A};\mathbf{L}(a,\lambda)\cap\mathbf{V}_A,\in)$ 满足 KPU 的所有公理，有可能例外的只是 Δ_0-聚合公理.

0.8.16 若 $\kappa>|A|$ 是基数，则 $\mathbf{L}(\kappa)_{\mathfrak{A}}$ 是 $\mathfrak{A}$ 上的可容集.

0.8.17 若 κ,λ 是不可数基数且 $\kappa<\lambda$，则 $\mathbf{L}(\kappa)_{\mathfrak{A}}\prec_{\Sigma_1}\mathbf{L}(\lambda)_{\mathfrak{A}}$.

0.8.18 对所有 $\kappa\geqslant\omega$，$\mathbf{L}(\kappa)$ 是可容的.

第1章　基本概念

本章是全书的预备知识，主要引入表述和解释无穷逻辑的语言(称为无穷语言)的基本概念.

本章§1，我们介绍无穷语言的符号类、无穷语言在不同的元理论(即集合论背景)中的语法和语义的基本概念.

在§2我们讨论无穷语言的表达力.主要讨论$\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$对自然数算术、有穷集的类、良序类、线序类、同构于某个传递集的结构类、良建类等重要概念的刻画.

在§3我们对无穷语言的公式、结构及其结构间的映射进行初步分类，揭示与之相关的一些重要性质和基本事实.

虽然本章引入的各种概念和关系在后面各章节才分别得以使用，但在全书一开始就一并引入却有极大的统一性、简洁性和方便性，而且也将给读者一个总体的印象. 当然，读者可以根据自己的水平或需要，在具体阅读时，尤其在做练习时，跳过一些内容，阅读后面其它的内容，甚至直接进入其它章节.

§1　语言$\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的基本语法和语义

无穷逻辑的语法和语义是与它们的元理论即集合论背景密切相关的. 在此我们主要在集合论系统 **ZF** 和 **KPU** 中分别建立无穷逻辑的基本语法和语义.

一、相对 ZF 系统的语法和语义

1. 语　法

本书我们主要考虑的语言是无穷语言 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 以及它的各种特例及其极限情况，其中希腊小写字母 $\kappa, \lambda, \rho, \pi$ 指称基数，对它们的规定随以后各章节的具体情况而定．**无穷语言** $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 定义如下：

（1）**（个体）变元**：一列基数至少为 κ 的符号．本书以后，若不另加说明，固定用英文小写字母 $x, y, z, u, v, w\cdots$（带或不带指标）来指称．象通常一样，我们假设不同的符号指称不同的变元．若 $\xi<\kappa$，则我们也用 $v\upharpoonright\xi$ 来指称变元序列 $\langle v_\zeta : \zeta<\xi\rangle$，并称这个序列的长度为 ξ．

通常字母 $x, y, z, u, v, w, \cdots$ 也有元语言符号（变元）的意义，它们用来指称该语言的变元．以后我们用 Var 指称（1）的所有变元的集合．

（2）**逻辑符号**：

联 结 词：$\neg$（否定），$\wedge$（合取）．

量　　词：$\exists$（存在）．

等词符号：$\equiv$．

各种括号：(,)，[,]．

（3）**非逻辑符号**：通常分为三类，每一类可以是有穷的、无穷的、或者甚至是空的：

① 一列 η 元（$0<\eta<\pi$）关系符号 Rel．

② 一列 ζ 元（$0<\zeta<\rho$）函数符号 Fnt．

③ 一列个体常元符号 Ind．

这些符号在我们考虑的语言的每一解释（后面将精确定义）中将分别指称关系、函数和个体常元．根据约定，（ζ 元）函数可以看作是（$\zeta+1$ 元）关系的特殊情况，个体常元可以看作是 0 元函数符号．但是，使用函数符号仍是很方便的（当然，增加了函数符号，有

时也受很大的限制，例如，后面将要引入的子结构概念.）

对每一关系和函数符号，我们必须规定其元（变目）的个数，因此我们给出映射 $a_{Rel}:\mathrm{Rel}\to\pi-\{0\}$ 和 $a_{Fnt}:\mathrm{Fnt}\to\rho$. 例如，数 $a_{Rel}(R)$ 称为关系符号 R 的元的个数（简称 R 的**元数**）. 若 $a_{Rel}(R)=\eta$，则称 R 是 η 元关系. 对函数符号也类似规定. 如上所述，个体常元符号等同于 0 元函数符号.

四元组 $\mu=\langle \mathrm{Rel},\mathrm{Fnt},a_{Rel},a_{Fnt}\rangle$ 称为该语言的**相似类型**（similarity type），因此 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\mu)$ 完全确定无穷逻辑的语言. μ,ν（带或不带指标）用以指称相似类型. 本书以后，除非另加说明，固定用 R，S，…（带或不带指标）表示 μ 中的关系符号，用 F,G，…（带或不带指标）表示 μ 中的函数符号，用 c,d，…（带或不带指标）表示 μ 中的个体常元符号.

为了简化，我们在以后不致混淆之处用语言 $\mathscr{L}$，$\mathscr{L}'$，$\mathscr{L}_1$，…来确定它的相似类型 μ,ν，…，从而用 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$，$\mathscr{L}'_{\kappa\lambda\rho\pi}$，…来表示 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\mu)$，$\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\nu)$，….

有时我们需要把新符号（特别是新个体常元符号）加给给定的语言. $\mathscr{L}$ 和 $\mathscr{L}_1$ 的“加”，即 $\mathscr{L}_2=\mathscr{L}\cup\mathscr{L}_1$（或 $\mathscr{L}_2=\mathscr{L}+\mathscr{L}_1$），定义如下：

$$\mathrm{Rel}_{\mathscr{L}_2}=\mathrm{Rel}_{\mathscr{L}}\cup\mathrm{Rel}_{\mathscr{L}_1},\qquad \mathrm{Fnt}_{\mathscr{L}_2}=\mathrm{Fnt}_{\mathscr{L}}\cup\mathrm{Fnt}_{\mathscr{L}_1}$$

$$a_{\mathrm{Rel}_{\mathscr{L}_2}}=a_{\mathrm{Rel}_{\mathscr{L}}}\cup a_{\mathrm{Rel}_{\mathscr{L}_1}},\qquad a_{\mathrm{Fnt}_{\mathscr{L}_2}}=a_{\mathrm{Fnt}_{\mathscr{L}}}\cup a_{\mathrm{Fnt}_{\mathscr{L}_1}},$$

其中我们要求对每一 $R\in\mathrm{Rel}_{\mathscr{L}}\cap\mathrm{Rel}_{\mathscr{L}_1}$，

$$a_{\mathrm{Rel}_{\mathscr{L}}}(R)=a_{\mathrm{Rel}_{\mathscr{L}_1}}(R).$$

对函数也作类似要求. 显然，$a_{\mathrm{Rel}_{\mathscr{L}_2}}$ 和 $a_{\mathrm{Fnt}_{\mathscr{L}_2}}$ 也是映射. 在不致混淆之处，我们常用下面的简易记号来表示诸语言的“加”：$\mathscr{L}\cup\{R,S,\cdots\}$，$\langle\mathscr{L},c\rangle_{c\in C}$，甚至 $\mathscr{L}(R)=\mathscr{L}\cup\{R\}$，$\mathscr{L}(C)=\mathscr{L}\cup C$，其中 R,S，…是元数在上下文确定的新关系符号（即不在 $\mathrm{Rel}_{\mathscr{L}}$ 中出现的符号），C 是新个体常元符号集（即 $C\cap\mathrm{Rel}_{\mathscr{L}}=\varnothing$）. 这些记号的意义在上下文中总是清楚的.

下面叙述$\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的形成规则．首先定义“**项**(term)”的概念：

1.1.1 定义 (1) 任何个体变元是项，

(2) 任何个体常元符号是项，

(3) 若 F 是任意 ζ 元函数$(0<\zeta<\rho)$，且$\langle t_\xi:\xi<\zeta\rangle$是项的序列，则 $F(\langle t_\xi:\xi<\zeta\rangle)$是项，

(4) 所有的项都由(1)—(3)定义．

不含变元的项称为**闭项**．字母 t，…(带或不带指标)是元语言的变元用以指称项．Term($\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$)指称由语言 $\mathscr{L}$ 确定的所有项的集合(类)．若 $\mathscr{L}$ 不含函数符号，则 Term($\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$)中的项只有变元和个体常元．据 1.1.1，当 ρ 是正则无穷基数时，每一个项的长度$<\rho$，这是由于基数的下列性质：

若 $\rho>\zeta$ 是无穷正则基数且对所有 $\xi<\zeta,\gamma_\xi<\rho$，则$\sum\limits_{\xi<\zeta}\gamma_\xi<\rho$．

当 $\rho=\omega$(其中 ω 表示第一个(可数)无穷基数)时，Term($\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$)就是有穷逻辑的项集．为了简便和直观，以后我们也把 1.1.1 中的 $F(\langle t_\xi:\xi<\zeta\rangle)$简写为 $F(t_\xi:\xi<\zeta)$；若 R 是 η 元关系，则我们相应地把$R(\langle t_\xi:\xi<\eta\rangle)$简写为 $R(t_\xi:\xi<\eta)$．

现在我们来定义 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的表达式：

1.1.2 定义 φ称为 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$-**表达式**当且仅当存在有穷序列 φ_0，φ_1，…，φ_n(称为 φ 在 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$中的一个**形成**(formation))使得 $\varphi_n=\varphi$，且对每一$m\leqslant n$，至少下列条件之一成立：

(1) φ_m 是$(t\equiv t_1)$，其中 t,t_1 是任意两个项，

(2) φ_m 是$(R(t_\xi:\xi<\eta))$，其中 R 是 $\eta(0<\eta<\pi)$元关系符号，且$\langle t_\xi:\xi<\eta\rangle$是项的序列，

(3) $\varphi_m=(\neg\psi)$，其中 ψ 是表达式，

(4) $\varphi_m=(\bigwedge\{\varphi_\xi:\xi<\delta\})$，其中 $\delta<\kappa$，$\{\varphi_\xi:\xi<\delta\}$是表达式集，

(5) $\varphi_m=(\exists\langle v_{\alpha_\xi}:\xi<\delta\rangle\psi)$，其中 ψ 是表达式，$\delta<\lambda$，$\langle v_{\alpha_\xi}:\xi<\delta\rangle$是个体变元序列使得对每一 $\xi<\delta$，$\alpha_\xi<\max\{\kappa,\lambda\}$．

注意：满足(1)和(2)的称为**原子表达式**．当(4)中的$\{\varphi_\xi:\xi<\delta\}$

$=\{\varphi,\psi\}$，$(\bigwedge\{\varphi_\xi:\xi<\delta\})$就写成通常的形式$(\varphi\wedge\psi)$；当$\{\varphi_\xi:\xi<\delta\}=\{\varphi\}$，$(\bigwedge\{\varphi_\xi:\xi<\delta\})$就约定为$\varphi$. →(蕴涵)，↔(等价)的定义如有穷逻辑，∀(全称)和∨(析取)的定义如下：

$$(\bigvee\{\varphi_\xi:\xi<\delta\})=(\neg\bigwedge\{\neg\varphi_\xi:\xi<\delta\}),\qquad \text{据(4)}$$

$$(\forall\langle v_{\alpha_\xi}:\xi<\delta\rangle\psi)=(\neg\exists\langle v_{\alpha_\xi}:\xi<\delta\rangle\neg\psi).\qquad \text{据(5)}$$

通常我们把→，↔，∀，∨理解为缩写符号，但有时(例如在本章§3的许多场合)也把∀，∨看作是初始符号.

此外，表达式中括号的省略如通常.

读者应该清楚如何把上述非集合论的定义转化为集合论的定义，以便把一表达式和某个良定义的集合等同起来. 我们在后面根据需要适时地引入这种定义. 本书的许多定义可作类似考虑.

为了方便，象上述合取表达式$\bigwedge\{\varphi_\xi:\xi<\delta\}$和存在量化表达式$\exists\langle v_{\alpha_\xi}:\xi<\delta\rangle\psi$可以分别缩写为$\bigwedge\limits_{\xi<\delta}\varphi_\xi$和$(\exists v_{\alpha_\xi}\upharpoonright\delta)\psi$. 有时对合取表达式的合取肢的个数或量化表达式的变元的个数用序数来指标并不能增加什么信息，反而会在记号上产生不必要的复杂性，所以后面我们也用下列记号：若Φ是$\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的非空表达式集且$\Phi$的幂(基数)$|\Phi|<\kappa$，则$\bigwedge\Phi$指称$\Phi$中所有表达式的合取. 若$X\subseteq\mathrm{Var}$，$|X|<\lambda$且$\psi$是$\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的表达式，则$\exists X\psi$指称上述(5)定义的表达式.

通常我们规定$\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的$\kappa$，$\lambda$是正则基数，但这种限制不是本质的，只是一种简化. 例如，若κ是奇异基数，不妨设$\kappa=\bigcup\limits_{\eta<\delta}\gamma_\eta$使得$\delta<\kappa$，且对每一$\eta<\delta$，$\gamma_\eta<\kappa$，据后面的1.2.15，$\bigwedge\limits_{\xi<\delta}\varphi_\xi$可以看作是

$$\bigwedge_{\eta<\delta}(\bigwedge_{\xi<\gamma_\eta}\varphi_\xi)$$

的缩写. 因此一开始我们就可以用正则基数κ^+来工作. 另一方面，我们规定$\pi\leqslant\kappa$，且当λ是奇异基数时，$\rho<\lambda$；当λ是正则基数时，$\rho\leqslant\kappa$. 第3章的一些完全性定理原来只适用于$\rho=\pi=\omega$的语言. 但是经过修改就可以用于更一般的情况. 若取消对ρ和π的限制会引入许多不必要的复杂因素，就是当上述完全性定理能够扩张时

也如此. 但上述对 π,λ 的规定可以放宽, L. Henkin 在其[1961]中研究过有无穷元谓词符号、但合取和析取是有穷的带等词的语言(即 $\mathscr{L}_{\omega\omega 0\omega_1}$)的完全可公理化的系统. H. J. Keisler 在其[1960]宣布得到不带等词、有无穷长原子表达式和量化表达式, 但合取表达式有穷的语言的强完全性定理. 他在其[1963]还证明了不带等词的无穷语言 $\mathscr{L}_{\omega\lambda 0\pi}$(没有函数符号)和 $\mathscr{L}_{\omega\lambda\rho\pi}$的完全性定理.

当 $\rho=\pi=\omega$, 即原子表达式的长度有穷时, 只须假设 $\lambda\leqslant\kappa$, 因为据后面的 1.3.2, 一公式的自由变元集(参见 1.1.3)的基数总是 $<\kappa$. 删去 $0<\lambda<\omega$ 的情况显然是非本质的, 因为这些情况已被 $\lambda=\omega$ 所包括. 今后当 $\rho=\pi=\omega$ 时, 我们用 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$来代替 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$. 显然, $\mathscr{L}_{\omega\omega}$就是有穷逻辑的语言. 此外, 我们把有穷命题逻辑的语言记为 $\mathscr{L}_{\omega}$, 把合取式的基数限制于 κ 的无穷扩张记为 $\mathscr{L}_{\kappa}$. 这样, $\mathscr{L}_{\kappa}$有一适当的(通常是 κ 个)初始命题变元的聚合和否定联结词$\neg$, 无穷合取联结词 $\bigwedge$, 其形成规则如 1.1.2(3)—(4).

1.1.3 定义

(1) 项 $t\in \mathrm{Term}(\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi})$的**自由变元集** $\mathrm{Fv}(t)$递归定义如下:

① 若 $t=x$ 是个体变元, 则 $\mathrm{Fv}(t)=\{x\}$,

② 若 $t=c$ 是个体常元, 则 $\mathrm{Fv}(t)=\varnothing$,

③ 若 $t=F(t_\xi:\xi<\zeta)$, 其中 F 是 ζ 元函数符号, $\langle t_\xi:\xi<\zeta\rangle$是项的序列, 则 $\mathrm{Fv}(F(t_\xi:\xi<\zeta))=\bigcup\limits_{\xi<\zeta}\mathrm{Fv}(t_\xi)$.

(2) $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的表达式 φ 的**自由变元集** $\mathrm{Fv}(\varphi)$递归定义如下:

① 若 φ是 $t\equiv t_1$, 则 $\mathrm{Fv}(\varphi)=\mathrm{Fv}(t)\cup\mathrm{Fv}(t_1)$,

② 若 φ是 $R(t_\xi:\xi<\eta)$, 其中 R 是 η 元关系符号, $\langle t_\xi:\xi<\eta\rangle$是项的序列, 则 $\mathrm{Fv}(\varphi)=\bigcup\limits_{\xi<\eta}\mathrm{Fv}(t_\xi)$,

③ 若 $\varphi=\neg\psi$, 则 $\mathrm{Fv}(\varphi)=\mathrm{Fv}(\psi)$,

④ 若 $\varphi=\bigwedge\limits_{\xi<\delta}\varphi_\xi$, 则 $\mathrm{Fv}(\varphi)=\bigcup\limits_{\xi<\delta}\mathrm{Fv}(\varphi_\xi)$,

⑤ 若 $\varphi=\exists X\psi$, 则 $\mathrm{Fv}(\varphi)=\mathrm{Fv}(\psi)-X$.

(3) $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的表达式 φ 的**约束变元集** $\mathrm{Bv}(\varphi)$递归定义如下:

① 若 φ 是 $t\equiv t_1$ 或是 $R(t_\xi:\xi<\eta)$，则 $\mathrm{Bv}(\varphi)=\varnothing$，

② 若 $\varphi=\neg\psi$，则 $\mathrm{Bv}(\varphi)=\mathrm{Bv}(\psi)$，

③ 若 $\varphi=\bigwedge_{\xi<\delta}\varphi_\xi$，则 $\mathrm{Bv}(\varphi)=\bigcup_{\xi<\delta}\mathrm{Bv}(\varphi_\xi)$，

④ 若 $\varphi=\exists X\psi$，则 $\mathrm{Bv}(\varphi)=\mathrm{Bv}(\psi)\cup X$.

我们称不含自由变元的表达式为**闭表达式**.

注意：有可能存在含有"太多"的自由变元的表达式. 例如，$\bigwedge_{n<\omega}R(x_n)$ 可以是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 的表达式. 显然它有 $\aleph_0$ 个自由变元. 但在 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 中，一次只能量化有穷多个变元，所以存在对量化不封闭的表达式，为此我们还需要以下定义.

1.1.4 定义 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的有 $<\lambda$ 个自由变元的表达式称为 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$-**公式**. 我们用 $\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi})$ 指称 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的所有公式的集合(类). 对每一基数 $\delta<\kappa$，$\mathrm{Form}_\delta(\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi})$ 指称 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的所有自由变元 $\leqslant\delta$ 的公式的集合. 用 $\mathrm{Sent}(\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi})$ 指称 $\mathrm{Form}_0(\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi})$ 且称它的元素为**句子**(或**闭公式**). 由 1.1.2(1)—(2) 定义的公式称为**原子公式**.

本书以后，除非另加说明，固定用 $\varphi,\psi,\theta,\sigma,\cdots$(带或不带指标)来指称 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的公式，而且常用 σ 指称句子；用 $\Phi,\Psi,\Sigma,\Gamma,\Xi,\cdots$(带或不带指标)指称 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的公式集，而且常用 Σ 指称句子集.

1.1.4 也称为 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的**公式性质**，通常是指 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的每一公式有 $<\lambda$ 个自由变元. **注意**：$\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi})$ 对 $\bigwedge$ 不封闭. 例如，设 $\varphi_0(x_0),\cdots,\varphi_n(x_n),\cdots\in\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\omega_1\omega})$ 使得 $x_0,\cdots,x_n,\cdots$ 分别是 $\varphi_0,\cdots,\varphi_n,\cdots$ 的自由变元且对 $i\neq j$，$x_i\neq x_j$，则 $\bigwedge_{n<\omega}\varphi_n(x_n)$ 是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 的表达式但它不属于 $\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\omega_1\omega})$，因为它的自由变元有无穷多个.

对应 1.1.2，我们有关于表达式的"归纳原则"：

1.1.5 引理(归纳原则) 令 $\mathrm{E}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 指称 1.1.2 定义的所有表达式的类. 令 $\mathscr{X}$ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的符号的(无穷)序列的集合(类)使得

(1) $t\equiv t_1\in\mathscr{X}$， 对所有项 t,t_1，

(2) 对所有 η 元关系符号 $R(0<\eta<\pi)$ 和项的序列 $\langle t_\xi:\xi<\eta\rangle$，

$$R(t_\xi:\xi<\eta)\in\mathscr{X},$$

(3) $\varphi\in\mathscr{X}\Rightarrow\neg\varphi\in\mathscr{X}$,

(4) $\Phi\subseteq\mathscr{X}$ 且 $|\Phi|<\kappa\Rightarrow\bigwedge\Phi\in\mathscr{X}$,

(5) $\varphi\in\mathscr{X},X\subseteq\mathrm{Var}$ 且 $|X|<\lambda\Rightarrow\exists X\varphi\in\mathscr{X}$.

则
$$\mathscr{X}\supseteq\mathrm{E}_{\kappa\lambda\rho\pi}.$$

证明:假设 $\varphi_0,\cdots,\varphi_n$ 是任意 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$-公式 ψ 的一个形成. 若 $n=0$,则 φ_n 是原子表达式,所以据(1)和(2),$\varphi_n\in\mathscr{X}$. 若对某个 $m<n$,$\varphi_n=\neg\psi_m$,则据归纳假设,$\psi_m\in\mathscr{X}$,再据(3),$\varphi_n\in\mathscr{X}$. 若对某些 $m_0,m_1,\cdots,m_\xi,\cdots<n$,其中 $\xi<\delta,\delta<\kappa,\varphi_n=\bigwedge\limits_{\xi<\delta}\varphi_{m_\xi}$,则据归纳假设,对每一 ξ,$\varphi_{m_\xi}\in\mathscr{X}$,再据(4),$\varphi_n\in\mathscr{X}$. 若对某个 $m<n,X\subseteq\mathrm{Var},|X|<\lambda,\varphi_n=\exists X\varphi_m$,则据归纳假设,$\varphi_m\in\mathscr{X}$,再据(5),$\varphi_n\in\mathscr{X}$. 因此我们有 $\mathscr{X}\supseteq\mathrm{E}_{\kappa\lambda\rho\pi}$. □

对公式类也有上述归纳原则.象"施归纳于公式的复杂度来证明性质 P"这样的表述用于指称上述归纳原则的运用.

本书我们还要考虑与 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$相关的几类语言.

第一类记为 $\mathscr{L}_{\infty\lambda\rho\pi}$,其中$\infty$表示 $\bigwedge$ 可以在任意大的公式集上运算. 它的公式类定义如下:

$$\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\infty\lambda\rho\pi})=\bigcup\{\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi});\kappa\geqslant\lambda,\kappa\in\mathbf{CN}_\mathrm{I}\},$$

其中 $\mathbf{CN}_\mathrm{I}$ 是所有无穷基数的类. 因此 $\mathscr{L}_{\infty\lambda\rho\pi}$有任意长的合取式,但只有长度$<\lambda$ 的量化式,它的公式也只有$<\lambda$ 个自由变元. 对这类语言,本书考虑较多的是语言 $\mathscr{L}_{\infty\omega}=\mathscr{L}_{\infty\omega\omega\omega}$,特别是它的某些重要的片段.

第二类语言记为 $\mathscr{L}_{\infty\infty\rho\pi}$,它的公式类定义如下:

$$\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\infty\infty\rho\pi})=\bigcup\{\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\infty\lambda\rho\pi}):\lambda\in\mathbf{CN}_\mathrm{I}\}.$$

因此 $\mathscr{L}_{\infty\infty\rho\pi}$有任意长的量化式.

类似地我们可以定义 $\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\infty\infty\infty\pi})$,$\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\infty\infty\infty\infty})$等.

注意:上述条件均可以定义集合论 ZFC 的一个类.

2. 结　构

下面我们给出 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的**解释**(语义)的一般性定义,并称这样的

解释为结构：

1.1.6 定义 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的**结构**是下列形式的序对

$$\mathfrak{A}=\langle A,H\rangle,$$

其中：(1) A 是一非空集合，称为 $\mathfrak{A}$ 的**个体域**，

(2) H 是定义域为 $\mathrm{Rel}_{\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}}\cup\mathrm{Fnt}_{\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}}\cup\mathrm{Ind}_{\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}}$的映射使得：

① 对每一 η 元 $R\in\mathrm{Rel}_{\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}}$，$0<\eta<\pi$，$H(R)\subseteq A^{\eta}$，

② 对每一 ζ 元 $F\in\mathrm{Fnt}_{\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}}$，$0<\zeta<\rho$，$H(F):A^{\zeta}\to A$，

③ 对每一 $c\in\mathrm{Ind}_{\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}}$，$H(c)\in A$.

本书以后，除非另加说明，固定用 $\mathfrak{A},\mathfrak{B},\mathfrak{C},\mathfrak{D},\cdots$（带或不带指标）来指称 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的结构. 为了简化繁琐的记号，我们延用 $A,B,C,D,\cdots$来分别指称 $\mathfrak{A},\mathfrak{B},\mathfrak{C},\mathfrak{D},\cdots$的个体域. 对每一非逻辑符号 S，$S^{\mathfrak{A}}$ 指称 $H(S)$（称 $S^{\mathfrak{A}}$ 是 $\mathfrak{A}$ 对 S 的**解释**）. 在不致混淆之处，我们甚至用 S 直接表示 $S^{\mathfrak{A}}$. 这样上述 $\mathfrak{A}$ 可以表示为

$$\mathfrak{A}=\langle A,R,F,c\rangle_{R\in\mathrm{Rel}_{\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}},\,F\in\mathrm{Fnt}_{\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}},\,c\in\mathrm{Ind}_{\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}}}.$$

下面我们来定义可满足概念. 为此先引入一些记号. 令 $\mathfrak{A}$ 是结构，$X,Y\subseteq\mathrm{Var}$（不必然不相交），$f\in A^{X}$ 和 $g\in A^{Y}$ 分别是映射（称为**赋值映射**），则赋值映射 $f*g\in A^{X\cup Y}$定义如下：

$$(f*g)(z)=\begin{cases}f(z), & 若\ z\in X-Y;\\ g(z), & 若\ z\in Y.\end{cases}$$

注意：直观上说，$f*g$ 就是在 Y 上是 g，在 $X-Y$ 上是 f 的映射. 所以若 $X\cap Y=\varnothing$，则 $f*g=f\cup g$；若 $X\subseteq Y$，则 $f*g=g$.

1.1.7 定义 项 t 在 $\mathfrak{A}$ 中相对赋值映射 $f\in A^{\mathrm{Var}}$的真值 $t^{\mathfrak{A}}[f]$ 递归定义如下：

(1) 若 $t=x\in\mathrm{Var}$，则 $t^{\mathfrak{A}}[f]=f(x)$，

(2) 若 $t=c\in\mathrm{Ind}$，则 $t^{\mathfrak{A}}[f]=c^{\mathfrak{A}}$，

(3) 若 $t=F(t_{\xi}:\xi<\zeta)$，则 $t^{\mathfrak{A}}[f]=F^{\mathfrak{A}}(t_{\xi}^{\mathfrak{A}}[f]:\xi<\zeta)$.

1.1.8 定义（可满足关系） 公式 φ 的**赋值映射集** $\varphi^{\mathfrak{A}}\subseteq A^{\mathrm{Var}}$递归定义如下：

(1) φ是原子公式：

① 若 φ是 $t\equiv t_1$，则

$$f\in\varphi^{\mathfrak{A}}\Leftrightarrow t^{\mathfrak{A}}[f]=t_1^{\mathfrak{A}}[f].$$

② 若 φ是 $R(t_\xi:\xi<\eta)$，则

$$f\in\varphi^{\mathfrak{A}}\Leftrightarrow\langle t_\xi^{\mathfrak{A}}[f]:\xi<\eta\rangle\in R^{\mathfrak{A}}.$$

(2) φ是$\neg\psi$，则

$$f\in\varphi^{\mathfrak{A}}\Leftrightarrow f\notin\psi^{\mathfrak{A}}.$$

(3) φ是$\bigwedge\Psi$，则

$$f\in\varphi^{\mathfrak{A}}\Leftrightarrow \text{对每一 }\psi\in\Psi, f\in\psi^{\mathfrak{A}}.$$

(4) φ是$\exists X\psi$，则

$$f\in\varphi^{\mathfrak{A}}\Leftrightarrow \text{存在 } g\in A^X \text{ 使得 } f*g\in\psi^{\mathfrak{A}}.$$

说明：(Ⅰ) 当 $\varphi\in\mathrm{Form}_1(\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi})$时，我们也可把 $\varphi^{\mathfrak{A}}$ 简写为

$$\varphi^{\mathfrak{A}}=\{a\in A:\mathfrak{A}\models\varphi[a]\}.$$

(Ⅱ) 代替 $f\in\varphi^{\mathfrak{A}}$，我们用通常的记号 $\mathfrak{A}\models\varphi[f]$（**$\varphi$ 在 $\mathfrak{A}$ 中相对赋值映射 f 的真值**）且称 f 在 $\mathfrak{A}$ 中满足 φ. 代替 $f\notin\varphi^{\mathfrak{A}}$，我们用通常的记号 $\mathfrak{A}\not\models\varphi[f]$且称 f 在 $\mathfrak{A}$ 中不满足 φ；

(Ⅲ) $\mathfrak{A}\models\varphi[f]$实际上只依赖 φ中自由出现的变元. 令 $f,g\in A^{\mathrm{Var}}$使得 $f\upharpoonright\mathrm{Fv}(\varphi)=g\upharpoonright\mathrm{Fv}(\varphi)$，则

$$\mathfrak{A}\models\varphi[f]\Leftrightarrow\mathfrak{A}\models\varphi[g].$$

这说明我们使用下列记号是有意义的：

$$\mathfrak{A}\models\varphi[\langle a_\xi:\xi<\delta\rangle]\text{或 }\mathfrak{A}\models\varphi[h],$$

其中对 $\xi<\delta, a_\xi\in A$ 且 $\mathrm{Fv}(\varphi)=\{v_{\alpha_\xi}:\xi<\delta\}, h\in A^{\mathrm{Fv}(\varphi)}$. 用上述记号可以方便代替更完全的记号：$\mathfrak{A}\models\varphi[f]$，其中

$$f(x)=\begin{cases}a_\xi(\text{或 } h(x)), \text{若对某个 } \xi<\delta, x=v_{\alpha_\xi}(\text{或 } x\in\mathrm{Fv}(\varphi));\\ \text{任意 } a\in A,\ \text{若对所有 } \xi<\delta, x\neq v_{\alpha_\xi}(\text{或 } x\notin\mathrm{Fv}(\varphi)).\end{cases}$$

若 φ只含有穷多个自由变元，比方说，$x_1,\cdots,x_n$，则我们可以用通常的记号 $\mathfrak{A}\models\varphi[a_1,\cdots,a_n]$甚至 $\mathfrak{A}\models\varphi[\vec{a}_n]$来表示 $\mathfrak{A}\models\varphi[f]$，其中 $a_i=f(x_i), i=1,\cdots,n$. 若 $\mathrm{Fv}(\varphi)=\{x_\beta:\beta<\alpha\}$，则我们也用 $\mathfrak{A}\models\varphi[\vec{a}]$

来表示 $\mathfrak{A}\models\varphi[f]$，其中 $\vec{a}=\langle a_\beta:\beta<\alpha\rangle$ 且对每一 β，$f(x_\beta)=a_\beta$.

由(Ⅲ)可得：

(Ⅳ) 若 σ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的句子且存在 $f\in A^{\mathrm{Var}}$ 使得 $\mathfrak{A}\models\sigma[f]$，则对所有 $g\in A^{\mathrm{Var}}$，$\mathfrak{A}\models\sigma[g]$.

这个结果也可以表述如下：若 σ 是上述句子，则

① 对所有 $f\in A^{\mathrm{Var}}$，$\mathfrak{A}\models\sigma[f]$，或

② 不存在 $f\in A^{\mathrm{Var}}$，$\mathfrak{A}\models\sigma[f]$.

1.1.9 定义 在上述①的情况下，我们称 **σ 在 $\mathfrak{A}$ 中真**（或 **σ 在 $\mathfrak{A}$ 中成立**），记作 $\mathfrak{A}\models\sigma$；在②的情况下，我们称 **$\sigma$ 在 $\mathfrak{A}$ 中假**（或 **σ 在 $\mathfrak{A}$ 中不成立**），记作 $\mathfrak{A}\not\models\sigma$.

1.1.10 定义 若 σ 在语言 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的结构 $\mathfrak{A}$ 中真，则称 $\mathfrak{A}$ 是 σ 的**模型**，记作 $\mathfrak{A}\in\mathrm{Mod}_{\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}}(\sigma)$ 或简记为 $\mathfrak{A}\in\mathrm{Mod}(\sigma)$. 若 Σ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的句子集，且对每一 $\sigma\in\Sigma$，$\mathfrak{A}\in\mathrm{Mod}_{\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}}(\sigma)$，则称 $\mathfrak{A}$ 是 Σ 的模型，记为 $\mathfrak{A}\in\mathrm{Mod}_{\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}}(\Sigma)$，简记为 $\mathfrak{A}\in\mathrm{Mod}(\Sigma)$.

以后我们用 $\mathrm{Sm}(\mathfrak{A})$ 指称 $\mathfrak{A}$ 的相似类型. 若 $\Phi\subseteq\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi})$，则 $\mathrm{Sm}(\Phi)$ 指称 Φ 的公式中出现的所有非逻辑符号的集合所规定的相似类型. 若 $\Phi=\{\varphi\}$，则用 $\mathrm{Sm}(\varphi)$ 来代替 $\mathrm{Sm}(\{\varphi\})$. 若 $\mathrm{Sm}(\Phi)\subseteq\mathrm{Sm}(\mathfrak{A})$，则 $\mathfrak{A}\models\Phi$ 有下列意义：对每一 $f\in A^{\mathrm{Var}}$ 和 $\varphi\in\Phi$，

$$\mathfrak{A}\models\varphi[f].$$

1.1.11 定义 若对每一 $\mathfrak{A}$ 使得 $\mathrm{Sm}(\mathfrak{A})\supseteq\mathrm{Sm}(\varphi)$，有 $\mathfrak{A}\models\varphi$，则我们称 φ 是**有效公式或逻辑有效公式**，记作 $\models\varphi$.

$\mathrm{Val}(\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi})$ 用来指称 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的所有有效公式的集合.

1.1.12 定义 令 $\Phi\cup\{\varphi\}\subseteq\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi})$，我们称 φ 是 Φ（相对 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$）的**逻辑后承（逻辑蕴涵、或语义蕴涵）**，记作 $\Phi\models\varphi$，$\Leftrightarrow$ 对每一 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$-结构 $\mathfrak{A}$ 使 $\mathrm{Sm}(\Phi\cup\{\varphi\})\subseteq\mathrm{Sm}(\mathfrak{A})$，若 $\mathfrak{A}\models\Phi$，则 $\mathfrak{A}\models\varphi$.

易证对每一公式 φ，$\models\varphi\Leftrightarrow\varnothing\models\varphi$.

1.1.13 定义 令 Σ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的句子集，称 **Σ（语义）一致** $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Mod}(\Sigma)\neq\varnothing$；否则称 **$\Sigma$ 不一致**.

1.1.14 引理 若 Σ 不一致，则对任意句子 σ，$\Sigma\models\sigma$. □

1.1.15 定义 称 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的句子集 Σ 是**完全句子集** $\Leftrightarrow$ 对 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的所有句子 σ， $\Sigma\models\sigma$ 或 $\Sigma\models\neg\sigma$.

1.1.16 定义 令 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的结构，称 $\mathrm{Th}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\mathfrak{A})$是 $\mathfrak{A}$ 的 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$-**理论** $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Th}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\mathfrak{A})=\{\sigma\in\mathrm{Sent}(\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}):\mathfrak{A}\models\varphi\}$.

称句子集 Σ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$-**理论** $\Leftrightarrow$ $(\Sigma\models\sigma\Rightarrow\sigma\in\Sigma)$.

称句子集 Σ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$-**完全理论** $\Leftrightarrow$ Σ 有模型且对 Σ 的任意模型 $\mathfrak{A},\mathfrak{B}$， $\mathrm{Th}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\mathfrak{A})=\mathrm{Th}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\mathfrak{B})$.

1.1.17 定义 令 $\mathfrak{A},\mathfrak{B}$ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$-结构，称 $\mathfrak{A}$ $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$-**初等等价** $\mathfrak{B}$，记作 $\mathfrak{A}\equiv_{\kappa\lambda\rho\pi}\mathfrak{B}$，$\Leftrightarrow$ $\mathrm{Th}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\mathfrak{A})=\mathrm{Th}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\mathfrak{B})$.

1.1.18 定义 (1) $\mathscr{L}'_{\kappa\lambda\rho\pi}$的结构 $\mathfrak{A}$ 对 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}\subseteq\mathscr{L}'_{\kappa\lambda\rho\pi}$的**归约(结构)**，用 $\mathfrak{A}\upharpoonright\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$指称(简记为 $\mathfrak{A}\upharpoonright\mathscr{L}$)，定义如下：

$A=A_1$， 其中 A_1 是 $\mathfrak{A}\upharpoonright\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的个体域，

$S^{\mathfrak{A}\upharpoonright\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}}=S^{\mathfrak{A}}$， 对每一 $S\in\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$.

(2) $\mathfrak{A}$ 是 $\mathfrak{B}$ 的**膨胀(结构)**

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{Sm}(\mathfrak{B})\subseteq\mathrm{Sm}(\mathfrak{A})$且 $\mathfrak{A}\upharpoonright\mathrm{Sm}(\mathfrak{B})=\mathfrak{B}$.

(3) 特别地，若 $\mathrm{Sm}(\mathfrak{A})\subseteq\mathrm{Sm}(\mathfrak{B})\cup C$，$C$ 是新个体常元符号集，且存在映射 $f\in B^C$ 使得 $\mathfrak{A}=(\mathfrak{B},f(c))_{c\in C}$(即 $c^{\mathfrak{A}}=f(c)$)，则称 $\mathfrak{A}$ 为 $\mathfrak{B}$ 的**简单膨胀**.

1.1.19 定义 令 $\mathfrak{A},\mathfrak{B}$ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的结构，称 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathfrak{B}$ 的**子结构**，记作 $\mathfrak{A}\subseteq\mathfrak{B}$，$\Leftrightarrow$ 下列条件满足：

$A\subseteq B$，

$R^{\mathfrak{A}}=R^{\mathfrak{B}}\cap A^{\eta}$， 对每一 η 元关系符号 $R\in\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$，

$F^{\mathfrak{A}}=F^{\mathfrak{B}}\upharpoonright A^{\zeta}$， 对每一 ζ 元函数符号 $F\in\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$，

$c^{\mathfrak{A}}=c^{\mathfrak{B}}$， 对每一个体常元符号 $c\in\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$.

说明：在 $\mathrm{Sm}(\mathfrak{A})\subseteq\mathrm{Sm}(\mathfrak{B})$的情况下，我们也用 $\mathfrak{A}\subseteq\mathfrak{B}$ 来指称

$$\mathfrak{A}\subseteq\mathfrak{B}\upharpoonright\mathrm{Sm}(\mathfrak{A}).$$

1.1.20 定义 令 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的结构，$X\subseteq A$ 使得

(1) $F^{\mathfrak{A}}(x_\xi:\xi<\zeta)\in X$，　对每一 $\zeta(0<\zeta<\rho)$ 元函数符号 $F\in\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 和 X 中每一 $\langle x_\xi:\xi<\zeta\rangle$，

(2) $c^{\mathfrak{A}}\in X$，　对每一个体常元符号 $c\in\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$.

$\mathfrak{A}$ **对 X 的限制(结构)**，记作 $\mathfrak{A}\upharpoonright X$，定义如下：

$A_1=X$，　其中 A_1 是 $\mathfrak{A}\upharpoonright X$ 的个体域，

$R^{\mathfrak{A}\upharpoonright X}=R^{\mathfrak{A}}\cap X^\eta$，　对每一 η 元关系符号 $R\in\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$，

$F^{\mathfrak{A}\upharpoonright X}=F^{\mathfrak{A}}\upharpoonright X^\zeta$，　对每一 ζ 元函数符号 $F\in\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$，

$c^{\mathfrak{A}\upharpoonright X}=c^{\mathfrak{A}}$，　对每一个体常元符号 $c\in\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$.

1.1.21 引理　对满足上述(1)和(2)的每一 $X\subseteq A$，

$$\mathfrak{A}\upharpoonright X\subseteq\mathfrak{A}.\ \square$$

说明：若 $\mathscr{L}'_{\kappa\lambda\rho\pi}\subseteq\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 且 $X\subseteq A$ 满足 1.1.20 的(1)和(2)，则

$$(\mathfrak{A}\upharpoonright X)\upharpoonright\mathscr{L}'_{\kappa\lambda\rho\pi}=(\mathfrak{A}\upharpoonright\mathscr{L}'_{\kappa\lambda\rho\pi})\upharpoonright X.$$

所以在 1.1.18 和 1.1.20 两种意义上使用"$\upharpoonright$"不会引起混乱.

1.1.22 定义　令 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 是只有关系符号的语言，$\mathfrak{A}$，$\mathfrak{B}$ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的结构使得 $A\cap B=\varnothing$，$\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 的(**简单**)**基数和**(也称为**直和**)，记作 $\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{B}$，是如下定义的结构 $\mathfrak{C}$：

$C=A\cup B$，

$R^{\mathfrak{C}}=R^{\mathfrak{A}}\cup R^{\mathfrak{B}}$，　对每一关系符号 $R\in\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$.

1.1.23 定义　令 $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{B}$ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的结构，$\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 的**直积**(direct product)，记为 $\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}$，是定义如下的结构 $\mathfrak{C}$：其中 R 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的任意 η 元关系符号，F 是任意 ζ 元函数符号，c 是任意个体常元符号，

$$C=A\times B,\quad R^{\mathfrak{C}}=R^{\mathfrak{A}}\times R^{\mathfrak{B}},\quad c^{\mathfrak{C}}=\langle c^{\mathfrak{A}},c^{\mathfrak{B}}\rangle,$$

且对任意 $\{x_\xi:\ \xi<\zeta\}\subseteq A$ 和 $\{y_\xi:\ \xi<\zeta\}\subseteq B$，

$$F^{\mathfrak{C}}(\langle x_\xi,y_\xi\rangle:\xi<\zeta)=\langle F^{\mathfrak{A}}(x_\xi:\xi<\zeta),F^{\mathfrak{B}}(y_\xi:\xi<\zeta)\rangle.$$

类似地，我们用 $\prod_{i\in I}\mathfrak{A}_i$ 指称 $\{\mathfrak{A}_i:i\in I\}$ 的直积，其个体域 $\prod_{i\in I}A_i$ 是 $\{A_i:i\in I\}$ 的笛卡尔积(参见 2.1.4)，其关系、函数和个体常元符号的解释是上述解释的直接推广.

注意：这里的直积概念是对 C. C. Chang 和 H. J. Keisler 在他

们的[1973]中的直积概念的概括.

1.1.24 定义(全基数和) (1) 任给不含函数符号的语言 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$,令 $\mathscr{L}'_{\kappa\lambda\rho\pi}$由下列符号组成:

① 对 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的每一符号 S,$\mathscr{L}'_{\kappa\lambda\rho\pi}$包含 S_1,S_2,其中 S_1,S_2 是和 S 同类同元数的符号,

② 两个新一元谓词符号 P_1,P_2.

(2) 给定 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的两个结构 $\mathfrak{A},\mathfrak{B}$ 使得 $A\cap B=\varnothing$,则 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 的**全基数和**,记作 $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$,是 $\mathscr{L}'_{\kappa\lambda\rho\pi}$的如下定义的结构 $\mathfrak{C}$:

$C=A\cup B$,

$S_1^{\mathfrak{C}}=S^{\mathfrak{A}}$, $S_2^{\mathfrak{C}}=S^{\mathfrak{B}}$, 对每一符号 $S\in\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$,

$P_1^{\mathfrak{C}}=A$, $P_2^{\mathfrak{C}}=B$.

说明:我们用 $\mathscr{L}^i_{\kappa\lambda\rho\pi}$表示$\{S_i:S\in\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}\}$,$i=1,2$. 显然,可以把上述定义扩张到 $\mathscr{L}^1_{\kappa\lambda\rho\pi}$和 $\mathscr{L}^2_{\kappa\lambda\rho\pi}$是任意不包含函数符号且不相交的语言. 如此对应的运算称为**扩张的全基数和**,记作 $\mathfrak{A}\tilde{+}\mathfrak{B}$. 此外,我们注意到简单基数和与直积能用一种显然的方式在全基数和中得到定义. 这些关于结构的和与结构的积的概念是 S. Feferman 和 R. Vaught 在其[1959]中讨论过的广义积概念的特例.

二、相对 KPU 系统的语法和语义

前面我们考虑的关于语法和语义的基本概念是以集合论 **ZF** 系统为元理论而建立起来的. 但在这样的元理论上建立的无穷逻辑在许多重要的方面很受限制(关于这点我们以后要详细讨论),所以我们还要以集合论 **KPU** 系统为元理论来考虑无穷逻辑,因此还须在 **KPU** 系统中把语法和语义形式化,即把"语言"、"结构"、"公式"等非形式化的逻辑概念形式化. 本小节我们在 **KPU** 系统中工作. 因此希望对 **KPU** 不了解的读者先读本书的第 0 章以获得关于 **KPU** 的基本概念和成果.

假设在我们的元语言 $\mathscr{L}^* = \mathscr{L} \cup \{\in, \cdots\}$ 的初始谓词中还有：

Relation-symbol(x),

Funtion-symbol(x),

Constant-symbol(x),

Variable(x);

在 $\mathscr{L}^*$ 的函数符号中还有两个一元函数符号：V，#.

我们用 $R, R_1, \cdots$ 表示满足 Relation-symbol(x) 的 x，用 $F, F_1, \cdots$ 表示满足 Funtion-symbol(x) 的 x，用 $c, c_1, d, \cdots$ 表示满足 Constant-symbol(x) 的 x. 我们还假设在元语言 $\mathscr{L}^*$ 的常元符号中有逻辑常元符号：$\neg, \wedge, \vee, \forall, \exists, \equiv$.

上述 12 个符号可以是 $\mathscr{L}^*$ 的一部分，或者如第 0 章的 § 3 那样引入 **KPU** 的有定义的符号. 在实际运用时，我们几乎总是采用后者. 下面是关于语法的公理：

公理 1 变元类、函数符号类、关系符号类和常元类都互不相交，而且上述 6 个逻辑常元符号不在任何这样的一个类中.

公理 2 $\alpha \neq \beta \Rightarrow \mathrm{V}(\alpha) \neq \mathrm{V}(\beta)$,

Variable$(x) \Leftrightarrow \exists \alpha (x = \mathrm{V}(\alpha))$.

公理 3 若 x 是一关系或函数符号，则 $\#(x)$ 是一正自然数.

注意：通常我们把 $\mathrm{V}(\alpha), \mathrm{V}(\beta), \cdots$ 写作 $v_\alpha, v_\beta, \cdots$；把 $\#(x)$ 称为 x 的**元数**.

集合 $\mathscr{L}$ 称为**语言** $\Leftrightarrow$ $\mathscr{L}$ 是关系、函数和常元符号的集合. 下面我们在 TC(x) 上递归定义谓词："t 是项"和"t 是 $\mathscr{L}$-项"：

1. 1. 25 定义 t 是($\mathscr{L}$-)**项** $\Leftrightarrow$ t 是变元，或 t 是($\mathscr{L}$-)常元符号，或 $t = \langle F, \vec{y} \rangle$，其中 F 是($\mathscr{L}$-)函数符号，$\vec{y} = \langle y_1, \cdots, y_{\#(F)} \rangle$，且其中每一 y_i 是($\mathscr{L}$-)项.

说明：这两个定义("t 是项"和"t 是 $\mathscr{L}$-项")是 0. 4. 5 所允许的递归定义类型，所以它们定义了 Δ-谓词. 在此唯一麻烦是验证谓词 $P(\vec{y}, n) \Leftrightarrow$ "$\vec{y}$ 是长度为 n 的序列"(见第 0 章的表 1)和谓词 $Q(\vec{y}, n, x, i) \Leftrightarrow$ "$P(\vec{y}, n)$ 且 $1 \leqslant i \leqslant n$ 且 x 是序列 $\vec{y}$ 中第 i 个项"都

是Δ-谓词，但这仍可以从上述 0.4.5 通过对 n 进行递归定义得到. 例如，$P(\vec{y},n) \Leftrightarrow n\geqslant 1$ 是自然数，且若 $n>1$，则存在 $z_1,z_2\in \mathrm{TC}(\vec{y})$ 使得 $\vec{y}=\langle z_1,z_2\rangle$ 且 $P(z_2,n-1)$.

1.1.26 定义 ($\mathscr{L}$-)**原子表达式**是下列形式的集合之一：

(1) $\langle\equiv,t_1,t_2\rangle$，其中 t_1,t_2 是($\mathscr{L}$-)项；记作 $t_1\equiv t_2$.

(2) $\langle R,t_1,\cdots,t_n\rangle$，其中 R 是($\mathscr{L}$-)关系符号，$\#(R)=n$，且 $t_1,\cdots,t_n$ 是($\mathscr{L}$-)项；记作 $R(t_1,\cdots,t_n)$.

1.1.27 定义 集合 φ 是($\mathscr{L}_{\omega\omega}$-)**有穷表达式** $\Leftrightarrow$

(1) φ 是($\mathscr{L}$-)原子表达式，或

(2) φ 是 $\langle\neg,\psi\rangle$ 且 ψ 是($\mathscr{L}$-)有穷表达式，或

(3) φ 是 $\langle\wedge,\{\psi,\theta\}\rangle$ 或 $\langle\vee,\{\psi,\theta\}\rangle$，其中 ψ,θ 是($\mathscr{L}$-)有穷表达式，或

(4) φ 是 $\langle\exists,v,\psi\rangle$ 或 $\langle\forall,v,\psi\rangle$，其中 v 是变元，ψ 是($\mathscr{L}$-)有穷表达式.

说明：(Ⅰ) 我们用 $\neg\psi$ 表示 $\langle\neg,\psi\rangle$，$\varphi\wedge\psi$ 表示 $\langle\wedge,\{\varphi,\psi\}\rangle$，$\exists v\psi$ 表示 $\langle\exists,v,\psi\rangle$；对 $\vee$ 和 $\forall$ 也类似处理. 如通常引入 $\rightarrow,\leftrightarrow$. 易证上述所有谓词都是Δ-谓词，其中最后一个又是据 0.4.5.

(Ⅱ) 为了简单，以后在不致混淆之处，我们既用 $\varphi,\psi,\cdots$ 表示元语言 $\mathscr{L}^*$ 中的表达式，也用它们表示我们正在研究的某些形式化对象语言的表达式. 希望读者能注意到这一点.

(Ⅲ) $\mathscr{L}$ 中的符号可以是始元，但我们把表达式解释为集合，把 $\wedge,\exists$ 等看作象自然数集那样固定的集合. 我们还可以在 **ZF** 的减弱系统或 **KP** 中表述上述几个集合论形式的公理和定义，请参见 P. H. G. Aczel 的[1973].

1.1.28 定义 **无穷公理**是下列公理：

$$\exists\alpha\, \mathrm{Lim}(\alpha)$$

其中 $\quad \mathrm{Lim}(\alpha)=\mathrm{Tran}(\alpha)\wedge\forall\beta\in\alpha\,\mathrm{Tran}(\beta)\wedge\alpha\neq\varnothing$

$$\wedge\forall\beta\in\alpha\,\exists\gamma\in\alpha(\gamma=\beta\cup\{\beta\}).$$

1.1.29 定理 若无穷公理成立，则对任何语言 $\mathscr{L}$，存在集合：

$\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\omega\omega})=\{\varphi:\varphi$ 是 $\mathscr{L}$-有穷表达式使得 φ 中只出现形如 v_n 的变元，其中 $n<\omega\}$.

证明：首先证明 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$-项的聚合

$\mathrm{Term}=\{t:t$ 是 $\mathscr{L}$ 的、只出现 v_n 的项，其中 $n<\omega\}$

是一集合. 施归纳于 n，定义

$\mathrm{Term}(0)=\{c:c$ 是 $\mathscr{L}$ 的个体常元符号$\}\cup\{\mathrm{V}(n):n<\omega\}$，

$\mathrm{Term}(n+1)=\{\langle F,t_1,\cdots,t_k\rangle:F$ 是 $\mathscr{L}$ 的 $k=\#(F)$ 元函数符号，$t_1,\cdots,t_k\in\mathrm{Term}(n)\}\cup\mathrm{Term}(n)$.

若 ω 存在，上述定义就有意义，由此下列集合也有意义：

$$\mathrm{Term}=\bigcup_{n<\omega}\mathrm{Term}(n).$$

类似地可以证明 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$的所有有穷表达式的聚合是一集合. □

1.1.30 定义 集合 φ 是($\mathscr{L}_{\infty\omega}$-)**表达式** ⇔ 下列条件之一成立：

(1) φ是有穷表达式，

(2) φ是$\neg\psi$ 且 ψ 是 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$-表达式，

(3) φ是$\langle\bigwedge,\Phi\rangle$或$\langle\bigvee,\Phi\rangle$，其中 Φ 是非空的 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$-表达式集，

(4) φ是$\exists v\psi$或$\forall v\psi$，其中 v 是变元，ψ 是 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$-表达式.

注意：据 0.4.5，上述定义也是正当的. 后面我们用 $\bigwedge\Phi$ 和 $\bigvee\Phi$分别表示$\langle\bigwedge,\Phi\rangle$和$\langle\bigvee,\Phi\rangle$.

我们假设读者能贯彻所有的语法定义(例如，**自由变元**、**约束变元**，项 t 对 φ 中一自由变元的**代换**)，但是要注意代换必须在 $\mathrm{TC}(\varphi)$上递归定义. 我们用 $\varphi(v/t)$表示用 t 代换 φ 中的 v 得到的结果. **句子**就是无自由变元的表达式. 在 TC 上递归定义 φ 的**子表达式集** $\mathrm{Sub}(\varphi)$如下：

$$\mathrm{Sub}(\varphi)=\begin{cases}\{\varphi\}, & \text{若 }\varphi\text{ 是原子表达式；}\\ \{\varphi\}\cup\mathrm{Sub}(\psi), & \text{若 }\varphi\text{ 是}\neg\psi,\exists v\psi\text{ 或}\forall v\psi\text{；}\\ \{\varphi\}\cup\bigcup_{\psi\in\Phi}\mathrm{Sub}(\psi), & \text{若 }\varphi\text{ 是}\bigwedge\Phi\text{ 或}\bigvee\Phi.\end{cases}$$

1.1.31 引理 若 φ 含有穷个自由变元，则任何 $\psi\in\mathrm{Sub}(\varphi)$也

只含有穷个自由变元．特别地，若 ψ 是某一句子的子表达式，则 ψ 只含有穷多个自由变元．□

这个引理的证明是施归纳于表达式的复杂度．据此定义，我们有下列定义：

称一 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$-表达式是 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$-**公式**

$\Leftrightarrow$ 它是 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$-表达式且只有有穷多个自由变元．

因为

$$\varphi\text{是}\mathscr{L}_{\infty\omega}\text{-公式} \Leftrightarrow |\{v: v\text{是}\varphi\text{的自由变元}\}|<\omega$$
$$\Leftrightarrow |\{\alpha: v_\alpha\text{是}\varphi\text{的自由变元}\}|<\omega,$$

且据 0.5.6，"a 是诸序数的有穷集"是 Δ-谓词，所以"$\mathscr{L}_{\infty\omega}$-公式"是一 Δ-概念．以后我们用 $\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\infty\omega})$来指称所有 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$-公式的类．

下面我们要在 **KPU** 系统中把"结构"、"满足关系"等语义概念形式化．

1.1.32 定义 语言 $\mathscr{L}$ 的**结构** $\mathfrak{A}$ 是序对 $\mathfrak{A}=\langle A,H\rangle$使得（我们用 $x^{\mathfrak{A}}$ 表示 $H(x)$）：

(1) A 是非空集，

(2) H 是定义域为 $\mathscr{L}$ 的函数，

(3) $R\in\mathscr{L}\Rightarrow R^{\mathfrak{A}}\subseteq A^{\#(R)}$，

(4) $F\in\mathscr{L}\Rightarrow F^{\mathfrak{A}}$ 是函数 $F^{\mathfrak{A}}: A^{\#(F)}\to A$，

(5) $c\in\mathscr{L}\Rightarrow c^{\mathfrak{A}}\in A$.

注意：结构 $\mathfrak{A}$ 也是 A 和 $\mathscr{L}$ 的 Δ-谓词．

称 f 是 $\mathfrak{A}$ 的**赋值(映射)** $\Leftrightarrow$ f 是函数使得 $\mathrm{Dom}(f)$是有穷变元集，$\mathrm{Ran}(f)\subseteq A$．给定 $\mathfrak{A}$ 的赋值 f 使得 t 中的变元在 $\mathrm{Dom}(f)$中，递归定义 **t 在 $\mathfrak{A}$ 中相对赋值映射 f 的真值** $t^{\mathfrak{A}}[f]$如下：

$$t^{\mathfrak{A}}[f]=\begin{cases} f(v), & \text{若 } t \text{ 是变元 } v;\\ c^{\mathfrak{A}}, & \text{若 } t \text{ 是个体常元符号 } c;\\ F^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}[f],\cdots,t_n^{\mathfrak{A}}[f]), & \text{若 } t \text{ 是 } n \text{ 元函数符号 } F.\end{cases}$$

我们下一个目标是要把"$\mathfrak{A}\models\varphi[f]$"形式化，其中 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathscr{L}$ 的结构，φ 是 $\mathscr{L}$ 的公式，f 是 $\mathrm{Fv}(\varphi)$上的赋值，$\mathrm{Fv}(\varphi)$的定义如前．为了

使这个定义符合我们已获得的递归定义形式，我们不得不采取较笨拙的方式．因为不存在由所有变元构成的集合，所以对 $\mathfrak{A}$ 不存在一个由所有赋值构成的集合．但是，存在 Σ-运算 G 使得对所有 $\mathscr{L}$，$\mathscr{L}$ 的所有结构 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$的所有公式 φ，

$$G(\mathfrak{A},\varphi)=\{f:f\text{ 是 }\mathfrak{A}\text{ 的赋值使得 }\mathrm{Dom}(f)=\mathrm{Fv}(\varphi)\}.$$

因此可以在 $\mathrm{TC}(\varphi)$上递归定义

$$\mathrm{Sat}_{\mathscr{L}}(\mathfrak{A},\varphi)=\{f\in G(\mathfrak{A},\varphi):\mathfrak{A}\models\varphi[f]\}$$

如下：其中 $\vec{t}_n$ 表示 $t_1,\cdots,t_n$，

$\mathrm{Sat}_{\mathscr{L}}(\mathfrak{A},t_1\equiv t_2)=\{f\in G(\mathfrak{A},t_1\equiv t_2):t_1^{\mathfrak{A}}[f]=t_2^{\mathfrak{A}}[f]\}$，

$\mathrm{Sat}_{\mathscr{L}}(\mathfrak{A},R(\vec{t}_n))=\{f\in G(\mathfrak{A},R(\vec{t}_n)):\langle t_1^{\mathfrak{A}}[f],\cdots,t_n^{\mathfrak{A}}[f]\rangle\in R^{\mathfrak{A}}\}$，

$\mathrm{Sat}_{\mathscr{L}}(\mathfrak{A},\neg\varphi)=\{f\in G(\mathfrak{A},\neg\varphi):f\notin\mathrm{Sat}_{\mathscr{L}}(\mathfrak{A},\varphi)\}$，

$$\mathrm{Sat}_{\mathscr{L}}(\mathfrak{A},\bigwedge\Phi)$$
$$=\{f\in G(\mathfrak{A},\bigwedge\Phi):\text{对所有 }\varphi\in\Phi,f\upharpoonright\mathrm{Fv}(\varphi)\in\mathrm{Sat}_{\mathscr{L}}(\mathfrak{A},\varphi)\},$$

$$\mathrm{Sat}_{\mathscr{L}}(\mathfrak{A},\exists v\varphi)=\begin{cases}\{f\in G(\mathfrak{A},\exists v\varphi):\text{对某个 }a\in A,\\ \quad f\cup\{\langle v,a\rangle\}\in\mathrm{Sat}_{\mathscr{L}}(\mathfrak{A},\varphi)\}, & \text{若 }v\in\mathrm{Fv}(\varphi);\\ \mathrm{Sat}_{\mathscr{L}}(\mathfrak{A},\varphi), & \text{若 }v\notin\mathrm{Fv}(\varphi).\end{cases}$$

现在我们可以定义表述“**φ 在 $\mathfrak{A}$ 中相对赋值映射 f 的真值**”的谓词“$\mathfrak{A}\models\varphi[f]$”如下：

$$\mathfrak{A}\models\varphi[f]\Leftrightarrow f\upharpoonright\mathrm{Fv}(\varphi)\in\mathrm{Sat}_{\mathscr{L}}(\mathfrak{A},\varphi).$$

对 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$的句子 σ，空函数(empty function)$0\in\mathrm{Sat}_{\mathscr{L}}(\mathfrak{A},\sigma)\Leftrightarrow\mathfrak{A}\models\sigma$．因为据 Σ-递归定义原则(0.4.3)，$\mathrm{Sat}_{\mathscr{L}}(\mathfrak{A},\varphi)$是 Σ-运算，所以“$\mathfrak{A}\models\varphi[f]$”是 $\mathfrak{A}$，φ和 f(以及隐含着的 $\mathscr{L}$)的 Δ-谓词．

注意：$\mathscr{L}$ 可以用 $\mathfrak{A}$ 来重述：$\mathscr{L}=\mathrm{Dom}(2^{\mathrm{nd}}(\mathfrak{A}))$．

如前约定，当 $f=\{\langle v_1,a_1\rangle,\cdots,\langle v_n,a_n\rangle\}$时，我们可以用 $\mathfrak{A}\models\varphi[a_1,\cdots,a_n]$，$\mathfrak{A}\models\varphi[\vec{a}_n]$，甚至 $\mathfrak{A}\models\varphi[\vec{a}]$来表示 $\mathfrak{A}\models\varphi[f]$．

练　习

1.1.33　用类似 1.1.5 那样的归纳原则证明：

(1) $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$的所有表达式都是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$的长度$\leqslant \max\{\kappa,\lambda\}$符号的(良序)序列.

(2) 若 $\kappa \geqslant \lambda$ 是正则基数,则 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$的所有表达式的长度$<\kappa$.

1.1.34 求$|\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\kappa\lambda})|$, $|\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\sigma})|$.

1.1.35 证明引理 1.1.21.

1.1.36 证明定义 1.1.25 后面说明中的谓词 Q 是 Δ-谓词.

§2 无穷语言的表达力

本节我们主要考察语言 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$的表达力,因为这些例子有许多将在后面各章节用到.

下面有许多断定不加证明,想必读者能够自己补上.

1.2.1 例 在 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$中刻画**自然数算术**的范畴性:即刻画所有同构于$\langle\omega,+,\cdot,',0\rangle$的结构类 $\mathscr{N}$,其中"+"和"·"是二元运算,"$'$"是一元后继运算,0 是个体常元.

令 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的句子 σ 是由 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$表达的、**Peano-算术**公理的所有有穷特例和下列句子的合取:

$$\forall x[\bigvee_{n<\omega}(x\equiv S^n(\overline{0})]$$

其中项 $S^n(x)$归纳定义如下:$S^0(x)=x$, $S^{n+1}(x)=(S^n(x))'$. 因此 $\mathscr{N}$ 就是 σ 的所有模型的集合.

说明:(Ⅰ) Peano-算术的归纳公理是一公理模式,它所对应的 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$-句子是

$$\bigwedge\{\forall v_0\cdots v_{n-1}[\varphi(v_0,\cdots,v_{n-1},\overline{0})\wedge\forall v_n[\varphi(v_0,\cdots,v_n)$$
$$\rightarrow\varphi(v_0,\cdots,(v_n)')]\rightarrow\forall v_n\varphi(v_0,\cdots,v_n)]:\varphi\in\bigcup_{n<\omega}\mathrm{Form}_{n+1}(\mathscr{L}_{\omega\omega})\}.$$

(Ⅱ) 自然数算术在同构意义上不能由 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$的一句子集来刻划,因为 Peano-算术不是范畴的,只有加上式才是范畴的(参见 Chang 和 Keisler 的[1973]).

1.2.2 例 在 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$中对所有**有穷集**的类 $\mathscr{F}$ 的刻划：考虑下列句子 σ：

$$\bigvee_{n<\omega}[\forall v_0\cdots v_n(\bigvee\{v_i\equiv v_j: 0\leqslant i\leqslant j\leqslant n\})],$$

则
$$\mathfrak{A}\in \mathrm{Mod}(\sigma) \Leftrightarrow |A|<\omega.$$

我们称 $\langle A,R\rangle$是非空**良序(结构)** $\Leftrightarrow$ $A\neq\varnothing$且 R 良序 A.

1.2.3 例 在 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega_1}$中对所有非空良序结构的类 $\mathscr{W}$ 的刻划：$\mathscr{W}$ 是下列句子的所有模型的类：

$$\forall x\neg R(x,x),$$
$$\forall xyz[R(x,y)\wedge R(y,z)\rightarrow R(x,z)],$$
$$\forall xy[R(x,y)\vee R(y,x)\vee x\equiv y],$$
$$(\forall v\upharpoonright\omega)\bigvee_{n<\omega}[R(v_n,v_{n+1})\vee v_n\equiv v_{n+1}].$$

1.2.4 例 在 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$中刻画**良序**概念. 在此我们考虑形如 $\mathfrak{A}=\langle A,<,\cdots\rangle$的结构，其中$<$线序 A. 我们能证明：

(1) 对每一 $\alpha<\kappa$，存在 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$的恰好有一个自由变元 v_0 的公式 $\varphi_\alpha^<(v_0)$使得对每一结构 $\mathfrak{A}$ 和每一 $a_0\in A$，

$$\mathfrak{A}\models\varphi_\alpha^<[a_0]\Leftrightarrow\langle\alpha,\in\upharpoonright\alpha\rangle\cong\langle S_{a_0},<^{\mathfrak{A}}\upharpoonright S_{a_0}\rangle,$$

其中 $S_{a_0}=\{a\in A: a<^{\mathfrak{A}}a_0\}$(即 S_{a_0}是以**序型** α 被$<$良序的、a_0 的所有$<^{\mathfrak{A}}$-前趋(predecessor)的集合).

在 α 上用超穷递归定义 $\varphi_\alpha^<(v_0)$如下(参见 D. Scott 的[1965], p. 330)：

$$\varphi_0^<(v_0)=\neg\exists v_1(v_1<v_0)\wedge\sigma,$$

$$\varphi_\alpha^<(v_0)=\forall v_1[v_1<v_0\leftrightarrow\exists v_0(v_0\equiv v_1\wedge\bigvee_{\xi<\alpha}\varphi_\xi^<(v_0))]\wedge\sigma,\quad \text{对 } \alpha>0;$$

其中 σ 是描述"$<$是线序"的句子. 对 α 施超穷归纳不难证明命题(1). $\varphi_\alpha^<(v_0)$还有如下性质：

(2) 若 $\mathfrak{A}$ 被$<^{\mathfrak{A}}$ 良序，则

$$\langle A,<^{\mathfrak{A}}\rangle\text{有序型 }\alpha\Leftrightarrow\mathfrak{A}\models\forall x\bigvee_{\xi<\alpha}\varphi_\xi^<(x)\wedge\bigwedge_{\xi<\alpha}\exists x\varphi_\xi^<(x).$$

因此：

(3) 若 $\alpha,\beta\in\mathbf{ON}$ 且 α,β 中有一个小于 κ，则

$$\langle\alpha,\in\upharpoonright\alpha\rangle\equiv_{\kappa\omega}\langle\beta,\in\upharpoonright\beta\rangle\Rightarrow\alpha=\beta.$$

(4) 若 $|A|<\kappa$，则 $\mathfrak{A}$ 被良序 $\Leftrightarrow$

$$\mathfrak{A}\models\neg\exists x\varphi_\alpha^<(x)\to\forall y\bigvee_{\xi<\alpha}\varphi_\xi^<(y),\quad \text{对所有 } \alpha<\kappa. \tag{1.1}$$

注意：存在幂 $\geqslant\kappa$ 的非良序结构 $\mathfrak{A}$ 使(1.1)成立(参见 1.2.16 和后面的 12.2.3.)

1.2.5 例 令 σ^θ 是下列描述"$<$**是相对 θ 的线序**"的句子：

$$\begin{aligned}\sigma^\theta=&\forall x[\theta(x)\to\neg(x<x)]\\&\wedge\forall xyz[\theta(x)\wedge\theta(y)\wedge\theta(z)\wedge x<y\wedge y<z\to x<z]\\&\wedge\forall xy[\theta(x)\wedge\theta(y)\wedge\neg(x\equiv y)\to x<y\vee y<x].\end{aligned}$$

φ_α^θ 归纳定义如下：

$$\varphi_0^\theta(x)=\neg\exists y[\theta(y)\wedge y<x]\wedge\sigma^\theta,$$

$$\varphi_\alpha^\theta=\forall y[(\theta(y)\vee y\equiv x)\to(y<x\leftrightarrow\bigvee_{\xi<\alpha}\varphi_\xi^\theta(y))]\wedge\sigma^\theta,\quad \alpha>0.$$

当 $\theta(x)$ 为 $x\equiv x$ 时，φ_α^θ 就是 1.2.4 的 $\varphi_\alpha^<$.

下列引理完整地描述了 φ_α^θ 的意义：

1.2.6 引理 令 κ 是无穷基数，$\mathscr{L}$ 包含二元关系符号 $<$，

(1) 若 $\theta\in\mathrm{Form}_1(\mathscr{L}_{\kappa\omega})$ 且 $\alpha<\kappa$，则 $\varphi_\alpha^\theta\in\mathrm{Form}_1(\mathscr{L}_{\kappa\omega})$.

(2) 对 $\mathscr{L}$ 的每一结构 $\mathfrak{A}$，每一 $a\in A$ 和每一序数 α，

$$\mathfrak{A}\models\varphi_\alpha^\theta[a]\Leftrightarrow <^{\mathfrak{A}}\text{ 线序 }\theta^{\mathfrak{A}}\text{ 且 }<^{\mathfrak{A}}\text{ 以序型 }\alpha\text{ 良序 }\mathrm{S}_a\cap\theta^{\mathfrak{A}};$$

其中 S_a 如例 1.2.4(1)所规定，这里 $\theta^{\mathfrak{A}}=\{a\in A:\mathfrak{A}\models\theta[a]\}$.

在证明 1.2.6 时我们要用到下列关于良序集的基本事实：

1.2.7 引理 (1) 令 $\langle A,<\rangle$ 是线序，β 是序数，若对每一 $x\in A$，$<$ 以小于 β 的序型良序 S_x，则 $<$ 以小于等于 β 的序型良序 A.

(2) 若 $\langle A,<\rangle$ 被良序，$x,y\in A$ 且 $x<y$，则 S_x 的序型严格小于 S_y 的序型.

(3) 若 $\langle A,<\rangle$ 被良序且有序型 $\geqslant\alpha$，则对每一序数 $\beta<\alpha$，存在 $x\in A$ 使得 $<$ 以序型 β 良序 S_x. □

引理 1.2.6 的证明：只须证(2). 显然，

$$\mathfrak{A}\models\sigma^{\theta}\Leftrightarrow \text{在 } A \text{ 中满足 } \theta(x) \text{ 的元素的集合被} <^{\mathfrak{A}} \text{线序}$$
$$\Leftrightarrow \theta^{\mathfrak{A}} \text{ 被} <^{\mathfrak{A}} \text{线序}.$$

剩下只须施归纳于 α 来证明 $S_a\cap\theta^{\mathfrak{A}}$ 有序型 α(因为良序集的子集仍是良序集). 当 $\alpha=0$ 时，有

$$\mathfrak{A}\models\varphi_0^{\theta}[a]\Leftrightarrow\mathfrak{A}\models\neg\exists y(\theta(y)\wedge y<z)[a]$$
$$\Leftrightarrow S_a\cap\theta^{\mathfrak{A}}=\varnothing$$
$$\Leftrightarrow S_a\cap\theta^{\mathfrak{A}} \text{ 有序型 } 0.$$

设 $\alpha>0$. 证"$\Rightarrow$"：假设 $\mathfrak{A}\models\varphi_\alpha^{\theta}[a]$. 令 $b\in S_a\cap\theta^{\mathfrak{A}}$，即 $b<^{\mathfrak{A}}a$ 且 $\mathfrak{A}\models\theta[b]$. 据 φ_α^{θ} 的定义，$\mathfrak{A}\models\bigvee_{\xi<\alpha}\varphi_\xi^{\theta}[b]$，若 ξ_b 指称最小的 $\xi<\alpha$ 使得 $\mathfrak{A}\models\varphi_\xi^{\theta}[b]$，则据归纳假设，$S_b\cap\theta^{\mathfrak{A}}$ 的序型(记作$\overline{S_a\cap\theta^{\mathfrak{A}}}$)是 $\xi_b<\alpha$，故据 1.2.7(1)，$\overline{S_a\cap\theta^{\mathfrak{A}}}\leqslant\alpha$. 设$\overline{S_a\cap\theta^{\mathfrak{A}}}=\gamma<\alpha$，据归纳假设，$\mathfrak{A}\models\varphi_\gamma^{\theta}[a]$，因此 $\mathfrak{A}\models\bigvee_{\xi<\alpha}\varphi_\xi^{\theta}[a]$，据 φ_α^{θ} 的定义，可得 $a<^{\mathfrak{A}}a$，矛盾. 因此$\overline{S_a\cap\theta^{\mathfrak{A}}}=\alpha$.

证"$\Leftarrow$"：先假设 $b\in\theta^{\mathfrak{A}}$，要证

$$b<^{\mathfrak{A}}a\Leftrightarrow\mathfrak{A}\models\bigvee_{\xi<\alpha}\varphi_\xi^{\theta}[b].$$

若 $b<^{\mathfrak{A}}a$，则 $b\in S_a\cap\theta^{\mathfrak{A}}$，据 1.2.7(2)，$\overline{S_b\cap\theta^{\mathfrak{A}}}<\overline{S_a\cap\theta^{\mathfrak{A}}}=\alpha$，因此 $\mathfrak{A}\models\bigvee_{\xi<\alpha}\varphi_\xi^{\theta}[b]$. 反之，若 $\mathfrak{A}\models\bigvee_{\xi<\alpha}\varphi_\xi^{\theta}[b]$，则令 ξ_b 是最小的 $\xi<\alpha$ 使得 $\mathfrak{A}\models\varphi_\xi^{\theta}[b]$，据归纳假设，$\overline{S_b\cap\theta^{\mathfrak{A}}}=\xi_b<\alpha$，因此 $b<^{\mathfrak{A}}a$. 假设 $b=a$，要证

$$a<^{\mathfrak{A}}a\Leftrightarrow\mathfrak{A}\models\bigvee_{\xi<\alpha}\varphi_\xi^{\theta}[a].$$

据归纳假设，上述等价关系右边蕴涵对某个 $\xi<\alpha$，$\overline{S_a\cap\theta^{\mathfrak{A}}}=\xi$，这与 $\overline{S_a\cap\theta^{\mathfrak{A}}}=\alpha$ 的假设矛盾. 因此右边是假的，而这蕴涵我们要证的等价关系成立. □

公式 φ_α^{θ} 和引理 1.2.6 所表达的性质将在后面章节用于研究 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$ 的非紧致性结果.

1.2.8 定义 令 $\kappa\in\mathbf{CN}_1$ 且 x 是集合，x 称为**幂** $<\kappa(\leqslant\kappa)$**的遗**

传集 $\Leftrightarrow |x|<\kappa(\leqslant\kappa)$且每一满足下列条件的 y 的幂$<\kappa(\leqslant\kappa)$：

存在 $n<\omega$ *和*$\in$-*链* $s_0,\cdots,s_{n-1}$*使得* $y\in s_0\in\cdots\in s_{n-1}\in x$.　(1.2)

我们用 $\mathbf{H}(\kappa)(\mathbf{H}(\kappa^+))$表示所有幂$<\kappa(\leqslant\kappa)$的遗传集的类(*参见* 0.7.13).

注意：(Ⅰ) $\mathbf{H}(\kappa)$是最小的集合 Y 使得

$$a\subseteq Y \text{ 且 } |a|<\kappa \Rightarrow a\in Y.$$

(Ⅱ) 所有满足(1.2)的 y 的类就是 x 的传递闭包 $\mathbf{TC}(x)$(参见 0.4.1)，所以 $\mathbf{TC}(x)$是包含 x 的最小传递集，因此

$$\mathbf{H}(\kappa)=\{x:|\mathbf{TC}(x)|<\kappa\}.$$

1.2.9 例　在 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega_1}$中对所有同构于传递集的结构类 $\mathscr{T}\mathscr{S}$ 的刻画，即 $\mathscr{T}\mathscr{S}$ 是所有形如$\langle A,R\rangle$的结构的类，其中 R 是二元关系使得$\langle A,R\rangle$同构于某个结构$\langle S,\in\upharpoonright S\rangle$，其中 S 是传递集.

我们知道不存在 $\mathscr{L}'\supseteq\mathscr{L}$ 和 $\mathscr{L}'_{\omega\omega}$的句子集 Σ 使得 $\mathscr{T}\mathscr{S}=\mathrm{Mod}_{\mathscr{L}'}(\Sigma)\upharpoonright\mathscr{L}$. 但在 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega_1}(E)$中，我们有：

$$\theta_1=\forall xy[\forall z(zEx\leftrightarrow zEy)\rightarrow x\equiv y],\qquad (E\text{ 的外延性})$$

$$\theta_2=(\forall v\upharpoonright\omega)\bigvee_{n<\omega}\neg(v_{n+1}Ev_n).\qquad (E\text{ 的良建性})$$

$\mathscr{T}\mathscr{S}$ 是 $\theta_1\wedge\theta_2$ 的所有模型构成的类，因为 $\theta_1\wedge\theta_2$ 在每一传递结构$\langle S,\in\upharpoonright S\rangle$中成立，因此也在 $\mathscr{T}\mathscr{S}$ 的每一元素中成立. 下证：

$$\langle A,R\rangle\in\mathrm{Mod}(\theta_1\wedge\theta_2)\Rightarrow \text{存在传递集 } S,\langle A,R\rangle\cong\langle S,\in\upharpoonright S\rangle.$$

证明：我们知道 θ_2 表达的良建性保证 A 中存在元素 a_0 使得对所有 $x\in A,\neg(xRa_0)$(*即* A *中存在* R-*极小元* a_0)；这可以根据简单归纳得到. θ_1 保证这个元素的唯一性. 我们来证明下列归纳原则在$\langle A,R\rangle$中成立：

$$X\subseteq A\wedge a_0\in X\wedge[x\in A\wedge\forall y(yRx\rightarrow y\in X)\rightarrow x\in X]\Rightarrow X=A.\qquad(1.3)$$

(1.3)的证明：假设 $d_0\in A-X$，则 $d_0\neq a_0$. 若对所有 y 使得 yRd_0 有 $y\in X$，则 $d_0\in X$，矛盾；因此存在 $d_1\in A-X$ 使得 d_1Rd_0，施归纳继续这个过程，我们就有无穷递降 R-序列$\langle d_n:n<\omega\rangle$，而这

与良建性矛盾，因此 $A=X$. (1.3)成立.

令 $|A|=\kappa$. 称关系 $Q\subseteq A\times\mathbf{H}(\kappa^+)$**是可接受关系** $\Leftrightarrow$

(1) $\langle a_0,\varnothing\rangle\in Q$，且

(2) $x\in A\wedge\forall y[yRx\rightarrow\langle y,S_y\rangle\in Q]\Rightarrow\langle x,\{S_y:yRx\}\rangle\in Q$.

显然，$A\times\mathbf{H}(\kappa^+)$是可接受关系，所以我们能构造 $R_0=\bigcap\{R_1:R_1$ 是可接受关系$\}$，易证 R_0 也是可接受关系. 令

$$B=\{x\in A:\text{存在唯一的 } S\in\mathbf{H}(\kappa^+)\text{ 使得}\langle x,S\rangle\in R_0\}.$$

下证：

$$B\text{ 满足(1.3)的前件.} \tag{1.4}$$

显然，$\langle a_0,\varnothing\rangle\in R_0$，所以 $a_0\in B$. 我们来证：

$$S\neq\varnothing\Rightarrow\langle a_0,S\rangle\notin R_0.$$

为此只须验证 $R_0-\{\langle a_0,S\rangle\}$是可接受的. 据 R_0 的构造，它显然满足(1). 下证 R_0 满足(2)：令 $x\in A$ 且假设

$$\{\langle y,S_y\rangle:yRx\}\subseteq R_0-\{\langle a_0,S\rangle\}.$$

我们来证$\langle x,\{S_y:yRx\}\rangle\in R_0-\{\langle a_0,S\rangle\}$，即证：

$$\langle x,\{S_y:yRx\}\rangle\neq\langle a_0,S\rangle. \tag{1.5}$$

若 $x=a_0$，则据定义，对所有 $y\in A$，并非 yRx；因此$\{\langle y,S_y\rangle:yRx\}=\varnothing$. 但因为 $S\neq\varnothing$，所以(1.5)得证. 若 $x\neq a_0$，则(1.5)显然成立，从而证明 R_0 满足(2).

令 $x\in A$ 且假设$\{y:yRx\}\subseteq B$. 我们要证 $x\in B$，即存在唯一的 $S\in\mathbf{H}(\kappa^+)$使得$\langle x,S\rangle\in R_0$.

因为 R_0 有性质(2)，所以据归纳假设$\{y:yRx\}\subseteq B$，我们有$\langle x,\{S_y:yRx\}\rangle\in R_0$. 下证：

$$S\neq\{S_y:yRx\}\Rightarrow\langle x,S\rangle\in R_0.$$

为此只须证 $R_0-\{\langle x,S\rangle\}$是可接受的：

验证(1)：若 $x=a_0$，则$\{S_y:yRx\}=\varnothing$且 $S\neq\varnothing$，因此$\langle a_0,\varnothing\rangle\in R_0-\{\langle x,S\rangle\}$. 若 $x\neq a_0$，则显然有$\langle a_0,\varnothing\rangle\in R_0-\{\langle x,S\rangle\}$.

验证(2)：$z\in A$ 且$\{\langle w,S_w\rangle:wRz\}\subseteq R_0-\{\langle x,S\rangle\}$. 只须证：

$$\langle z,\{S_w:wRz\}\rangle\in R_0-\{\langle x,S\rangle\}.$$

若 $z\neq x$，则显然．若 $z=x$，则据 S 的定义，$\{S_w:wRz\}=\{S_w:wRx\}\neq S$，因此要证结果成立．这样证明了(1.4)．

根据(1.3)，$B=A$，因此 $R_0:A\to\mathbf{H}(|A|^+)$ 且

$$R_0(x)=\{S_y:yRx\}=\{R_0(y):yRx\},\tag{1.6}$$

因此 $\mathrm{Ran}(R_0)$ 是集合的传递域．令

$$C=\{x\in A:y\in A\text{ 且 }R_0(x)=R_0(y)\Rightarrow x=y\}.$$

我们来证 C 也满足(1.3)的前件：若 $y\neq a_0$，则存在 $z\in A$ 使得 zRy，所以 $R_0(z)\in R_0(y)$，因此 $R_0(y)\neq\varnothing$ 且 $a_0\in C$．若 $x\in A$ 且当 yRx 时 $y\in C$，则我们能证明 $x\in C$：因为若 $x\notin C$，则存在 $u\neq x$ 使得 $R_0(u)=R_0(x)$．因为 $u\neq x$，则据外延性，或者存在 yRx 使得 $\neg(yRu)$，或者存在 zRu 使得 $\neg(zRx)$．对第一种情况，据(1.6)，有

$$yRx\Rightarrow R_0(y)\in R_0(x),\quad \neg(yRu)\Rightarrow R_0(y)\notin R_0(u).$$

所以 $R_0(x)\neq R_0(u)$．对第二种情况，同理可证 $R_0(x)\neq R_0(u)$．

因此 C 满足(1.3)的前件，据归纳原则，$A=C$．这就证明了 R_0 是单射．显然，我们也有 $R_0(x)\in R_0(y)\Rightarrow xRy$，所以 $xRy\Leftrightarrow R_0(x)\in R_0(y)$．因此 $R_0:\langle\mathrm{Ran}(R_0),\in\upharpoonright\mathrm{Ran}(R_0)\rangle\cong\langle A,R\rangle$．□

1.2.10 例 在 $\mathscr{L}_{\kappa^+\kappa^+}$ 中对 $\mathbf{H}(\kappa^+)$ 的刻画．$\mathbf{H}(\kappa^+)$ 是例 1.2.9 的 θ_1,θ_2 和下列句子的模型类：

$$\theta_3=(\forall v\upharpoonright\kappa)\exists y\forall z[zEy\leftrightarrow\bigvee_{\xi<\kappa}(z\equiv v_\xi)],$$

$$\theta_4=\forall y[\exists z(zEy)\leftrightarrow(\exists v\upharpoonright\kappa)\forall z[zEy\leftrightarrow\bigvee_{\xi<\kappa}(z\equiv v_\xi)]].$$

证明：显然，$\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4$ 在 $\langle\mathbf{H}(\kappa^+),\in\rangle$ 中成立．反之，如果 $\langle S,\in\rangle$ 是诸集合的传递模型使 θ_3 和 θ_4 成立，则据 θ_4，S 的元素是 S 的子集且这些元素的幂 $\leqslant\kappa$，因此 S 的元素是幂 $\leqslant\kappa$ 的遗传集．施归纳于 $\xi<\kappa^+$，据 1.2.9 引入的概念和集合论的基本事实，诸集合 $\mathbf{H}(\xi)$ 是 S 的所有子集，故 $S=\bigcup\{\mathbf{H}(\xi):\xi<\kappa^+\}=\mathbf{H}(\kappa^+)$．□

1.2.11 例 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$ 中 $\mathfrak{V}_\alpha=\mathbf{V}(\alpha)=\langle\mathbf{R}(\alpha),\in\upharpoonright\mathbf{R}(\alpha)\rangle$ 的某些子结构，其中 $\kappa=|\alpha|^+$，$\mathbf{R}(\alpha)$（参见第 0 章 §7 的开头）归纳定义如下：

$$\mathbf{R}(0)=\varnothing,$$

$$\mathbf{R}(\alpha)=\bigcup_{\xi<\alpha}\mathscr{P}(\mathbf{R}(\xi)),\quad \text{对所有 } \alpha>0.$$

归纳定义 $\theta_\alpha(x)$ 如下：

$$\theta_0(x)=\neg(x\equiv x),$$

$$\theta_\alpha(x)=\bigvee_{\xi<\alpha}\forall y[yEx\to\theta_\xi(y)].$$

显然，
$$(\theta_\beta)^{\mathfrak{B}_\alpha}=\begin{cases}\mathbf{R}(\beta), & \beta\leqslant\alpha;\\ \mathbf{R}(\alpha), & \beta\geqslant\alpha.\end{cases}$$

令 σ_α 是句子 $\forall xy[\forall z(zEx\leftrightarrow zEy)\to x\equiv y]\wedge\forall x\bigvee_{\beta\leqslant\alpha}\theta_\beta(x)$.

易见 $\mathfrak{A}\in\mathrm{Mod}(\sigma_\alpha)\Rightarrow\mathfrak{A}\cong\mathfrak{C}$，对某个 $\mathfrak{C}\subseteq\mathfrak{B}_\alpha$.

因此 $\mathfrak{A}\in\mathrm{Mod}(\sigma_\alpha)\Rightarrow|A|\leqslant|\mathrm{R}(\alpha)|=\beth_\alpha$,

其中 **beth-数** $\beth_\alpha(\kappa)$ 归纳定义如下：给定基数 κ,

$$\beth_0(\kappa)=\kappa,$$

$$\beth_{\alpha+1}(\kappa)=2^{\beth_\alpha(\kappa)},$$

$$\beth_\lambda(\kappa)=\bigcup_{\xi<\lambda}\beth_\xi(\kappa),\quad \text{若 } \lambda \text{ 是极限序数}.$$

$\beth_\alpha$ 指称 $\beth_\alpha(\omega)$. 关于 σ_α 及其模型的一些重要性质，请见 1.2.17.

1.2.12 定义 称偏序 $\langle T,\leqslant\rangle$ 是**树** $\Leftrightarrow$ 对每一 $x\in T$, x 的所有 $<$-前趋的集合 $S_x=\{y\in T: y<x\}$ 被 $\leqslant$ 良序.

T 的任意被 $\leqslant$ 线序的子集称为**链**. 任何极大链称为**树枝**.

1.2.13 例 在 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega_1}$ 和 $\mathscr{L}_{\kappa^{++}\kappa^{++}}$ 中刻画所有树的类 $\mathscr{T}$.

易见 $\mathscr{T}$ 在 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega_1}(\leqslant)$ 中是可公理化的. 只须在通常关于 $\leqslant$ 的偏序公理上增加下列句子：

$$\sigma=\forall x(\forall v\upharpoonright\omega)[\bigwedge_{n<\omega}(v_n\leqslant x)\to\bigvee_{n<\omega}(v_n\leqslant v_{n+1})].$$

对所有树枝都有幂 $\leqslant\kappa$ 且每一元都有 $\leqslant\kappa$ 个直接后继的树，可以在 $\mathscr{L}_{\kappa^{++}\kappa^{++}}$ 中用 σ 加下列句子的合取来刻划：

$$\forall x(\exists v\upharpoonright\kappa)[\bigwedge_{\xi<\kappa}\mathrm{S}(x,v_\xi)\wedge\forall z[\mathrm{S}(x,z)\to\bigvee_{\xi<\kappa}(z\equiv v_\xi)]],$$

$$(\forall v\upharpoonright\kappa^+)[\bigwedge\{\neg(v_\xi\equiv v_\eta):\ \xi,\eta<\kappa^+,\xi\neq\eta\}$$
$$\to\bigvee\{\neg(v_\xi\leqslant v_\eta)\wedge\neg(v_\eta\leqslant v_\xi):\ \xi,\eta<\kappa^+\}];$$

其中 $S(x,y)$（表示"y 是 x 的 $<$-**直接后继**"）是下列公式：

$$S(x,y)=x<y\wedge\neg\exists z(x<z\wedge z<y).$$

注意：关于树枝的条件可以用 $\mathscr{L}_{\kappa^+\kappa^+}$ 的一个公式来表达.

另一种较简单的关于树的例子由 López-Escobar 给出：

1.2.14 例 在 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 中刻画所有树的类.

我们预期的模型是有有穷长树枝和只有一个树根的树. 语言 $\mathscr{L}$ 有一个个体常元符号 0（指称**树根**）和一个一元函数符号 P（指称**前趋**）. 公理为：

(1) $\forall x(x\equiv 0\leftrightarrow P(x)\equiv x)$， （0 是唯一以它自身为前趋的 x）；

(2) $\forall x[\bigvee_{1\leqslant n<\omega}P^n(x)\equiv P^{n+1}(x)]$， （每一元素有有穷多个前趋）；

(3) $\bigwedge_{n<\omega}[\bigvee_{m<\omega}\forall x_0,\cdots,x_m[\bigwedge_{k\leqslant m}P^n(x_k)\equiv P^{n+1}(x_k)\rightarrow\bigvee_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant m}x_i\equiv x_j]]$；

(4) $\forall x[\bigvee_{m<\omega}\forall x_0,\cdots,x_m[\bigwedge_{k\leqslant m}P(x_k)\equiv x\rightarrow\bigvee_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant m}x_i\equiv x_j]]$，

（每一元素有有穷多个后继）；

其中 $P^n(n\geqslant 1)$ 归纳定义为：$P^{n+1}(x)=P(P^n(x))$.

κ 的**共尾度**(cofinality)$\mathrm{cf}(\kappa)$ 是最小的极限序数 β 使得存在序列 $\{\gamma_\xi:\xi<\beta\}\subseteq\kappa$ 使 $\kappa=\bigcup\{\gamma_\xi:\xi<\beta\}$.

1.2.15 例（奇异基数语言的表达力） 令 κ 是奇异基数且 $\lambda<\kappa$，则 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$ 和 $\mathscr{L}_{\kappa^+\lambda}$ 在下列意义上有相同的表达力：

对 $\mathscr{L}_{\kappa^+\lambda}$ 的每一公式 φ，存在 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$ 的公式 $\bar{\varphi}$（$\bar{\varphi}$ 包含与 φ 相同的非逻辑符号）使得 $\mathrm{Fv}(\varphi)=\mathrm{Fv}(\bar{\varphi})$ 且对适当的语言的每一结构 $\mathfrak{A}$ 和每一赋值 $f:\mathrm{Fv}(\varphi)\rightarrow A$，

$$\mathfrak{A}\models\varphi[f]\Leftrightarrow\mathfrak{A}\models\bar{\varphi}[f]. \tag{1.7}$$

证明：令 $\delta=\mathrm{cf}(\kappa)$，我们知道每一幂为 κ 的集合可以分解为 δ 个幂 $<\kappa$ 的非空集，因此施归纳于 φ 的复杂度定义 $\bar{\varphi}$ 如下：

若 φ 是原子公式，则 $\bar{\varphi}=\varphi$，

若 φ 是 $\neg\psi$，则 $\bar{\varphi}=\neg\bar{\psi}$，

若 φ 是 $\exists X\psi$，其中 $X\subseteq\mathrm{Var}$，$|X|<\lambda$，则 $\bar{\varphi}=\exists X\bar{\psi}$，

若 φ 是 $\bigwedge\Psi$，其中 $|\Psi|\leqslant\kappa$，且当 $|\Psi|=\kappa$ 时，$\langle\Psi_\alpha:\alpha<\delta\rangle$ 是把 Ψ

分解为幂$<\kappa$的诸集合的一个**分解**(即诸Ψ_α无需不相交).则

$$\bar{\varphi}=\begin{cases}\bigwedge_{\alpha<\delta}(\bigwedge_{\psi\in\Psi_\alpha}\bar{\psi}), & \text{若}|\Psi|=\kappa;\\ \bigwedge_{\psi\in\Psi}\bar{\psi}, & \text{若}|\Psi|<\kappa.\end{cases}$$

我们把上述等价关系的验证作为一个练习留给读者.

注意:一般地说,把(1.7)概括到$\mathscr{L}_{\kappa^+\kappa^+}$是不可能的.例如,存在$\mathscr{L}_{\kappa^+\kappa^+}$的句子$\sigma$使得$\mathscr{L}_{\infty\kappa}$中没有句子$\theta$使$\mathrm{Sm}(\sigma)=\mathrm{Sm}(\theta)$且$\mathrm{Mod}(\sigma)=\mathrm{Mod}(\theta)$(见1.2.19).为了方便,以后我们用$\bigwedge_{\alpha<\delta}\bigwedge_{\psi\in\Psi_\alpha}\bar{\psi}$表示$\bigwedge_{\alpha<\delta}(\bigwedge_{\psi\in\Psi_\alpha}\bar{\psi})$,对$\bigvee$也同样.

练 习:

1.2.16 考虑句子

$$[\forall x[\forall y(y<x\rightarrow\psi(y))\rightarrow\psi(x)]\rightarrow\forall x\psi(x)]\wedge\sigma, \tag{1.8}$$

其中ψ是任意只有一个自由变元的$\mathscr{L}_{\kappa\omega}$-公式,$\sigma$是描述"$<$是线序"的句子.证明(1.8)的每一模型对所有$\alpha<\kappa$满足1.2.4(4)的(1.1)中的句子.因此(1.8)的每一幂$<\kappa$的模型是良序的(但存在满足(1.8)的非良序模型).

[提示:运用归纳法和引理1.2.7(1).]

1.2.17 考虑例1.2.11的句子σ_α.证明:

(1) $\mathfrak{B}_\alpha\in\mathrm{Mod}(\sigma_\beta)$, 对$\beta\geqslant\alpha$.

(2) $\mathfrak{A}\in\mathrm{Mod}(\sigma_\alpha)\Rightarrow\mathfrak{A}\subseteq\mathfrak{B}_\alpha$($\subseteq$的定义见后面的1.3.20(1)),但逆不成立.

(3) 对所有$\beta\in\mathbf{ON}$,$\beta>0$,存在$\mathfrak{B}_\alpha$使得它的每一个体域为一个元素的子结构是σ_β的模型.

(4) $\mathfrak{B}_\alpha$的每一外延且传递的子结构是σ_β的模型.

[提示:对(2)用下列良建关系的归纳原则:假设R是集合S上的良建关系,φ是公式,则对每一$x\in S$,有

[对每一$u\in S,uRx\Rightarrow\varphi(u)$]$\Rightarrow$对每一$x\in S,\varphi(x)$成立.

对(4)，若 $\mathfrak{A}\subseteq\mathfrak{C}\subseteq\mathfrak{B}_\alpha$ 且 $\mathfrak{A}$ 是传递的，则 $\theta_\alpha^{\mathfrak{A}}=\theta_\alpha^{\mathfrak{C}}\cap A$，其中 θ_α 的定义见例 1.2.11.]

1.2.18 (1) 给出 1.2.14 的句子(1)—(4)的模型 $\mathfrak{A}$ 使得 $\mathfrak{A}$ 有长度为 ω 的树枝.

(2) 证明在 1.2.14 的句子(1)—(3)的任何模型中，所有树枝的长度 $\leqslant\omega$.

1.2.19 令 κ 是无穷基数，σ 是 $\mathscr{L}_{\kappa^+\kappa^+}$ 的述说"恰好存在 κ 个元素"的句子使得 $\mathrm{Sm}(\sigma)=\varnothing$.

证明 $\mathscr{L}_{\kappa\kappa}(\varnothing)$ 中不存在句子 θ 使得 $\mathrm{Mod}(\theta)=\mathrm{Mod}(\sigma)$.

[提示：参见后面的 1.3.10.]

1.2.20(Scott-同构定理) 令 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 的可数结构，则存在 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 的句子 σ 使得对 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 的所有可数结构 $\mathfrak{B}$，

$$\mathfrak{B}\models\sigma\Leftrightarrow\mathfrak{B}\cong\mathfrak{A}.$$

§3 对公式、结构和映射的初步分类

本节我们对 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的公式、结构和结构间的映射进行初步分类，并且证明与之相关的一些重要性质和基本事实. 这些重要的概念和结论将为后面各章节所必需.

一、公式的分类

在下面的某些定义中我们把逻辑常元 $\wedge$，$\vee$，$\exists$，$\forall$ 看作是初始符号，而不是把其中一些看作是另一些的缩写.

注意：下面许多由语言 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 定义的概念若在细节上做必要的修正，也可以适用于语言 $\mathscr{L}_{\infty\lambda\rho\pi}$，$\mathscr{L}_{\infty\infty\rho\pi}$ 等.

下面的定义是对 TC 上递归定义的 $\mathrm{Sub}(\varphi)$ 概念(参见 1.1.31 前面)的另一种更易理解的规定：

1.3.1 定义 (1) 令 $\varphi\in \mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi})$，**子公式集** $\mathrm{Sub}(\varphi)$ 是满足下列条件的最小集合 $\Phi\subseteq \mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi})$：

① $\varphi\in\Phi$，

② $\neg\psi\in\Phi \Rightarrow \psi\in\Phi$，

③ $\forall X\psi\in\Phi \Rightarrow \psi\in\Phi$，

④ $\exists X\psi\in\Phi \Rightarrow \psi\in\Phi$，

⑤ $\bigwedge\Gamma\in\Phi \Rightarrow \Gamma\subseteq\Phi$，

⑥ $\bigvee\Gamma\in\Phi \Rightarrow \Gamma\subseteq\Phi$.

(2) 令 Φ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的公式集，定义

$$\mathrm{Sub}(\Phi)=\bigcup\{\mathrm{Sub}(\varphi):\varphi\in\Phi\}.$$

称 **Φ 在子公式下封闭** $\Leftrightarrow$ $(\varphi\in\Phi \Rightarrow \mathrm{Sub}(\varphi)\subseteq\Phi)$.

说明：满足(1)的任意多个 Φ 的交仍满足(1)，所以 $\mathrm{Sub}(\varphi)$ 是良定义的.

下列引理的(1)是 1.1.31 的概括.

1.3.2 引理 (1) $\varphi\in \mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi})$ 的任意子公式有 $<\lambda$ 个自由变元. 因此 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的任何句子的子公式有 $<\lambda$ 个自由变元.

(2) 若 $\varphi\in \mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi})$，$\kappa\geqslant\lambda$ 且 $|\mathrm{Fv}(\varphi)|<\kappa$，则对任意 $\psi\in \mathrm{Sub}(\varphi)$，$|\mathrm{Fv}(\psi)|<\kappa$.

(3) 若 κ 是正则无穷基数且 $\varphi\in \mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi})$，则 $|\mathrm{Fv}(\varphi)|<\kappa$.

证明：(1) 对 $\kappa\geqslant\lambda$，令 Φ 是下列公式集：

$\{\varphi : \varphi\in \mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi})$ 且 $\mathrm{Fv}(\varphi)<\lambda$ 且 $\theta\in \mathrm{Sub}(\varphi) \Rightarrow \mathrm{Fv}(\theta)<\lambda\}$.

因为原子公式没有真(proper)子公式，所以它们在 Φ 中. 若 $\psi\in\Phi$，则 $\neg\psi\in\Phi$. 假设对 $\gamma<\kappa$，$\Psi\subseteq\Phi$，$|\Psi|<\kappa$ 且 $\varphi=\bigwedge\Psi$ 有 $<\lambda$ 个自由变元. 因为 $\mathrm{Fv}(\bigwedge\Psi)=\bigcup\{\mathrm{Fv}(\psi):\psi\in\Psi\}$，所以 $\bigwedge\Psi$ 的每一主子公式 $\psi\in\Psi$ 有 $<\lambda$ 个自由变元. 因为 φ 的每一不同于 φ 的子公式是某个 $\psi\in\Psi$ 的子公式，所以总有 $<\lambda$ 个自由变元，因此 $\varphi\in\Phi$. 最后假设 $\psi\in\Phi$ 且 $\varphi=\exists X\psi$. 若 $\mathrm{Fv}(\varphi)<\lambda$，则因为 $\mathrm{Fv}(\psi)\subseteq \mathrm{Fv}(\varphi)\cup X$，$|\mathrm{Fv}(\varphi)|$ 和 $|X|$ 都 $<\lambda$，且 λ 是无穷基数，所以

$$|\mathrm{Fv}(\psi)|\leqslant|\mathrm{Fv}(\varphi)\cup X|\leqslant|\mathrm{Fv}(\varphi)|+|X|<\lambda+\lambda=\lambda.$$

因为 φ 的每一真子公式是 ψ 的子公式，所以 $\varphi\in\Phi$.

对(2)：详细的证明类似(1). 在验证 $\varphi=\exists X\psi$ 时，有

$$|\mathrm{Fv}(\psi)|\leqslant|\mathrm{Fv}(\varphi)\cup X|\leqslant|\mathrm{Fv}(\varphi)|+|X|$$
$$<\kappa+\lambda=\max\{\kappa,\lambda\}=\kappa.$$

对(3)：只须验证 $\varphi=\bigwedge\Psi$ 使得 $|\Psi|<\kappa$. 据归纳假设，对每一 $\psi\in\Psi$，$|\mathrm{Sub}(\psi)|<\kappa$. 因为 κ 是正则的，所以 $\left|\bigcup\{\mathrm{Sub}(\psi):\psi\in\Psi\}\right|<\kappa$，因此 $|\mathrm{Sub}(\varphi)|=\left|\bigcup\{\mathrm{Sub}(\psi):\psi\in\Psi\}\cup\{\varphi\}\right|<\kappa$. □

1.3.3 定义 令 ψ,φ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的公式，定义 φ 和 ψ 间的关系 $\prec$ 如下：$\psi\prec\varphi\Leftrightarrow$ 下列条件之一成立：

(1) $\varphi=\neg\psi$,

(2) $\varphi=\forall X\psi$ 或 $\varphi=\exists X\psi$, 对某个 $X\subseteq\mathrm{Var}$, $|X|<\lambda$,

(3) 存在幂 $<\kappa$ 的 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$-公式集 Θ 使得 $\varphi=\bigwedge\Theta$ 或 $\varphi=\bigvee\Theta$ 且对某个 $\theta\in\Theta$，ψ 是 θ.

1.3.4 引理 令 φ,ψ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的公式，

(1) $\prec$ 是 $\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi})$ 上的是良建关系.

(2) $\psi\in\mathrm{Sub}(\varphi)\Leftrightarrow$ 存在有穷公式序列 $\psi_0,\cdots,\psi_n$ 使得 $\psi_0=\psi$，$\psi_n=\varphi$，且对每一 i，$0\leqslant i$，$i+1\leqslant n$，$\psi_i\prec\psi_{i+1}$.（因此，序列 $\langle\psi_0,\cdots,\psi_n\rangle$ 由 ψ 和 φ 唯一确定.）

(3) $\psi\in\mathrm{Sub}(\varphi)\Rightarrow\mathrm{Sub}(\psi)\subseteq\mathrm{Sub}(\varphi)$.

(4) 在诸公式上的二元关系"$\psi\in\mathrm{Sub}(\varphi)$"是自返、反对称和传递的，所以据(1)和(2)，这个二元关系是良建的偏序关系.

证明：(1) 令 Φ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的任意非空公式集. 显然，对每一 $\varphi\in\Phi$，$\{\psi\in\Phi:\psi\prec\varphi\}$ 是集合. 所以只须证 Φ 有 $\prec$-极小元. 假设 Φ 没有 $\prec$-极小元，则对每一 $\varphi\in\Phi$，存在 $\psi\in\Phi$ 使得 $\psi\prec\varphi$. 若 ψ 是原子公式，则不存在 ψ 的 $\prec$-前趋. 所以 ψ 不是原子公式，因此存在 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的公式 θ 使得 $\theta\prec\psi$. 若 $\theta\notin\Phi$，则 ψ 在 Φ 中仍没有 $\prec$-前趋. 若 $\theta\in\Phi$，则如此重复有穷次仍可以找到一个 σ 使得 σ 在 Φ 中没有 $\prec$-前趋，这一切都与 Φ 没有 $\prec$-极小元矛盾.

(2)—(3)的证明只须施归纳于公式的复杂度. 请读者自证.

(4) 反对称可以从(1)提到，传递性来自(3)，而据定义 1.3.1 (1)，自返性显然. 细节留给读者作为练习. □

上述引理也证明了一个公式中的任一符号只出现在有穷多个否定符$\neg$的辖域中. 更形式地我们定义：

1.3.5 定义 令 Q 是等词符号或是 $\mathscr{L}$ 中任意其它非逻辑符号，令 φ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的公式. 称 Q 在 ψ 中有一个**正(负)出现** $\Leftrightarrow$ 存在有穷的公式序列 $\langle\psi_0,\cdots,\psi_n\rangle$ 使得

(1) $\psi_n=\varphi$；ψ_0 是 Q 在其中出现的原子公式，

(2) $\psi_i\prec\psi_{i+1}$， 对每一 $i, 0\leqslant i\leqslant n-1$，

(3) $\{i<n: \psi_{i+1}=\neg\psi_i\}$ 有偶(奇)数个元素.

注意：同一个符号在一公式中既可以有正出现，又可以有负出现. 称 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的公式 φ 是**正公式** $\Leftrightarrow$ $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的非逻辑符号或等词符号在 φ 中都不负出现.

易证 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的正公式集是具有下列性质的最小公式集 Φ：

(1) $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的所有原子公式在 Φ 中，

(2) 若 $\Gamma\subseteq\Phi$, $|\Gamma|<\kappa$，则 $\bigwedge\Gamma$, $\bigvee\Gamma\in\Phi$，

(3) 若 $\varphi\in\Phi$ 且 $X\subseteq\mathrm{Var}$, $|X|<\lambda$，则 $\forall X\varphi$, $\exists X\varphi\in\Phi$，

(4) 若 $\varphi\in\Phi$, ψ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的公式且 $\vdash\psi\leftrightarrow\varphi$，则 $\psi\in\Phi$.

说明：若 Φ 满足上述(2)，则称 Φ 在 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的合取和析取下封闭. 若 Φ 满足(3)，则称 Φ 在 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的量化下封闭. 若 Φ 满足(4)，则称 Φ 在逻辑等价下封闭.

1.3.6 定义 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的**归约公式**(reduced formula)集是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的最小公式集 Φ 使得 Φ 包含 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的所有原子公式和原子公式的否定，且在 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的合取、析取和量化下封闭.

1.3.7 引理 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的每一公式 φ 逻辑等价 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的一个归约公式 ψ 使得 $\mathrm{Sm}(\varphi)=\mathrm{Sm}(\psi)$. □

1.3.8 定义 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的**无量词公式**集是最小公式集 Φ 使得 Φ 包含 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的所有原子公式且在$\neg$和 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的合取、析取下封闭. 无

量词公式也称为开公式、Π_0-公式、Σ_0-公式、原子公式的布尔组合.

1.3.9 定义 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的**存在公式集**(或**全称公式集**)是最小公式集 Φ 使得 Φ 包含 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的所有原子公式和原子公式的否定,且在 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的合取、析取和存在量化(或全称量化)下封闭. 存在公式也称为 **Σ_1-公式**,全称公式也称为 **Π_1-公式**. 类似地,我们可以定义 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的**存在全称公式**集(也称 **$\Sigma_2$-公式集**),等等.

我们知道前束范式定理对许多无穷语言是不成立的. 下面我们举一个反例来说明,为此需要一个引理:

1.3.10 引理 令 $\mathscr{L}=\varnothing$ 且 σ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的句子,则 σ 在所有幂 $\geqslant\lambda$ 的结构中真或者不在任何幂 $\geqslant\lambda$ 的结构中真.

证明:令 φ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的任意公式,$A,B$ 是集合使得 $A\subseteq B$ 且 $|A|\geqslant\lambda$,令 $f\in A^{\mathrm{Fv}(\varphi)}$,则我们要证

$$\langle A\rangle\models\varphi[f]\Leftrightarrow\langle B\rangle\models\varphi[f]. \tag{1.9}$$

显然,从(1.9)可以推出本引理,所以下面我们施归纳于 φ 的复杂度来证明(1.9). 在这个归纳过程中唯一不平凡的情况是 $\varphi=\exists X\psi$ 的情况,其中 $X\subseteq\mathrm{Var}$,$|X|<\lambda$.

"$\Rightarrow$":若 $\langle A\rangle\models\varphi[f]$,则对某个 $g\in A^X$,$\langle A\rangle\models\psi[f*g]$,据归纳假设,$\langle B\rangle\models\psi[f*g]$. 因为 $A\subseteq B$,所以 $\langle B\rangle\models\varphi[f]$.

"$\Leftarrow$":假设 $\langle B\rangle\models\varphi[f]$,则存在 $g\in B^X$ 使得 $\langle B\rangle\models\psi[f*g]$. 据归纳假设,$\langle C\rangle\models\psi[f*g]$,其中 $C=A\cup\mathrm{Ran}(g)$. 因为 ψ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的公式,所以 $|\mathrm{Fv}(\psi)|<\lambda$,因此 $|\mathrm{Ran}(g)\cup\mathrm{Ran}(f)|<\lambda$. 因为 $|A|\geqslant\lambda$,因此存在 $D\subseteq A$ 使得 $D\cap\mathrm{Ran}(f)=\varnothing$ 且 $|D|=|E|$,其中 $E=\mathrm{Ran}(g)-\mathrm{Ran}(f)$. 令 h 是从 D 到 E 的双射,则 h 能以自然的方式扩张为同构 h^*:

$$h^*:\langle C,c,e\rangle_{c\in\mathrm{Ran}(f),\,e\in E}\cong\langle A,c,h(e)\rangle_{c\in\mathrm{Ran}(f),\,e\in E},$$

因此 $\langle A\rangle\models\psi[f*(h^*\circ g)]$. 因为 $h^*\circ g\in A^X$,所以 $\langle A\rangle\models\varphi[f]$. □

1.3.11 反例 令 κ 是极限基数,$\mathscr{L}=\varnothing$,我们来构造一个 $\mathscr{L}_{\kappa^+\kappa}$的公式 σ_κ 使得对任意 $\kappa_1\geqslant\kappa^+$,$\sigma_\kappa$ 不等价诸前束 $\mathscr{L}_{\kappa_1\kappa}$-公式的

合取，因此 σ_κ 在 $\mathscr{L}_{\infty\kappa}$ 中没有前束形式.

证明：令 κ 是任意无穷基数，构造述说"存在 $<\kappa$ 个元素"的句子 σ_κ 如下：

$$\bigvee_{\substack{\lambda<\kappa\\ \lambda\in CN}}(\exists v\upharpoonright\lambda)[\bigwedge_{\substack{\gamma,\delta<\lambda\\ \gamma\neq\delta}}\neg(v_\gamma\equiv v_\delta)\wedge\forall y\bigvee_{\gamma<\lambda}y\equiv v_\gamma].$$

（其中 CN 是所有基数的集合.）显而易见，σ_κ 是 $\mathscr{L}_{\kappa^+\kappa}$-公式. 但若 $|\{\lambda:\lambda<\kappa,\lambda\in CN\}|<\kappa$（换句话说，若 $\kappa=\aleph_\alpha$ 使得 $0<\alpha<\aleph_\alpha$），则 σ_κ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$-公式. **注意**：特别地，对 $\kappa=\omega$，我们有述说"存在有穷多个元素"的 $\mathscr{L}_{\omega^+\omega}$-句子.

假设 κ 是极限基数，且对某个 $\kappa_1\geqslant\kappa^+$，$\sigma_\kappa$ 等价若干前束 $\mathscr{L}_{\kappa_1\kappa}$-公式的合取. 不妨令这个合取为 $\bigwedge_{i\in I}\varphi_i$. 则每一 φ_i 形如

$$(Q_1^iv_1^i\upharpoonright\lambda_1^i)\cdots(Q_{n_i}^iv_{n_i}^i\upharpoonright\lambda_{n_i}^i)\psi_i,$$

其中 ψ_i 是无量词公式，$n_i<\omega$，每一 $Q_j^i(j=1,\cdots,n)$ 是 $\forall$ 或 $\exists$，且（通过重名变元）每一 $\lambda_j^i(j=1,\cdots,n)<\kappa$ 是基数.

令 $\lambda_i=\max\{\lambda_1^i,\cdots,\lambda_{n_i}^i\}$，则 $\lambda_i<\kappa$. 因此，据 σ_κ 的构造，σ_κ（从而 φ_i）有幂为 λ_i^+ 的模型. 因为 φ_i 是 $\mathscr{L}_{\kappa_1\lambda_i^+}$ 的句子，所以据 1.3.10，φ_i 在所有幂 $\geqslant\lambda_i^+$ 的结构中成立，显然，σ_κ 有幂 $\geqslant\kappa$ 的模型，矛盾. □

关于其它反例，读者可参见 M. A. Dickmann 的[1975]的附录 B. 由于这些反例，我们在下面引入前束公式将是方便的：

1.3.12 定义 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\kappa}$ 的**前束公式**集是最小公式集 Φ 使得 Φ 包含 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\kappa}$ 的所有无量词公式且在 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\kappa}$ 的量化下封闭.

说明：据引理 1.3.4(1)，易见 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\kappa}$ 的前束公式形如

$$(Q_1X_1)(Q_2X_2)\cdots(Q_nX_n)\varphi,$$

其中 φ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\kappa}$ 的无量词公式，$X_1,\cdots,X_n\subseteq\mathrm{Var}$，且 $|X_1|,\cdots,|X_n|<\lambda$，每一 Q_j 是 $\forall$ 或 $\exists$ 且 $Q_i\neq Q_{i+1}(j=1,\cdots,n;\ i=1,\cdots,n-1)$.

1.3.13 定义 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\kappa}$ 的公式 φ 的**量词秩** $\mathrm{qr}(\varphi)$ 定义如下：

(1) 若 φ 原子公式，则 $\mathrm{qr}(\varphi)=0$，

(2) 若 φ 是 $\neg\psi$，则 $\mathrm{qr}(\varphi)=\mathrm{qr}(\psi)$，

(3) 若 φ 是 $\bigwedge\Psi$ 或 $\bigvee\Psi$，则 $\mathrm{qr}(\varphi)=\sup\{\mathrm{qr}(\psi):\psi\in\Psi\}$，

(4) 若 φ 是 $\forall X\psi$ 或 $\exists X\psi$，则 $\mathrm{qr}(\varphi)=\mathrm{qr}(\psi)+1$.

说明：(Ⅰ) 易证对所有 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$-公式 φ，若 κ 是正则基数，则 $\mathrm{qr}(\varphi)<\kappa$；若 κ 是奇异基数，则 $\mathrm{qr}(\varphi)<\kappa^{+}$.

(Ⅱ) 量词秩不是确定不变的，例如

$$\mathrm{qr}(\exists X_1X_2\varphi)=\mathrm{qr}(\exists(X_1\cup X_2)\varphi)+1.$$

但在 $\mathscr{L}_{\kappa\omega\rho\pi}$ 的情况下，我们可以在上述定义的(4)中要求 $|X|=1$ 来避免此困难.

(Ⅲ) 前束公式有有穷量词秩；反之不然. 无量词公式的量词秩为 0；反之亦然.

由于在许多无穷语言中缺乏前束范式定理，所以量词秩对无穷公式提供了一种“测度”其量词分布的方法.

1.3.14 定义 测度从原子公式构造任意 $\varphi\in\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi})$ 所需步骤的数目 $\varepsilon(\varphi)$ 的**秩函数** ε 递归定义如下：

(1) 若 φ 是原子公式，则 $\varepsilon(\varphi)=0$，

(2) 若 φ 是 $\neg\psi$，则 $\varepsilon(\varphi)=\varepsilon(\psi)+1$，

(3) 若 φ 是 $\bigwedge\Psi$ 或 $\bigvee\Psi$，则 $\varepsilon(\varphi)=\bigcup\limits_{\psi\in\Psi}\varepsilon(\psi)+1$，

(4) 若 φ 是 $\forall X\psi$ 或 $\exists X\psi$，则 $\varepsilon(\varphi)=\varepsilon(\psi)+1$.

说明：(Ⅰ) 有时我们遇到需要运用归纳法的情况，但直接施归纳于公式的复杂度不可能，但有可能贯彻超穷归纳于秩函数 ε 测度的序数. (Ⅱ) 易证每一 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的公式有一个 $<\kappa$ 的秩.

二、结构的分类

下面我们要引入一些基本定义以便对结构进行分类.

记号 令 $\mathscr{M}$ 是语言 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的结构类且令 $(\mathscr{L}_1)_{\kappa\lambda\rho\pi}\subseteq\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$，我们用 $\mathscr{M}\upharpoonright(\mathscr{L}_1)_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 指称 $\{\mathfrak{A}\upharpoonright(\mathscr{L}_1)_{\kappa\lambda\rho\pi}:\mathfrak{A}\in\mathscr{M}\}$.

1.3.15 定义 令 $\mathscr{M}$ 是语言 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的结构类，

(1) 称 $\mathscr{M}$ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的**初等模型类**(简称 EC-类)，记作 $\mathscr{M}\in$

$\mathrm{EC}(\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi})$，$\Leftrightarrow$ 存在 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的句子 σ 使得 $\mathscr{M}=\mathrm{Mod}(\sigma)$.

（2）称 $\mathscr{M}$ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的**广义初等模型类**（简称 EC_Δ-类），记作 $\mathscr{M}\in\mathrm{EC}_\Delta(\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi})$，$\Leftrightarrow$ 存在 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$-句子集 Σ 使得 $\mathscr{M}=\mathrm{Mod}(\Sigma)$.

（3）称 $\mathscr{M}$ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的**拟初等模型类**（简称 PC-类），记作 $\mathscr{M}\in\mathrm{PC}(\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi})$，$\Leftrightarrow$ 存在 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的扩张语言$(\mathscr{L}_1)_{\kappa\lambda\rho\pi}$和$(\mathscr{L}_1)_{\kappa\lambda\rho\pi}$-句子 σ 使得

$$\mathscr{M}=\mathrm{Mod}_{(\mathscr{L}_1)_{\kappa\lambda\rho\pi}}(\sigma)\upharpoonright\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}.$$

（4）称 $\mathscr{M}$ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的**广义拟初等模型类**（简称 PC_Δ-类），记作 $\mathscr{M}\in\mathrm{PC}_\Delta(\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi})$，$\Leftrightarrow$ 存在 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的扩张语言$(\mathscr{L}_1)_{\kappa\lambda\rho\pi}$和$(\mathscr{L}_1)_{\kappa\lambda\rho\pi}$-句子集 Σ 使得

$$\mathscr{M}=\mathrm{Mod}_{(\mathscr{L}_1)_{\kappa\lambda\rho\pi}}(\Sigma)\upharpoonright\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}.$$

说明：在不致混淆之处，我们用 EC，PC，…来代替 $\mathrm{EC}(\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi})$，$\mathrm{PC}(\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi})$，….

1.3.16 引理　（1）$\mathrm{EC}\subseteq\mathrm{EC}_\Delta\subseteq\mathrm{PC}_\Delta$，$\mathrm{EC}\subseteq\mathrm{PC}\subseteq\mathrm{PC}_\Delta$．

（2）若 $\Sigma\subseteq\mathrm{Sent}(\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi})$，$\chi=\max\{|\Sigma|^+,\kappa\}$ 且 $\mathscr{M}=\mathrm{Mod}(\Sigma)$，则 $\mathscr{M}\in\mathrm{EC}(\mathscr{L}_{\chi\lambda\rho\pi})$. 换句话说，若 $\mathscr{M}\in\mathrm{EC}_\Delta(\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi})$，则存在 $\kappa_1\geqslant\kappa$ 使得 $\mathscr{M}\in\mathrm{EC}(\mathscr{L}_{\kappa_1\lambda\rho\pi})$. 若用 PC 置换 EC，上述命题仍成立.

（这说明我们可以用较大语言中的一个句子的模型类刻画较小语言中一个句子集的模型类.）

（3）若 $\mathscr{M}$ 是 $\mathscr{L}'_{\kappa\lambda\rho\pi}$的结构类，$\mathscr{L}'_{\kappa\lambda\rho\pi}$是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的扩张语言且 $\mathscr{M}\in\mathrm{PC}(\mathscr{L}'_{\kappa\lambda\rho\pi})$，则 $\mathscr{M}\upharpoonright\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}\in\mathrm{PC}(\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi})$. 对 PC_Δ 也有同样的命题成立.

（4）若 $\mathscr{M}\in\mathrm{EC}(\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi})\cup\mathrm{EC}_\Delta(\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi})$，则 $\mathscr{M}$ 在$\equiv_{\kappa\lambda\rho\pi}$下封闭.

证明：(1)据定义显然.

（2）据假设，易见 $\bigwedge\Sigma$ 是 $\mathscr{L}_{\chi\lambda\rho\pi}$的句子且

$$\mathrm{Mod}_{\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}}(\Sigma)=\mathrm{Mod}_{\mathscr{L}_{\chi\lambda\rho\pi}}(\bigwedge\Sigma).$$

(3)也易证，留给读者作为练习.

（4）假设 $\mathscr{M}\in\mathrm{EC}_\Delta(\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi})$，令 $\mathfrak{A}\in\mathscr{M}$ 且 $\mathfrak{A}\equiv_{\kappa\lambda\rho\pi}\mathfrak{B}$. 因为 $\mathscr{M}\in$

$\mathrm{EC}_\Delta(\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi})$，所以存在 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的句子集 Σ 使得 $\mathscr{M}=\mathrm{Mod}(\Sigma)$. 因为 $\mathfrak{A}\in\mathscr{M}$，所以 $\mathfrak{A}\models\Sigma$，据 $\mathfrak{A}\equiv_{\kappa\lambda\rho\pi}\mathfrak{B}$，则 $\mathfrak{B}\models\Sigma$，所以 $\mathfrak{B}\in\mathscr{M}$. □

三、映射的分类

下面根据映射对公式的保持性来对结构间的映射进行分类. 在此主要研究 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$-映射和 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$-初等子结构.

1.3.17 定义 令 Φ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的公式类（$\Phi$ 甚至可以是真类），$\mathfrak{A},\mathfrak{B}$ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的结构，映射 $f:A\to B$ 称为 **Φ-映射** $\Leftrightarrow$ 对每一 $\varphi\in\Phi$ 和每一 $g\in A^{\mathrm{Fv}(\varphi)}$，

$$\mathfrak{A}\models\varphi[g]\Rightarrow\mathfrak{B}\models\varphi[f\circ g].$$

我们也可以类似地定义**部分映射**(partial map)，即映射 f 的 $\mathrm{Dom}(f)\subseteq A$，在这种情况下，要求 $g\in\mathrm{Dom}(f)^{\mathrm{Fv}(\varphi)}$（关于部分映射我们将在下册专门设章节讨论）. **注意**：f 可以是**空映射**.

从 1.3.17 易得下列事实：

1.3.18 引理 (1) $\Phi\subseteq\Phi_1$ 且 f 是 Φ_1-映射 $\Rightarrow$ f 是 Φ-映射.

(2) 若 f 是 Φ-映射，且 $\Phi^\wedge$**-映射**和 $\Phi^\vee$**-映射**分别是 Φ 的幂 $<\kappa$ 的诸子集在 $\wedge$ 和 $\vee$ 下封闭的类，则 f 是 $\Phi^\wedge$-映射和 $\Phi^\vee$-映射.

(3) 若 $\neg(x\equiv y)\in\Phi$，$x\neq y$ 且 f 是 Φ-映射，则 f 是单射.

(4) 若 f 是 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 间的 Φ-映射且 Φ 在否定下封闭，则对所有 $\varphi\in\Phi$ 和所有 $g\in A^{\mathrm{Fv}(\varphi)}$，

$$\mathfrak{A}\models\varphi[g]\Leftrightarrow\mathfrak{B}\models\varphi[f\circ g].$$

证明：据定义，(1)—(3)显然. 对(4)："$\Rightarrow$"显然成立. 下证"$\Leftarrow$"：设 $\mathfrak{A}\not\models\varphi[g]$，则 $\mathfrak{A}\models\neg\varphi[g]$，因为 Φ 在否定下封闭，所以据 1.3.17，$\mathfrak{B}\models\neg\varphi[f\circ g]$，即 $\mathfrak{B}\not\models\varphi[f\circ g]$. □

1.3.19 例 (1) 令 $\mathfrak{A},\mathfrak{B}$ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的结构使得 $A\subseteq B$，令 $\mathrm{id}_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}$ 指称从 A 到 B 中的**恒等映射**，则

$$\mathfrak{A}\subseteq\mathfrak{B}\Leftrightarrow\mathrm{id}_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}\text{是 }\mathrm{Qf}(\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi})\text{-映射},$$

其中 $\mathrm{Qf}(\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi})$是 1.3.8 定义的无量词公式集. 据上述引理(2)，我

们可以用 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的所有原子公式和原子公式的否定的类置换 $\mathrm{Qf}(\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi})$，同样的证明适用于下一个定义的(1)和往后的其它几处地方.

(2) 令 $\Sigma=\mathrm{Sent}(\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi})$，若 $\mathfrak{A}\equiv_{\kappa\lambda\rho\pi}\mathfrak{B}$，则 $f\in B^A$ 是 Σ-映射.

1.3.20 定义 令 $\mathfrak{A},\mathfrak{B}$ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的结构，$\mathrm{Qf}(\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi})$ 如前规定，

(1) 从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 中的 $\mathrm{Qf}(\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi})$-映射称为($\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$-)**嵌入**或($\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$-)**单射**. 若 f 是从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 中的嵌入，则我们记为 $f:\mathfrak{A}\subseteq\mathfrak{B}$；$\mathfrak{A}\subseteq\mathfrak{B}$ 表示存在 f,使得 $f:\mathfrak{A}\subseteq\mathfrak{B}$.

(2) 从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 中的 $\mathrm{At}(\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi})$-映射称为**同态**，其中 $\mathrm{At}(\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi})$ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的原子公式集.

(3) 若存在从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 上(onto)的同态，$\mathfrak{B}$ 就称为 $\mathfrak{A}$ 的**同态象**. 从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 上的单射称为**同构**. $f:\mathfrak{A}\cong\mathfrak{B}$ 表示 f 是从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的同构. $\mathfrak{A}\cong\mathfrak{B}$ 表示存在 f 使得 $f:\mathfrak{A}\cong\mathfrak{B}$.

(4) $\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi})$-映射称为 **$\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$-映射**.

(5) 若 $A\subseteq B$ 且 $\mathrm{id}_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}$ 是 Φ-映射，则称 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathfrak{B}$ 的 **Φ-子结构**，记为 $\mathfrak{A}\prec^{\Phi}\mathfrak{B}$. 若有必要，当 $\Phi\subseteq\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi})$ 时，记为 $\mathfrak{A}\prec^{\Phi}_{\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}}\mathfrak{B}$(或简记为 $\mathfrak{A}\prec^{\Phi}_{\kappa\lambda\rho\pi}\mathfrak{B}$)；当 $\Phi=\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi})$ 时，记为 $\mathfrak{A}\prec_{\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}}\mathfrak{B}$(或简记为 $\mathfrak{A}\prec_{\kappa\lambda\rho\pi}\mathfrak{B}$)，且称 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathfrak{B}$ 的 **$\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$-初等子结构**. 更一般地，若存在 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$-映射 $f\in B^A$，则称 $\mathfrak{A}$ **$\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$-可嵌入** $\mathfrak{B}$，记为 $\mathfrak{A}\precsim_{\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}}\mathfrak{B}$(或简记为 $\mathfrak{A}\precsim_{\kappa\lambda\rho\pi}\mathfrak{B}$)，我们也用 $f:\mathfrak{A}\precsim_{\kappa\lambda\rho\pi}\mathfrak{B}$ 来表示.

说明:(Ⅰ) 对 $\kappa=\lambda=\rho=\pi=\omega$，我们得到 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$ 的初等映射和初等子结构的概念，所以也可以把 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$-映射称为 **$\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$-初等映射**(参见下面 1.3.21).

(Ⅱ) **注意**:我们有

$$f:\mathfrak{A}\precsim_{\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}}\mathfrak{B}\Leftrightarrow f[\mathfrak{A}]\prec_{\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}}\mathfrak{B}.$$

1.3.21 Tarski-引理 任给 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的结构 $\mathfrak{A},\mathfrak{B}$ 和映射 $f\in B^A$，则下列等价：

(1) f 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$-映射.

(2) 对每一 $\varphi\in \mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi})$ 和每一 $g\in A^{\mathrm{Fv}(\varphi)}$，

$$\mathfrak{A}\models\varphi[g]\Leftrightarrow\mathfrak{B}\models\varphi[f\circ g].$$

(3) f 是单射且对每一 $\varphi\in \mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi})$，每一把 $\mathrm{Fv}(\varphi)$ 分为两集合 X_1 和 X_2 的划分和每一对 $g_1\in A^{X_1}, g_2\in B^{X_2}$，

$$\mathfrak{B}\models\varphi[(f\circ g_1)*g_2]\Rightarrow \text{存在 } h\in A^{X_2} \text{使得 } \mathfrak{B}\models\varphi[f\circ(g_1*h)].$$

证明：据引理 1.3.18(4)，立得(1) $\Leftrightarrow$ (2).

证(2) $\Rightarrow$ (3)：假设(2)成立，据 1.3.18(3)，f 是单射. 假设(3)的前提成立，且对所有 $h\in A^{X_2}$，$\mathfrak{B}\not\models\varphi[f\circ(g_1*h)]$，则据(2)，对所有 $h\in A^{X_2}$，$\mathfrak{A}\not\models\varphi[g_1*h]$. 因此 $\mathfrak{A}\not\models\forall X_2\varphi[g_1]$. 再据(2)，$\mathfrak{B}\not\models\forall X_2\varphi[f\circ g_1]$，所以 $\mathfrak{B}\not\models\varphi[(f\circ g_1)*g_2]$.

证(3) $\Rightarrow$ (2)：假设(3)成立. 我们下面来证对每一 $\varphi\in \mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi})$ 和每一 $g:\mathrm{Fv}(\varphi)\to A$，

$$\mathfrak{A}\models\varphi[g]\Leftrightarrow\mathfrak{B}\models\varphi[f\circ g]. \tag{1.10}$$

施归纳于 φ 的复杂度. 令 φ 是原子公式. 因为 f 是单射，据 1.3.20(1)和 1.3.17，(1.10)的"$\Rightarrow$"成立. 反之，若对所有 $g\in A^{\mathrm{Fv}(\varphi)}$，$\mathfrak{B}\not\models\varphi[g]$，则 $\mathfrak{A}\models\neg\varphi[g]$，因为 $\neg\varphi$ 是无量词公式，所以据 f 的单射性质，$\mathfrak{B}\models\neg\varphi[f\circ g]$，所以 $\mathfrak{B}\not\models\varphi[f\circ g]$，因此(1.10)的"$\Leftarrow$"也成立. $\varphi=\neg\psi$ 和 $\varphi=\bigwedge\Psi$ 的情况显然. 令 $\varphi=\exists X\psi$，则

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}\models\varphi[g] &\Leftrightarrow \text{存在 } h\in A^X, \mathfrak{A}\models\psi[g*h]\\ &\Leftrightarrow \text{存在 } h\in A^X, \mathfrak{B}\models\psi[f\circ(g*h)]\\ &\Leftrightarrow \text{存在 } h\in A^X, \mathfrak{B}\models\psi[(f\circ g)*(f\circ h)]\\ &\Leftrightarrow \text{存在 } f\circ h\in B^X, \mathfrak{B}\models\psi[(f\circ g)*(f\circ h)]\\ &\Leftrightarrow \mathfrak{B}\models\exists X\psi[f\circ g]\\ &\Leftrightarrow \mathfrak{B}\models\varphi[f\circ g];\end{aligned}$$

第二个"$\Leftrightarrow$"是由于归纳假设，第三个"$\Leftrightarrow$"是由于下列事实：

$$f\circ(g*h)=(f\circ g)*(f\circ h). \ \square$$

1.3.22 推论 $\mathfrak{A}\prec_{\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}}\mathfrak{B}\Leftrightarrow\mathfrak{A}\subseteq\mathfrak{B}$ 且对 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的任意公式，任意把 $\mathrm{Fv}(\varphi)$ 分成两个集合 X_1, X_2 的划分和映射 $f_1\in A^{X_1}, f_2\in B^{X_2}$，

$\mathfrak{B}\models\varphi[f_1 * f_2]\Rightarrow$ 存在 $g\in A^{X_2}$ 使得 $\mathfrak{B}\models\varphi[f_1 * g]$. □

1.3.23 推论 对所有的 κ,λ 使得 $\kappa\geqslant\lambda$，从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 上的同构是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$-映射(或等价地说，它是 $\mathscr{L}_{\infty\infty}$-映射). □

1.3.24 推论 令 $\mathfrak{A},\mathfrak{B}$ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的结构，下列等价：

(1) $f:A\to B$ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$-映射.

(2) $(\mathfrak{A},a)_{a\in A}\equiv_{\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}}(\mathfrak{B},f(a))_{a\in A}$.

(3) 对每一集合 I 和每一 $g\in A^I$，

$$(\mathfrak{A},g(i))_{i\in I}\equiv_{\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}}(\mathfrak{B},(f\circ g)(i))_{i\in I}.\ \square$$

上述 3 个推论的证明如同 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$-模型论中相应结果的证明.

1.3.25 定义 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的结构集 $\mathscr{M}$ **容许并运算** $\Leftrightarrow$

(1) 对 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的每一个体常元符号 c 和任意 $\mathfrak{A},\mathfrak{B}\in\mathscr{M}$，

$$c^{\mathfrak{A}}=c^{\mathfrak{B}},$$

(2) 对 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的每一 $\zeta(0<\zeta<\rho)$ 元函数符号 F，任意 $\mathfrak{A},\mathfrak{B}\in\mathscr{M}$ 和 $A\cap B$ 中每一长度为 ζ 的序列 $\vec{a}$，

$$F^{\mathfrak{A}}(\vec{a})=F^{\mathfrak{B}}(\vec{a}),$$

(3) 对每一 $\zeta>1$ 使得 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 有一 ζ 元函数符号，且对每一 $\vec{a}=a_1,\cdots,a_\xi,\cdots\in\bigcup_{\mathfrak{A}\in\mathscr{M}}A$，存在 $\mathfrak{A}\in\mathscr{M}$ 使得 $\vec{a}\in A$，其中 $\xi<\zeta$.

说明：(Ⅰ) 若 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 没有个体常元或函数符号，则 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的任意结构集容许并运算.

(Ⅱ) 若对每一对 $\mathfrak{A},\mathfrak{B}\in\mathscr{M}$，存在 $\mathfrak{C}\in\mathscr{M}$ 使得 $\mathfrak{A},\mathfrak{B}\subseteq\mathfrak{C}$，则 $\mathscr{M}$ 容许并运算(简单验证如下：(1) 假设存在 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的个体常元符号 c 和 $c^{\mathfrak{A}}\neq c^{\mathfrak{B}}$. 因为存在 $\mathfrak{C}$ 使得 $\mathfrak{A},\mathfrak{B}\subseteq\mathfrak{C}$，所以 $c^{\mathfrak{A}}=c^{\mathfrak{C}}$，$c^{\mathfrak{B}}=c^{\mathfrak{C}}$，易得矛盾. (2)也可以类似证明，因为 $F^{\mathfrak{A}}=F^{\mathfrak{C}}\upharpoonright C^{\zeta}$，$F^{\mathfrak{B}}=F^{\mathfrak{C}}\upharpoonright C^{\zeta}$. (3)显然成立.)特别地，若 $\mathscr{M}$ 被 $\subseteq$ 线序，则 $\mathscr{M}$ 容许并运算.

1.3.26 定义 若 $\mathscr{M}\neq\varnothing$ 且 $\mathscr{M}$ 容许并运算，则 $\mathscr{M}$ 的**并结构**，记为 $\bigcup\mathscr{M}$ 或 $\bigcup_{\mathfrak{A}\in\mathscr{M}}\mathfrak{A}$，是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的如下定义的结构 $\mathfrak{B}$：

$$B=\bigcup_{\mathfrak{A}\in\mathscr{M}}A,$$

$$S^{\mathfrak{B}} = \bigcup_{\mathfrak{A} \in \mathscr{M}} S^{\mathfrak{A}},\quad \text{对 } \mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi} \text{ 的每一关系或函数符号 } S,$$

$$c^{\mathfrak{B}} = c^{\mathfrak{A}},\quad \text{对任意 } \mathfrak{A} \in \mathscr{M} \text{ 和 } \mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi} \text{ 的每一个体常元 } c.$$

1.3.27 定义 令$(A,<)$是偏序集，δ是无穷基数，称$(A,<)$是**δ-有向结构**(或**$<\delta$-有向结构**) $\Leftrightarrow$ A的每一幂$\leqslant\delta$(或$<\delta$)的子集在A中有一上界，即若$A_1\subseteq A$且$|A_1|\leqslant\delta$(或$<\delta$)，则存在$y\in A$使得对A_1中每一元素x，$x<y$.

注意：(Ⅰ) 我们用"**有向结构**"指称"$<\omega$-有向结构".

(Ⅱ) 显然，对所有$\delta_1\leqslant\delta$，"δ-有向结构"蕴涵"δ_1-有向结构".

令λ是无穷基数，Φ是包含在某个$\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\infty\lambda\rho\pi})$中的公式类，我们用**$\Phi$的量词长度**$\mathrm{ql}(\Phi)$来指称最小的无穷基数$\lambda$使得

$$\Phi\subseteq\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\infty\lambda\rho\pi}).$$

1.3.28 Tarski-并定理 令Φ是包含在某个$\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\infty\lambda\rho\pi})$中的公式类使得

(1) Φ包含$\mathscr{L}$的所有原子公式和原子公式的否定，

(2) $\varphi\in\Phi \Rightarrow \varphi$的某个归约公式$\varphi^{*}\in\Phi$(参见1.3.6)，

(3) Φ在子公式下封闭.

令$\mathscr{M}$是$\mathscr{L}$的结构集使得关系$<^{\Phi}$在$\mathscr{M}$上是$<\mathrm{ql}(\Phi)$-有向的，则对每一$\mathfrak{A}\in\mathscr{M}$，
$$\mathfrak{A}<^{\Phi}\bigcup\mathscr{M}.$$

证明：施归纳于公式的复杂度，我们要证对每一$\varphi\in\Phi$和每一$f\in A^{\mathrm{Fv}(\varphi)}$，

$$\mathfrak{A}\models\varphi[f] \Rightarrow \bigcup\mathscr{M}\models\varphi[f]. \tag{1.11}$$

若φ是原子公式或原子公式的否定或形如$\bigvee\Psi$，$\bigwedge\Psi$，则(1.11)易证.(**注意**：φ的归约公式φ^{*}在Φ中且φ与φ^{*}逻辑等价，所以我们不用考虑$\varphi=\neg\psi$的情况.)

若φ是$\exists X\psi$，其中$X\subseteq\mathrm{Var}$，$|X|<\mathrm{ql}(\Phi)$. 令$Y=X\cup\mathrm{Fv}(\varphi)$. 因为$\Phi$在子公式下封闭，所以$|Y|<\mathrm{ql}(\Phi)$. 若$\mathfrak{A}\models\varphi[f]$，则存在$g\in A^{X}$使得$\mathfrak{A}\models\psi[f*g]$，据归纳假设，$\bigcup\mathscr{M}\models\psi[f*g]$，所以

$$\bigcup\mathscr{M}\models\varphi[f].$$

假设 φ 是 $\forall X\psi$ 且 $\mathfrak{A}\models\varphi[f]$，我们须证对任意 $g\in\bigcup_{\mathfrak{A}\in\mathscr{M}}A^X$，$\bigcup\mathscr{M}\models\psi[f*g]$. 对每一 $y\in Y$，选择一 $\mathfrak{A}_y\in\mathscr{M}$ 使得 $(f*g)(y)\in A_y$. 因为 $\mathscr{M}$ 是 $<\mathrm{ql}(\Phi)$-有向的且族 $\{\mathfrak{A}\}\cup\{\mathfrak{A}_y:y\in Y\}$ 的幂 $<\mathrm{ql}(\Phi)$（因为 $|Y|<\mathrm{ql}(\Phi)$ 且 $\mathrm{ql}(\Phi)$ 是无穷基数），所以存在 $\mathfrak{B}\in\mathscr{M}$ 使得 $\mathfrak{A}\prec^{\Phi}\mathfrak{B}$ 且对所有 $y\in Y$，$\mathfrak{A}_y\prec^{\Phi}\mathfrak{B}$. 显然，$\mathrm{Ran}(f*g)\subseteq B$ 且 $\mathfrak{B}\models\varphi[f]$，所以我们有 $\mathfrak{B}\models\psi[f*g]$，运用归纳假设于 $\mathfrak{B}$，我们有 $\bigcup\mathscr{M}\models\psi[f*g]$，所以 $\bigcup\mathscr{M}\models\varphi[f]$. □

1.3.29 推论 令 $\mathscr{M}$ 是结构类使得关系 $\prec_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 在 $\mathscr{M}$ 上是 $<\lambda$-有向的，则对每一 $\mathfrak{A}\in\mathscr{M}$，$\mathfrak{A}\prec_{\kappa\lambda\rho\pi}\bigcup\mathscr{M}$.

证明：令 $\Phi=\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi})$，因为 Φ 满足 1.3.28 的假设条件，所以据此定理，易得本推论. □

注意：1.3.29 可以看作 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$ 的初等链并定理的一种概括.

下面再引入两个公式集，它们在模型论中起特别重要的作用.

1.3.30 定义 令 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathscr{L}$ 的结构，令 $\mathscr{L}'=\mathscr{L}\cup\{\bar{a}:a\in A\}$ 使得 $\mathscr{L}\cap\{\bar{a}:a\in A\}=\varnothing$ 且若 $a\neq b$，则 $\bar{a}\neq\bar{b}$. 若 $X\subseteq\mathrm{Var}$ 且 $f:X\to A$，则对每一 $x\in X$，定义函数 $\bar{f}(x)=\overline{f(x)}$.

(1) 若 $\mathscr{L}$ 的关系和函数符号是有穷元的，则 $\mathfrak{A}$ 的**图象**(diagram)，记作 $\mathscr{D}(\mathfrak{A})$，是 $\mathscr{L}'_{\omega\omega}$ 的所有形如 $\varphi(\bar{a}_1,\cdots,\bar{a}_n)$ 的集合，其中 φ 是 $\mathscr{L}$ 的原子公式或原子公式的否定，$|\mathrm{Fv}(\varphi)|=n$ 且

$$\mathfrak{A}\models\varphi[a_1,\cdots,a_n].$$

(2) $\mathfrak{A}$ 的 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$-**初等图象**，记作 $\mathscr{D}^e_{\kappa\lambda\rho\pi}(\mathfrak{A})$，是 $\mathscr{L}'_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的所有形如 $\varphi(\bar{f})$ 的句子的集合，其中 φ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$-公式，$f\in A^{\mathrm{Fv}(\varphi)}$ 且 $\mathfrak{A}\models\varphi[f]$.

我们用 $\mathscr{D}^e(\mathfrak{A})$ 表示 $\mathscr{D}^e_{\omega\omega}(\mathfrak{A})$. 容易验证

$$\mathscr{D}^e_{\kappa\lambda\rho\pi}(\mathfrak{A})=\mathrm{Th}_{\kappa\lambda\rho\pi}((\mathfrak{A},a)_{a\in A}).$$

下列事实显然，请读者自证.

1.3.31 引理 令 $\mathfrak{A},\mathfrak{B}$ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的结构，令 $f\in B^A$ 是映射，

$$((\mathfrak{B},f(a))_{a\in A})\in\mathrm{Mod}(\mathscr{D}(\mathfrak{A}))\Leftrightarrow f:\mathfrak{A}\subseteq\mathfrak{B},$$

$$((\mathfrak{B},f(a))_{a\in A})\in\mathrm{Mod}(\mathscr{D}^e_{\kappa\lambda\rho\pi}(\mathfrak{A}))\Leftrightarrow f:\mathfrak{A}\preceq_{\kappa\lambda\rho\pi}\mathfrak{B}.$$ □

练 习

1.3.32 Sent($\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$)至多包含多少不逻辑等价的句子？

1.3.33 令 κ 正则基数，$\Sigma\subseteq$Sent($\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$)是全称句子集，$\mathscr{M}$ 是结构集，则 $\mathscr{M}=\mathrm{Mod}(\Sigma)\Leftrightarrow$

(1) $\mathscr{M}$ 在子结构下封闭，且

(2) 令 $\mathfrak{A}$ 是任意结构，若 $\mathfrak{A}$ 的所有幂$<\kappa$ 的子结构在 $\mathscr{M}$ 中有一同构结构，则 $\mathfrak{A}\in\mathscr{M}$(参见 A. Tarski 的[1958]).

1.3.34 (1) 语言 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的结构类称为**$\mathrm{EC}_{\Delta\Sigma}$-类** $\Leftrightarrow$ 存在用集合 I 指标的 EC_{Δ}-类的聚合$\{\mathscr{M}_i:i\in I\}$使得 $\mathscr{M}=\bigcup_{i\in I}\mathscr{M}_i$.

证明每一 $\mathrm{EC}_{\Delta\Sigma}(\mathscr{L}_{\omega\omega})$-类是 $\mathrm{EC}(\mathscr{L}_{\infty\omega})$-类.

设 $\mathscr{M}=\bigcup_{i\in I}\mathscr{M}_i$，其中每一 $\mathscr{M}_i$ 在某个形如 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$的无穷语言中是 EC_{Δ}-类，证明每一 $\mathrm{EC}_{\Delta\Sigma}(\mathscr{L}_{\omega\omega})$-类仍是 $\mathrm{EC}(\mathscr{L}_{\infty\omega})$-类.

(2) 举例说明：存在 $\mathscr{M}\in\mathrm{PC}_{\Delta}$ 但 $\mathscr{M}\notin\mathrm{PC}$.

(3) 令 $\mathscr{T}$ 是所有线序的类，$\mathscr{W}$ 是所有良序的类，证明：

$$\mathscr{T}-\mathscr{W}\in\mathrm{PC}-\mathrm{EC}_{\Delta}.$$

1.3.35 假设语言 $\mathscr{L}$ 只含有穷个非逻辑符号且不含函数符号，则每一 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$-前束公式等价一 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$-公式.

1.3.36 (1) 证明对可数语言 $\mathscr{L}$ 的每一可数结构 $\mathfrak{A}$，存在 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega_1}$-存在句 σ 使得对每一 $\mathfrak{B}$，$\mathfrak{B}\models\sigma\Leftrightarrow\mathfrak{A}\subseteq\mathfrak{B}$.

(2) 令 $\mathscr{M}$ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的**广义全称初等类**($\mathscr{M}\in\mathrm{UC}_{\Delta}(\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi})$)，即存在全称句子集 $\Sigma\subseteq$Sent($\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$)使得 $\mathscr{M}=\mathrm{Mod}_{\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}}(\Sigma)$. 证明：

$\mathscr{M}$ 在同构和子结构下封闭.

(3) 令 $\mathscr{M}\in\mathrm{PUC}_{\Delta}(\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi})$，即 $\mathscr{M}$ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的一前束全称句子集的所有模型的类，则 $\mathscr{M}$ 有下列性质：

① 对 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的每一结构 $\mathfrak{A}$，$S_\lambda(\mathfrak{A})\subseteq\mathscr{M}\Rightarrow\mathfrak{A}\in\mathscr{M}$，其中 $S_\lambda(\mathfrak{A})$表示由一个幂$<\lambda$ 的集合生成的 $\mathfrak{A}$ 的所有子结构的类.

证明①和下列②等价：

② 令 $\mathscr{M}_1$ 是 $\mathscr{M}$ 的子类使得$\subseteq$在 $\mathscr{M}_1$ 上是$<\lambda$-有向的，则

$$\bigcup \mathscr{M}_1 \in \mathscr{M}.$$

(4) 上述(3)的诸条件能否适用 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda p\kappa}$ 的任意全称类(称一模型类是**全称模型类** $\Leftrightarrow$ 它是一全称句的所有模型的类)?

(5) 找一个 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 的全称句 σ 使得 σ 在由 $\subseteq$ 线序的某个结构族的所有元素中成立但不在该族的并中成立.

(6) 若 λ 是极限基数,找一个 $\mathscr{L}_{\lambda^+\lambda}$ 的全称句 σ 使得 σ 有(5)所述的相同性质.

若 λ 是奇异基数,是否有可能在 $\mathscr{L}_{\lambda\lambda}$ 中选择这样一个句子?

当 λ 是后继基数时,这样的句子存在吗?

1.3.37 (1) 举反例证明,若删去或减弱"关系 $<_{\kappa\lambda p\kappa}$ 在 $\mathscr{M}$ 上是 $<\lambda$-有向的",则 1.3.29(从而 1.3.28)不成立.

(2) 令 $\langle I,<\rangle$ 是偏序集,$\{\Phi_i : i\in I\}$ 是公式集的族,$\{\mathfrak{A}_i : i\in I\}$ 是结构的族,δ 是无穷基数,假设:

① $\langle I,<\rangle$ 是 $<\delta$-有向的,

② 对某个无穷基数 λ,

$$\bigcup_{i\in I}\Phi_i \subseteq \mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\infty\lambda p\kappa}),$$

③ 对所有 $i\in I$,

$$\mathrm{ql}(\Phi_i)\leqslant\delta,$$

④ 每一 Φ_i 满足定理 1.3.28 的(1)—(3),

⑤ 对 $i\leqslant j$,

$$\Phi_i\subseteq\Phi_j,\quad \mathfrak{A}_i \prec^{\Phi_i} \mathfrak{A}_j.$$

证明对所有 $j\in I$,

$$\mathfrak{A}_j \prec^{\Phi_j} \bigcup_{i\in I}\mathfrak{A}_i.$$

第2章 证明论

与无穷逻辑的模型论相比，无穷逻辑的证明论相对贫乏；因为它的许多定理只是有穷逻辑相应定理的自然概括. 当然，在几个方面，前者仍有独特性. 一个是语言所涉及的基数的规模，主要是对合取和量词所运用的范围的基数限制. 例如在证明某些定理时，有一些公式就不能通过，因此就不得不在前提中增加限制条件. 另一个特点是一次可处理无穷多个公式. 例如，一公式可以从无穷多个公式（作为前提）推出从而使其证明的长度无穷. 对一公式一次可以代换无穷多个项或公式，等等. 第三个特点是绝大多数演绎系统为了保持完全性不得不引入反映集合论规律的公理或推理规则，而这对有穷逻辑是不必要的.

本章§1引入一些形式化演绎系统. 这些系统（有的还需对其基数加上某些限制）都是有完全性定理的. 当然，还有一些具有完全性的系统没有在本章引入，有兴趣的读者可以参见本书后列的参考文献. 本章§2主要讨论演绎定理以及由此得到的一些系统内的形式定理.

§1 演绎系统

给定语言 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$，我们称 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 有**完全可公理化的演绎系统** $\Leftrightarrow$ 存在用 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 描述的可公理化的演绎系统使得该系统确定的内定理集（类）恰好是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的有效公式集（类），否则称其为**不完全系**

统. 现在我们已经知道，并不是任何无穷语言 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 都有完全可公理化的演绎系统. 关于这一点，我们在下一章还要详细讨论.

一、基本演绎系统

为了方便，我们先引入两个定义.

2.1.1 定义 任给 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的公式 φ，递归定义公式 $\varphi\neg$ 如下：

(1) 若 φ 是原子公式，则 $\varphi\neg=\neg\varphi$，

(2) 若 $\varphi=\bigwedge\Phi$，则 $\varphi\neg=\bigvee\{\neg\varphi:\varphi\in\Phi\}$，

(3) 若 $\varphi=\bigvee\Phi$，则 $\varphi\neg=\bigwedge\{\neg\varphi:\varphi\in\Phi\}$，

(4) 若 $\varphi=\exists X\psi$，则 $\varphi\neg=\forall X\neg\psi$，

(5) 若 $\varphi=\forall X\psi$，则 $\varphi\neg=\exists X\neg\psi$.

2.1.2 定义 给定公式 φ 和函数 f（一般地，f 是从某个变元集到项集的函数，也可以是从一语言的公式集到另一语言的公式集的函数），

(1) 用 $S_f(\varphi)$ 表示 φ 中 $x\in\mathrm{Dom}(f)$ 的每一出现被 $f(x)$ 代换.

若 $\mathrm{Dom}(f)=X$，则用 $S_f^X(\varphi)$ 或 $S_{f(x)}^{x\in X}(\varphi)$ 来表示 $S_f(\varphi)$.

(2) 用 $SF_f(\varphi)$ 表示 φ 中 $x\in\mathrm{Dom}(f)$ 的每一自由出现被 $f(x)$ 代换.

若 $\mathrm{Dom}(f)=X$，则用 $SF_f^X(\varphi)$ 或 $SF_{f(x)}^{x\in X}(\varphi)$ 来表示 $SF_f(\varphi)$.

(3) 用 $SB_f(\varphi)$ 表示 φ 中 $x\in\mathrm{Dom}(f)$ 的每一约束出现被 $f(x)$ 代换.

若 $\mathrm{Dom}(f)=X$，则用 $SB_f^X(\varphi)$ 或 $SB_{f(x)}^{x\in X}(\varphi)$ 来表示 $SB_f(\varphi)$.

为了与传统记号一致，在后面不致混淆之处，我们有时也把 $SF_f(\varphi)$ 写作 $\varphi(\langle x/f(x):x\in X\rangle)$ 或者 $\varphi(x/f(x):x\in X)$，甚至 $\varphi(x/f(x))$.

显然 2.1.2 是有穷逻辑代换(substitution)概念的一种概括.

2.1.3 定义 无穷逻辑的**基本演绎系统** $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 定义如下：下列表达式中的公式和公式集都是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的公式和公式集，κ,λ,ρ,π 的

规定如第1章§1(即κ,λ,ρ,π都是基数. κ是无穷正则基数;$\lambda=0$或$\omega\leqslant\lambda\leqslant\kappa$;$\pi\leqslant\kappa$;$\rho$是无穷正则基数,若$\lambda$是奇异基数,则$\rho<\lambda$,若$\lambda$是正则基数,则$\rho\leqslant\kappa$).

(1) 公理(模式):

公理1 经典命题逻辑的重言式及其$\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$-**代换特例**.
(即若φ是(无穷)重言式,f是从φ的初始命题集的某个子集到$\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi})$的函数,则$\mathrm{S}_f(\varphi)$是公理).

公理2 $(\neg\varphi)\leftrightarrow(\varphi\rightarrow)$. (公理2的作用是引入缩写符号.)

公理3 $\bigwedge\limits_{\xi<\delta}\varphi_\xi\rightarrow\varphi_\tau$, 对$0<\delta<\kappa$且$\tau<\delta$.

公理3又称**合取公理**,它的另外两种表述是:

$\bigwedge\limits_{i\in I}\varphi_i\rightarrow\varphi$, 若$\varphi\in\{\varphi_i:i\in I\}\subseteq\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi})$且$|I|<\kappa$;或

$\bigwedge\Phi\rightarrow\varphi$, 若$\varphi\in\Phi\subseteq\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi})$,$|\Phi|<\kappa$.

当然,这样的表述一个比一个概括,但它们本质上是相同的(对下面的某些公理和推理规则,也可以类似看待).

公理4 $\forall X\varphi\rightarrow\mathrm{SF}_{f(x)}^{x\in X}(\varphi)$,

其中$X\subseteq\mathrm{Var}$,$|X|<\lambda$, f: $X\rightarrow\mathrm{Term}(\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi})$且$\varphi$中没有$x\in X$的自由出现在约束$f(x)$中某个变元的量词的辖域中.

公理5 $t\equiv t$, 其中$t\in\mathrm{Term}(\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi})$.

公理6 $\bigwedge\limits_{\xi<\delta}(t_\xi\equiv t_\xi')\rightarrow[\varphi(v_\xi/t_\xi:\xi<\delta)\leftrightarrow\varphi(v_\xi/t_\xi':\xi<\delta)]$,

其中$0<\delta<\kappa$,$\{v_\xi:\xi<\delta\}\subseteq\mathrm{Fv}(\varphi)$且在$\bigcup\limits_{\xi<\delta}(\mathrm{Fv}(t_\xi)\cup\mathrm{Fv}(t_\xi'))$中的变元没有一个在$\varphi$中约束出现.

公理5和公理6合称为**等词公理**.

(2) 推理规则:

规则1(分离规则) $\varphi,\varphi\rightarrow\psi\ /\ \psi$.

规则2(合取规则) $\{\psi\rightarrow\varphi:\varphi\in\Phi\}\ /\ \psi\rightarrow\bigwedge\Phi$.

规则3(概括规则) $\psi\rightarrow\varphi\ /\ \psi\rightarrow\forall X\varphi$,

其中$X\subseteq\mathrm{Var}$,$|X|<\lambda$且X中没有一个变元在ψ中自由出现.

后面我们也把上述基本演绎系统简称为**基本系统**.

二、扩张的演绎系统 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta;\Omega)$

下一章的 Karp-完全性定理和其它结果告诉我们，只有当 $\kappa=\omega_1,\lambda=\rho=\pi=\omega$ 时，$\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}$才是完全可公理化的. 为了使其它一些无穷语言也有完全可公理化的演绎系统，还必须在 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}$上增加表达其它集合论规律的公理集 Δ 和推理规则集 Ω 以构成扩张系统 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta;\Omega)$. 之所以要这样做，是因为当 $\kappa,\lambda\geqslant\omega_1$ 时要确定 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$-公式的意义须预设基本系统不能刻画的集合论事实，只有增加公理和推理规则才能在一定的集合论背景下谈论完全可公理化问题. 这一点在下一章和后面的有关章节还要详细讨论，在此我们只表述下列新增的公理和推理规则. 为此我们需要一些记号和定义.

2.1.4 记号 令$\{A_\xi:\xi<\gamma\}$是集合族，我们用$\prod\limits_{\xi<\gamma}A_\xi$ 表示定义在 γ 上的所有函数 f 的集合使得对每一 $\xi<\gamma,f(\xi)\in A_\xi$.

2.1.5 定义 称一公式集 Φ 是**矛盾公式集** $\Leftrightarrow$ Φ 包含某个公式 φ和它的否定$\neg\varphi$.

我们称公式集 Φ 是带有双重指标的(**公式**)**阵列**(array) $\langle\varphi_{\alpha\beta}:\alpha<\gamma,\beta<\gamma_\alpha\rangle$的**选择集** $\Leftrightarrow$ 对每一 $\alpha<\gamma$, Φ 恰好包含$\langle\varphi_{\alpha\beta}:\beta<\gamma_\alpha\rangle$中一公式. (选择集的另一种表述是，对每一 $f\in\prod\limits_{\alpha<\gamma}A_\alpha=\prod\limits_{\alpha<\gamma}\{\varphi_{\alpha\beta}:\beta<\gamma_\alpha\}$，$\langle\varphi_{\alpha\beta}:\alpha<\gamma,\beta<\gamma_\alpha\rangle$的选择集是$\langle f(\alpha):\alpha<\gamma\rangle$.)

说明：上述选择集类似(或在一定程度上刻画了)经典集合论系统的选择公理，因此称为选择集.

2.1.6 定义(Chang-分配律) 令 $\gamma<\kappa$ 是无穷基数，$\{\varphi_\xi:\xi<\gamma\}$是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的公式集，则**分配公理模式** CD_γ 表示下列公理模式：

$$\bigvee_{\alpha<\gamma}(\bigwedge_{\beta<\gamma}\varphi_{\alpha\beta}),$$

其中对某个 $\xi<\gamma$，上述每一 $\varphi_{\alpha\beta}$或是 φ_ξ 或是$\neg\varphi_\xi$，且对每一 $g\in\gamma^\gamma$，对某个 $\xi<\gamma$，选择集$\langle\varphi_{\alpha,g(\alpha)}:\alpha<\gamma\rangle$包含 φ_ξ 和$\neg\varphi_\xi$.

说明：（Ⅰ）上述模式首先由 C. C. Chang 在其[1957]研究布尔代数的表示性问题时考虑的，所以称为"Chang-分配律"．它不过是把对布尔代数的 α-可表示性转译为逻辑公理而已．

（Ⅱ）CD_γ 的另一种表述是：

对 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的幂 $<\kappa$ 的公式集 $\Phi_\xi, \xi<\gamma, \gamma<\kappa, \bigvee_{\xi<\gamma} \bigwedge \Phi_\xi$ 是分配公理模式 $\Leftrightarrow$ 对所有 $f\in\prod_{\xi<\gamma}\Phi_\xi$，选择集 $\langle f(\xi): \xi<\gamma\rangle$ 是矛盾的．

例如，

$$\varphi_{00}\vee\varphi_{01} \text{是 Chang-分配律} \Leftrightarrow \varphi_{00}=\varphi \text{ 且 } \varphi_{01}=\neg\varphi,$$

所以 $\varphi\vee\neg\varphi$ 是 CD_1．

（Ⅲ）对每一 $\gamma<\kappa$，CD_γ 是 $\mathscr{L}_{\gamma^+\lambda\rho\pi}$-公式，因此对每一 $\kappa\geq\gamma^+$，CD_γ 也是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$-公式．

为了加深理解，我们再举 CD_γ 的一个特例：令 $\gamma=2^\eta$，对 $\alpha,\beta<\gamma$，$\varphi_{\alpha\beta}$ 由下表给出，其中 $\{g_\xi: \xi<\gamma\}=\eta^\eta$，

	$\beta<\eta$	$\eta\leq\beta<\gamma$
$\alpha<\eta$	$\varphi_{\alpha\beta}=\neg\psi_{\alpha\beta}$	$\varphi_{\alpha\beta}=\neg\psi_{\alpha 0}$
$\xi<\gamma$	$\varphi_{\eta+\xi,\beta}=\psi_{\beta,g_\xi(\beta)}$	$\varphi_{\eta+\xi,\beta}=\psi_{0,g_\xi(0)}$

我们称序列 $\langle\varphi_{\alpha\beta}: \beta<\gamma\rangle$ 是阵列 $\langle\varphi_{\alpha\beta}: \alpha,\beta<\gamma\rangle$ 的第 α 个横排的序列．上例说明，对前面的 η 个横排，选择集 $\{\varphi_{\alpha,g_\xi(0)}: \alpha<\gamma\}$ 包含其每一横排中的一个公式 $\neg\psi_{\alpha,\beta_\alpha}$．对所有 $\alpha<\eta$ 使得 $g_\xi(\alpha)=\beta_\alpha$，$\{\varphi_{\alpha,g_\xi(0)}: \alpha<\gamma\}$ 也包含该排中的 $\psi_{\alpha,g_\xi(\alpha)}$，因此每个这样的选择集都包含一对矛盾公式 $\neg\psi_{\alpha,\beta_\alpha}$ 和 $\psi_{\alpha,g_\xi(\alpha)}$．例如，令上例 $\eta=1$，$\gamma=2$，则

$$\bigvee_{\alpha<2}(\bigwedge_{\beta<2}\varphi_{\alpha\beta})=(\varphi_{00}\wedge\varphi_{01})\vee(\varphi_{10}\wedge\varphi_{11})$$
$$=(\neg\psi_{00}\wedge\neg\psi_{00})\vee(\psi_{00}\wedge\psi_{00}).$$

显然，它是有效式．

2.1.7 定义 (1) 令 γ 是无穷基数使得 $(2^\gamma)^+\leqslant\kappa$，$\langle g_\xi: \xi<2^\gamma\rangle$ 是函数集 γ^γ 的元素的一固定序列，$\{\varphi_{\alpha\beta}: \alpha,\beta<\gamma\}$ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的公式集，则**分配公理模式** D_γ 表示下列公理模式：

$$\bigwedge_{\alpha<\gamma}(\bigvee_{\beta<\gamma}\varphi_{\alpha\beta})\to\bigvee_{\xi<2^\gamma}(\bigwedge_{\alpha<\gamma}\varphi_{\alpha,g_\xi(\alpha)}).$$

因为 $2^\gamma=|\gamma^\gamma|$，所以上述蕴涵式可以表述为：

$$\bigwedge_{\alpha<\gamma}(\bigvee_{\beta<\gamma}\varphi_{\alpha\beta})\to\bigvee_{f\in\gamma^\gamma}(\bigwedge_{\alpha<\gamma}\varphi_{\alpha,f(\alpha)}).$$

(2) 令 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 是无穷语言使得 κ 是强极限基数，$\{\Phi_\xi: \xi<\gamma\}$ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的幂 $<\kappa$ 的公式集的集合使得 $|\gamma|<\kappa$，则**分配公理模式** D_γ^+ 表示下列公理模式：

$$\bigwedge_{\xi<\gamma}\bigvee\Phi_\xi\to\bigvee\{\bigwedge_{\xi<\gamma}f(\xi): f\in\prod_{\xi<\gamma}\Phi_\xi\}.$$

说明：(Ⅰ) D_γ 也表达了一种广义分配律，可以把它看作是 de Morgan-律的一种概括.

(Ⅱ) D_γ 的另一种表述是：对每一无穷基数 γ 使得 $(2^\gamma)^+\leqslant\kappa$，$\Phi_\xi(\xi<\gamma)$ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的幂 $<\gamma$ 的公式集，则

$$\bigwedge_{\xi<\gamma}\bigvee\Phi_\xi\to\bigvee\{\bigwedge_{\xi<\gamma}f(\xi): f\in\prod_{\xi<\gamma}\Phi_\xi\}.$$

(Ⅲ) 因为 $(2^\gamma)^+\leqslant\kappa\Rightarrow 2^\gamma<\kappa$，所以 D_γ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$-公式.

(Ⅳ) D_γ 的一概括形式是：

$$\bigwedge_{\alpha<\gamma}(\bigvee_{\beta<\eta}\varphi_{\alpha\beta})\to\bigvee\{\bigwedge_{\alpha<\gamma}\varphi_{\alpha,f(\alpha)}: f\in\eta^\gamma\},$$

此形式更接近布尔代数的 Chang-分配律. 对 D_γ^+ 也有上述说明.

2.1.8 定义 (1) 令 $\gamma<\kappa$ 是无穷基数，$\Phi_\xi(\xi<\gamma,\gamma<\kappa)$ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的幂 $<\kappa$ 的公式集，则**分配律规则** DR_γ 是下列推理规则：

$$\{\psi\to\neg\bigwedge_{\xi<\gamma}f(\xi)\text{: 对所有 } f\in\prod_{\xi<\gamma}\Phi_\xi\}\ /\ \psi\to\neg\bigwedge_{\xi<\gamma}\bigvee\Phi_\xi.$$

(2) 令 $\gamma<\kappa$ 是无穷基数，$\kappa=\bigcup_{n<\omega}\kappa_n$ 使得对每一 $n<\omega$，$\kappa_n<\kappa$，令 $\{\Phi_\xi: \xi<\gamma\}$ 是由 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的幂 $\leqslant$ 某个 κ_n 的公式集构成的集合使得 $\gamma<\kappa$，则 κ_n-**分配律规则** κ_n-DR_γ 是下列推理规则：

$$\{\psi\to\neg\bigwedge_{\xi<\gamma}f(\xi)\text{: 对所有 } f\in\prod_{\xi<\gamma}\Phi_\xi\}\ /\ \psi\to\neg\bigwedge_{\xi<\gamma}\bigvee\Phi_\xi.$$

2.1.9 定义 令 $\gamma<\kappa$ 是无穷基数，**析取概括规则** IC_γ 是下列推理规则：

$$\psi\to\bigvee_{\xi<\gamma}\varphi_\xi \ \Big/\ \psi\to\bigvee_{\xi<\gamma}\forall X_\xi\varphi_\xi,$$

其中对每一 $\xi<\gamma$，ψ,φ_ξ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\kappa}$ 的公式，$X_\xi\subseteq\mathrm{Var}$，$|X_\xi|<\lambda$ 且：

(1) $X_\xi\cap X_\zeta=\varnothing$， 对 $\xi,\zeta<\gamma$ 使得 $\xi\neq\zeta$，

(2) $X_\xi\cap\bigcup\{\mathrm{Fv}(\varphi_\zeta):\zeta<\gamma,\zeta\neq\xi\}=\varnothing$， 对每一 $\xi<\gamma$，

(3) 每一 $x\in\bigcup_{\xi<\gamma}X_\xi$ 不在 ψ 中自由出现.

2.1.10 定义 (1) 令 $\gamma<\kappa$ 是无穷基数，**析取概括规则** DC_γ 是下列推理规则：

$$\psi\to\bigvee_{\xi<\gamma}\varphi_\xi \ \Big/\ \psi\to\forall X_0\varphi_0\vee\bigvee_{1\leqslant\xi<\gamma}\exists Y_\xi\forall X_\xi\varphi_\xi,$$

其中对每一 $\xi<\gamma$，ψ,φ_ξ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\kappa}$ 的公式，$X_\xi,Y_\xi\subseteq\mathrm{Var}$，$|X_\xi|,|Y_\xi|<\lambda$ 且下列条件满足：

① $X_\xi\cap X_\zeta=\varnothing$， 对所有 $\xi,\zeta<\gamma$ 使得 $0\leqslant\xi,\zeta<\gamma,\xi\neq\zeta$，

② $Y_\xi\cap X_\xi=\varnothing$， 对所有 ξ 使得 $1\leqslant\xi<\gamma$，

③ $X_\xi\cap\bigcup_{\eta<\xi}\mathrm{Fv}(\varphi_\eta)=\varnothing$， 对所有 ξ 使得 $1\leqslant\xi<\gamma$，

④ $\mathrm{Fv}(\varphi_\xi)\cup\bigcup_{\eta<\xi}X_\eta\subseteq Y_\xi$， 对所有 ξ 使得 $1\leqslant\xi<\gamma$，

⑤ 每一 $x\in X_0\cup\bigcup_{1\leqslant\xi<\gamma}X_\xi$ 不在 ψ 中自由出现.

说明：(Ⅰ) 推理规则 IC_γ 也称为 **γ-独立选择规则**，DC_γ 也称为 **γ-非独立选择规则**.

(Ⅱ) 为了使上述推理规则更直观，我们可以把它们写作公理模式. 对应 IC_γ 的 **γ-独立选择公理** BH_γ 规定如下：

$$\bigwedge_{\xi<\gamma}\exists X_\xi\varphi_\xi\to\exists\bigcup_{\xi<\gamma}X_\xi\bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_\xi,$$

其中对 $\xi,\zeta<\gamma$ 使得 $\xi\neq\zeta$，$X_\xi\cap X_\zeta=\varnothing$ 且对 $\zeta<\xi$，每一 $x\in X_\zeta$ 不在 φ_ξ 中自由出现. 例如，若对每一 $\xi<\gamma$，$X_\xi=\mathrm{Fv}(\varphi_\xi)$，则

BH_γ 在结构 $\mathfrak{A}$ 中成立 $\Leftrightarrow$ 赋值函数的聚合 $\{\varphi_\xi^{\mathfrak{A}}:\xi<\gamma\}$ 有一选择函数，其中 $\varphi_\xi^{\mathfrak{A}}=\{f\in A^{X_\xi}:\mathfrak{A}\models\varphi_\xi[f]\}\neq\varnothing$.

对应 DC_γ 的 **γ-非独立选择公理** DBH_γ 规定如下：

$$\exists X_0\varphi_0 \wedge \bigwedge_{1\leqslant\xi<\gamma} \forall \bigcup_{\zeta<\xi} X_\zeta \exists X_\xi \varphi_\xi \to \exists \bigcup_{\xi<\gamma} X_\xi \bigwedge_{\xi<\gamma} \varphi_\xi,$$

其中对 $\xi,\zeta<\gamma$ 使得 $\xi\neq\zeta$，$X_\xi\cap X_\zeta=\varnothing$ 且对 $\zeta<\xi$，每一 $x\in X_\xi$ 不在 φ_ζ 中自由出现.

（Ⅱ）仅当 $\gamma<\mathrm{cf}(\lambda)$ 时，BH_γ 和 DBH_γ 才是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的公式，而对任何语言 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$（其中 $\gamma<\kappa$，但不考虑 λ 的值），IC_γ 和 DC_γ 都是有意义的推理规则，所以 IC_γ 和 DC_γ 比 BH_γ 和 DBH_γ 更一般.

若 Δ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的公式集或是 D_γ^+ 或 BH_γ 或 DBH_γ 或包含后两者使得 $\gamma<\kappa\cap\lambda$，且 Ω 是任意析取概括规则或分配律规则，则 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta;\Omega)$ 是 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ **的扩张系统**. 当然，Δ 和 Ω 可以是空的.

若把上述各系统中关于量词和等词的公理和规则消去且令这些系统的公式都是 $\mathscr{L}_\kappa$ 的公式，则我们就得到相应的**无穷命题逻辑的演绎系统** $\mathbf{B}_\kappa(\Delta;\Omega)$.

我们称在 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta;\Omega)$ 中 φ 有一**从公式集 Γ 出发的形式证明** $\Leftrightarrow$ 存在公式序列 $\langle\psi_\xi:\ \xi\leqslant\delta\rangle$ 使得对每一 $\xi\leqslant\delta$，ψ_ξ 是 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的公理或属于 $\Delta\cup\Gamma$，或者从更前面的公式 $\psi_{\xi(0)},\cdots,\psi_{\xi(\tau)},\cdots$ 据 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 或 Ω 中推理规则得到的，且 $\psi_\delta=\varphi$. 这时称 φ 是 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta;\Omega)$ 的**内定理**，记作

"$\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta;\Omega)$；$\Gamma\vdash\varphi$"或"**在** $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta;\Omega)$ **中**，$\Gamma\vdash\varphi$".

在不致混淆之处，记为 $\Gamma\vdash\varphi$. 若 $\Gamma=\varnothing$，则记作 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta;\Omega)\vdash\varphi$ 或 $\vdash\varphi$，且称 φ 在 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta;\Omega)$ 中有一个**形式证明**. **注意**：当 $\kappa=\omega_1$ 时，上述公式序列的长度至多是可数的，否则该长度小于 $2^{>\kappa}=\bigcup_{\xi<\kappa}(2^\xi)^+$，但这样的公式序列的长度未必 $<\kappa$，这是因为据分配律规则，一个结论可以从小于 $2^{>\kappa}$ 个前提得到的. 类似地，对语言 $\mathscr{L}'\supseteq\mathscr{L}$，我们可以定义 $\mathbf{B}'_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta;\Omega)$ 及其内定理.

下面我们表述 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta;\Omega)$ 的几个特例，它们分别对应语言 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 中几种特别重要的类型. 我们这样做一方面是想要读者加深对各种特殊的演绎系统的了解，另一方面也因为它们都是完全可公理化的. 关于这一点我们将在下面两章证明.

三、几种特殊的演绎系统

2.1.11 定义 $\mathbf{B}_{\omega_1\omega}$的公理和规则定义如下：其中$\varphi,\psi$是$\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的公式，$\Phi$是$\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的可数公式集，$x,y\in\mathrm{Var}$，$t$是$\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的项，

公理 1 经典命题逻辑的重言式及其$\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$-代换特例.

公理 2 $(\neg\varphi)\leftrightarrow(\varphi\rightarrow)$.

公理 3 $\bigwedge\Phi\rightarrow\varphi$， 对$\varphi\in\Phi$.

公理 4 $\forall x\varphi\rightarrow\mathrm{SF}_t^x(\varphi)$， 其中$t$在$\varphi(x)$中对$x$自由.

据通常的记法，$\mathrm{SF}_t^x(\varphi)$可写作$\varphi(x/t)$或$\varphi(t)$.

公理 5 $x\equiv x$.

公理 6 (1) $x\equiv y\rightarrow y\equiv x$；

(2) $x\equiv t\wedge\varphi(x)\rightarrow\mathrm{SF}_t^x(\varphi)$，其中$t$的规定如公理 4.

规则 1 $\varphi,\varphi\rightarrow\psi\ /\ \psi$.

规则 2 $\{\psi\rightarrow\varphi:\varphi\in\Phi\}\ /\ \psi\rightarrow\bigwedge\Phi$.

规则 3 $\psi\rightarrow\varphi(x)\ /\ \psi\rightarrow\forall x\varphi(x)$，其中$x$不在$\psi$中自由出现.

说明：(Ⅰ) $\mathbf{B}_{\omega_1\omega}=\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}\cap\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\omega_1\omega})$.

(Ⅱ) $\mathbf{B}_{\omega_1\omega}$的 cut-free-规则系统请见 Barwise 的[1969b].

2.1.12 定义 $\mathbf{B}_{\kappa\omega}^*$的公理和规则定义如下：

公理 1—公理 6 形如 2.1.11 的公理 1—公理 6，但所涉及的公式是$\mathscr{L}_{\kappa\omega}$的公式，公式集是$\mathscr{L}_{\kappa\omega}$的幂$<\kappa$的公式集，项是$\mathscr{L}_{\kappa\omega}$的项，

推理规则分情况规定如下：

(1) 若$\kappa=\omega_1$，$\mathbf{B}_{\kappa\omega}^*$的规则就是$\mathbf{B}_{\omega_1\omega}$的规则.

(2) 若$\kappa>\omega_1$是无穷正则基数，

规则 1 $\varphi,\varphi\rightarrow\psi\ /\ \psi$.

规则 2（分配律规则 DR_γ） 令$\Phi_\xi(\xi<\gamma,\gamma<\kappa)$是$\mathscr{L}_{\kappa\omega}$的幂$<\kappa$的公式集，则

$$\{\psi\rightarrow\neg\bigwedge_{\xi<\gamma}f(\xi):\text{对所有 } f\in\prod_{\xi<\gamma}\Phi_\xi\}\ /\ \psi\rightarrow\neg\bigwedge_{\xi<\gamma}\bigvee\Phi_\xi.$$

规则 3(析取概括规则 IC_γ)　对无穷基数 $\gamma<\kappa$,

$$\psi\to\bigvee_{\xi<\gamma}\varphi_\xi\ /\ \psi\to\bigvee_{\xi<\gamma}\forall x_\xi\Phi_\xi,$$

其中对每一 $\xi<\gamma,\psi,\varphi_\xi$ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$的公式,且对每一 $\xi<\gamma,x_\xi\in \mathrm{Var}$ 不在 ψ 中自由出现且对 $\zeta\neq\xi,x_\xi$ 不在 φ_ζ 中自由出现.

(3) 若 $\kappa>\omega_1$ 且 $\mathrm{cf}(\kappa)=\omega$,

规则 1 和规则 3 如同(2).

规则 2(κ_n-分配律规则 κ_n-DR_γ)　令 $\kappa=\bigcup_{n<\omega}\kappa_n$ 且对每一 $n<\omega,\kappa_n<\kappa$ 使得对所有 $\xi<\gamma,\Phi_\xi$ 的幂≤某个 κ_n,则

$$\{\psi\to\neg\bigwedge_{\xi<\gamma}f(\xi):\text{对所有 } f\in\prod_{\xi<\gamma}\Phi_\xi\}\ /\ \psi\to\neg\bigwedge_{\xi<\gamma}\bigvee\Phi_\xi.$$

说明:(Ⅰ)$B_{\omega_1\omega}$的概括规则现成为析取概括规则的一个特例,$B_{\omega_1\omega}$的合取规则现成为分配律规则的一个特例,请读者自证.

(Ⅱ)$B^+_{\infty\omega}$的 Gentzen-型的系统见 J. Malitz 的[1966],p. 39.

还有一些完全可公理化的系统将在下一章引入. 现在我们来研究在 KPU 的扩张系统中如何表述演绎系统及其相应的概念.

四、KPU 的扩张系统中的演绎系统

如第 0—1 章所述,在 **KPU+无穷公理**的背景下,$\mathscr{L}_{\infty\omega}$的公式的聚合不再是一个集合. 但为了获得良好的性质,取得预期的结果,我们仍需要研究公式集,所以我们要引入 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$-片段的概念. 有了片段的概念,我们足以获得所需的许多重要的结果.

本小节我们在 **KPU+无穷公理**中工作.

2.1.13 定义　$\mathscr{L}_{\infty\omega}$的**片段**(fragment)是由 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$的公式和变元组成的集合 $\mathscr{L}_M$ 使得

(1) $\mathscr{L}_{\omega\omega}$的每一有穷公式在 $\mathscr{L}_M$ 中,

(2) 若 $\varphi\in\mathscr{L}_M$,则 φ 的每一子公式和 φ 的每一变元在 $\mathscr{L}_M$ 中,

(3) 若 $\varphi(v)\in\mathscr{L}_M$ 且 t 是 $\mathscr{L}$ 的项使得 t 中所有变元在 $\mathscr{L}_M$ 中,则 $\mathrm{SF}^v_t(\varphi)$在 $\mathscr{L}_M$ 中,

(4) 若 φ,ψ,v 在 $\mathscr{L}_M$ 中，则 $\neg\varphi$，$\varphi\neg$，$\exists v\varphi$，$\forall v\varphi$，$\varphi\vee\psi$，$\varphi\wedge\psi$ 在 $\mathscr{L}_M$ 中.

说明：(Ⅰ) 在此下标 M 只作为一指标，以后(例如 M 是可容集 $\mathfrak{M}$)它才起更重要的作用.

(Ⅱ) 上述的 $\varphi\neg$ 在 **KPU＋无穷公理**中有一 Σ-显定义，但没有 Σ-递归定义，因为在定义 2.1.1 中的 $\neg$ 不出现在该定义右边的公式的子公式的右边.

(Ⅲ) 若一片段的基数是可数的，则称其为**可数片段**，否则，称其为**不可数片段**. 后面章节的一些例子和定理将说明区别这两种片段相当重要.

不可数片段与可数片段相比其性质更接近二阶逻辑.

(Ⅳ) 若 $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_{\mathfrak{N}}=\mathbf{HF}_{\mathfrak{N}}$(见第 0 章 § 7)，则 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}=\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$. 若 $\mathfrak{M}$ 是可容集且 $\mathfrak{M}\subseteq\mathbf{HC}=\mathbf{H}(\omega_1)$，则 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 的片段. 若 $\mathfrak{M}=\mathbf{H}(\kappa^+)$(当 λ 是正则基数时，$\mathbf{H}(\lambda)$ 是可容集)，则 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}=\mathscr{L}_{\kappa^+\omega}$.

令 $\mathscr{L}_M$ 是 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$-片段. 称 $\mathscr{L}_M$-句子 σ 是**有效句**，记为 $\models\sigma$，$\Leftrightarrow$ 对每一 $\mathscr{L}$-模型 $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{A}\models\sigma$. 对某个"证明"概念，我们想通过论证

$$\models\sigma\Leftrightarrow\exists P(P\text{ 是 }\sigma\text{ 的一个证明}).$$

来证明 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$-完全性定理的一种概括. 为得此结果，我们需要某种"证明"的概念，需要它有某种"能行(effective)"的东西，而且应该在 $\mathscr{L}_M$ 和 $\mathscr{L}_M$-句子的证明的"规模(size)"之间存在一种关系.

2.1.14 定义 令 $\mathscr{L}_M$ 是 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$ 的片段，$\mathscr{L}_M$ 的公式集 Φ 称为 $\mathscr{L}_M$ 的**有效性质**(validity property) $\Leftrightarrow$ Φ 包含下列公理 1—6 且在规则 1—3 下封闭，而且对任意 $\varphi\in\mathscr{L}_M$，Φ 不包含 $\varphi\wedge\neg\varphi$：假设以下的项、公式和公式集都属于 $\mathscr{L}_M$，

公理 1 经典命题逻辑的重言式及其 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$-代换特例.

公理 2 $(\neg\varphi)\leftrightarrow(\varphi\neg)$.

公理 3 $\bigwedge\Phi\rightarrow\varphi$， 对 $\varphi\in\Phi$.

公理 4 $\forall v\varphi\rightarrow\mathrm{SF}_t^v(\varphi)$， 其中 t 在 $\varphi(v)$ 中对 v 自由.

公理 5 $v_\alpha\equiv v_\alpha$.

公理 6 (1) $v_\alpha \equiv v_\beta \to v_\beta \equiv v_\alpha$;

(2) $v \equiv t \wedge \varphi(v) \to \mathrm{SF}_t^v(\varphi)$, 其中 t 的规定如公理 4.

规则 1 若 $\varphi, \varphi \to \psi \in \Phi$, 则 $\psi \in \Phi$.

规则 2 若 $\bigwedge \Psi \in \mathscr{L}_M$ 且对每一 $\varphi \in \Psi, \psi \to \varphi \in \Phi$, 则

$$\psi \to \bigwedge \Psi \in \Phi.$$

规则 3 若 $\psi \to \varphi(v) \in \Phi$ 且 v 不在 ψ 中自由出现, 则

$$\psi \to \forall v \varphi(v) \in \Phi.$$

说明:(Ⅰ)显然,所有的有效性质的交就是基本系统 $\mathbf{B}_\infty$ 当 $\kappa = \infty$ 时的集合论表述.(Ⅱ)A. A. Adamson 在其[1980]表述了 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$ 的 cut-free-系统,在那里他是用一种 sequent-演算形式表述的,可以证明这样表述的系统对可数可容片段是完全的.

2.1.15 定义 (1) $\mathscr{L}_M$ 的句子 σ 称为 $\mathscr{L}_M$ 的**内定理**,记为 $\mathscr{L}_M \vdash \sigma$, $\Leftrightarrow$ σ 在 $\mathscr{L}_M$ 的每一有效性质中.

(2) σ 是根据公式集 Φ 的**内定理**,记为 $\mathscr{L}_M; \Phi \vdash \sigma$, $\Leftrightarrow$ σ 在 $\mathscr{L}_M$ 的每一包含 Φ 的有效性质中.

显见,谓词"*σ 是 L_M 的定理*"在 **KPU** 中是 Π_1-谓词,但不必然是 Δ_1-谓词(*一般也不是*),所以我们不能在 **KPU** 中断定存在 $\mathscr{L}_M$ 的所有内定理的集合. 为了在后面章节证明关于 $\mathscr{L}_M$ 的完全性定理和紧致性定理,我们首先要找一个与 $\mathscr{L}_M$ 的内定理概念相适应的 $\mathscr{L}_M$ 的证明概念. 在这种情况下,我们首先想到的证明概念是通常的证明概念:一 $\mathscr{L}_M$-证明是一良序序列 $\varphi_0, \cdots, \varphi_\beta$ 使得对 $\alpha \leqslant \beta$,每一 φ_α 或是 $\mathscr{L}_M$ 的上述公理之一或是据 $\mathscr{L}_M$ 的上述规则之一从该序列更前面的公式得到. 当然,我们可以(*在给定的更强的元理论中*)证明,

φ 是 $\mathscr{L}_M$ 的定理 $\Leftrightarrow$ 存在这样一个序列使得 $\varphi_\beta = \varphi$.

但这个证明概念太受限制,也没有我们需要的、可用于别的目的的良好性质. 因此下面我们引入与之不同的证明概念,以后我们可以看到它有我们需要的性质,而且定义它无需选择公理.

2.1.16 定义 (1) 称序对 P 是 $\mathscr{L}_M$-**证明** ⇔ 下列之一成立：

① $P=\langle n,\varphi\rangle$，其中 $1\leqslant n\leqslant 6$，且据 2.1.14，φ 是公理 n.

② $P=\langle f,\psi\rangle$，其中 f 是函数，$\mathrm{Dom}(f)=\{0,1\}$，$f(0)$ 是 $\mathscr{L}_M$-证明 P_0 使得 $2^{nd}(P_0)$(即 P_0 的第二个座标)形如$(\varphi\rightarrow\psi)$，$f(1)$ 是 $\mathscr{L}_M$-证明 P_1 使得 $2^{nd}(P_1)$形如 φ.

③ $P=\langle f,(\psi\rightarrow\bigwedge\Phi)\rangle$，其中 f 是函数，$\mathrm{Dom}(f)=\Phi$ 使得对每一 $\varphi\in\Phi$，$f(\varphi)$是诸 $\mathscr{L}_M$-证明的非空集，且对每一 $P_0\in f(\varphi)$，$2^{nd}(P_0)$形如 $\psi\rightarrow\varphi$.

④ $P=\langle P_0,(\varphi\rightarrow\forall v_\alpha\psi(v_\alpha))\rangle$，其中 P_0 是 $\mathscr{L}_M$-证明使得 $2^{nd}(P_0)$形如$(\varphi\rightarrow\psi(v_\alpha))$，且 v_α 不在 φ 中自由出现.

(2) 称 P 是 φ 的**证明** ⇔ P 是 $\mathscr{L}_M$-证明且 $\varphi=2^{nd}(P)$.

显见上述定义能在 **KPU** 中在 TC(P)上递归定义，据 0.4.5，它给出 **KPU** 中的 Δ_1-谓词，因此

$$\exists P(P\text{ 是 }\varphi\text{ 的 }\mathscr{L}_M\text{-证明})$$

是 φ 的一个 Σ_1-谓词.

现在我们离开上述较弱的元理论，进而考虑由集合 A 构造的最大论域 $\mathbf{V}_A$(第 0 章 § 7)，当然，$\mathbf{V}_A$ 也是 **KPU** 的"模型". 令 $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 是可容集且包含第 1 章 § 1 的二提到的常元 $\wedge,\vee,\neg,\exists,\forall,=$ 和谓词以及函数$(V,\#)$使得它们满足那里引入的语法公理. 现在我们能在 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 或 $\mathbf{V}_A$ 中解释第 1 章 § 1 的二和 2.1.16 的结果. 只要我们研究的是 Δ_1-概念，就能据第 0 章 § 6 引入的绝对性概念，知道上述结果在 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 和 $\mathbf{V}_A$ 中是相同的. 例如，对 $\varphi\in\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$，

"φ 是一 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$-公式"在 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 中真 ⇔ 它在 $\mathbf{V}_A$ 中真.

若还有 $\mathfrak{B}\in\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$，则

"$\mathfrak{B}\vdash\varphi$"在 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 中真 ⇔ φ 在 $\mathbf{V}_A$ 中真.

若 $P\in\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$，则

"P 是 φ 的 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$-证明"在 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 中真 ⇔ 它在 $\mathbf{V}_A$ 中真.

2.1.17 定义 (1) 若 $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}=(\mathfrak{A};M,\in,\cdots)$是可容集且

$\mathscr{L}$ 是语言使得 $\mathscr{L}$ 在 $\mathfrak{M}$ 上是 Δ_1，则

$$\mathscr{L}_{\mathfrak{M}} = \{\varphi \in \mathfrak{M}: \varphi \text{是} \mathscr{L}_{\infty\omega}\text{-公式}\}$$
$$= \{\varphi \in \mathfrak{M}: \mathfrak{M} \vdash \text{“}\varphi \text{是} \mathscr{L}_{\infty\omega}\text{-公式”}\}$$

称为 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$的**由 $\mathfrak{M}$ 给定的可容片段**.

(2) 若 $P \in \mathfrak{M}$ 且 P 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$-证明，则 P 称为 **$\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$-证明**.

易证可容片段 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 就是定义 2.1.13 意义上的片段.

有时我们也把可容片段 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 称为**可容(无穷)逻辑**，因为它有许多良好的性质，这些性质类似有穷逻辑的性质，长期以来被逻辑学家认为对一个逻辑是基本的.

练　习

2.1.18　证明下列 **Karp-系统**(C. Karp，[1964])与本节开头表述的系统等价：

(1) **Karp-基本系统**：其公理 1—公理 6，规则 1 与定义 2.1.3 的公理 1—公理 6，规则 1 相同，此外还有

公理 7　$\bigwedge_{\xi<\gamma}(\varphi \to \psi_\xi) \to (\varphi \to \bigwedge_{\xi<\gamma}\psi_\xi)$，　对 $0<\gamma<\kappa$.

公理 8　$\forall X(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \forall X\psi)$，　对 $X \subseteq \mathrm{Var}, |X|<\lambda$，其中 X 中没有一个变元在 φ 中自由出现.

规则 2　$\{\varphi_\xi: \xi<\gamma\} \,/\, \bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_\xi$，　对 $0<\gamma<\kappa$.

规则 3　$\varphi \,/\, \forall X\varphi$，　对 $X \subseteq \mathrm{Var}, |X|<\lambda$.

(2) **Karp-扩张系统**：其 $CD_\gamma, D_\gamma, BH_\gamma$ 和 DBH_γ 与定义 2.1.6—2.1.7 以及 2.1.10 后面的说明(Ⅱ)的 $CD_\gamma, D_\gamma, BH_\gamma$ 和 DBH_γ 相同，此外还有下列两个规则：

$$\bigvee_{\xi<\gamma}\varphi_\xi \,/\, \bigvee_{\xi<\gamma}\forall X_\xi\varphi_\xi, \qquad (IC_\gamma')$$

其中限制条件如 2.1.9 的 IC_γ，除了删去约束条件(3).

$$\bigvee_{\xi<\gamma}\varphi_\xi \,/\, \forall X_0\varphi_0 \vee \bigvee_{1\leqslant\xi<\gamma}\exists Y_\xi\forall X_\xi\varphi_\xi, \qquad (DC_\gamma')$$

其中限制条件如 2.1.10 的 DC_γ，除了删去约束条件(5).

2.1.19　令 $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta;\Omega)$是任一扩张的演绎系统，$\Phi$ 是

$\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的幂$<\kappa$的公式集，$\varphi$是$\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的公式．我们称$\Phi$相对$\mathbf{B}$是（语法）一致的$\Leftrightarrow \mathbf{B}\nvdash\neg\bigwedge\Phi$．我们称$\varphi$相对$\mathbf{B}$是（语法）一致的$\Leftrightarrow$ $\{\varphi\}$相对$\mathbf{B}$是一致的．证明：

（1）$\bigwedge\Phi$相对$\mathbf{B}$一致$\Leftrightarrow$对所有$\varphi\in\Phi$，φ相对$\mathbf{B}$一致．

（2）$\bigvee\Phi$相对$\mathbf{B}$一致$\Leftrightarrow$对某个$\varphi\in\Phi$，φ相对$\mathbf{B}$一致．

（3）$\forall X\varphi$相对$\mathbf{B}$一致$\Leftrightarrow$对所有$\mathrm{SF}_f(\varphi)$，$\mathrm{SF}_f(\varphi)$相对$\mathbf{B}$一致，其中$\mathrm{SF}_f(\varphi)$的规定如公理4的规定．

（4）$\exists X\varphi$相对$\mathbf{B}$一致$\Leftrightarrow$对某个$\mathrm{SF}_f(\varphi)$，$\mathrm{SF}_f(\varphi)$相对$\mathbf{B}$一致，其中$\mathrm{SF}_f(\varphi)$的规定如公理4的规定．

2.1.20　证明$\mathbf{B}_{\omega_1\omega}$是$\mathbf{B}^*_{\infty\omega}$的特例．

2.1.21　在**KPU＋无穷公理**中证明：若φ是$\mathscr{L}_{\infty\omega}$的公式使得$\mathrm{Sub}(\varphi)$可数，则存在$\mathscr{L}_{\infty\omega}$的可数片段$\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$使得$\varphi\in\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$．

2.1.22　（1）令$\mathfrak{A}$是$\mathscr{L}_{\infty\omega}$的结构，$\mathscr{L}_M$是$\mathscr{L}_{\infty\omega}$的片段，$\Phi_{\mathfrak{A}}=\{\varphi(\vec{v}_n)\in\mathscr{L}_M:\mathfrak{A}\models\forall\vec{v}_n\varphi(\vec{v}_n)\}$，证明$\Phi_{\mathfrak{A}}$是有效性质．

（2）令$\mathscr{K}$是诸有效性质的集合，证明$\bigcap\mathscr{K}=\bigcap\{\Phi:\Phi\in\mathscr{K}\}$是有效性质．

2.1.23　证明CD_γ是$\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\mathrm{DR}_\gamma)$的内定理．

§2　演 绎 定 理

一、命题逻辑中的演绎定理

无穷命题逻辑的语言$\mathscr{L}_\kappa$由初始命题符号集$\{p_\xi:\xi<\kappa\}$或$\{p_{\alpha\beta}:\alpha,\beta<\kappa\}$和命题联结词以及各种括号组成，其中$\kappa$是无穷正则基数（据1.2.15，奇异基数的情况无需专门考虑）．$\mathscr{L}_\kappa$的公式集$\mathrm{Form}(\mathscr{L}_\kappa)$是包含上述初始命题符号且在$\neg$和$\bigwedge$（$\bigwedge$作用于幂$<\kappa$的公式集）下封闭的最小公式集（类）．**无穷命题逻辑的演绎系统**

$\mathbf{B}_\kappa$ 由定义 2.1.3 的公理 1—公理 3，规则 1 和规则 2 构成. **无穷命题逻辑的扩张演绎系统**记为 $\mathbf{B}_\kappa(\Delta;\Omega)$，其中 Δ 是新增公理集，Ω 是新增规则集. **$\mathbf{B}_\kappa$ 的极限系统** $\mathbf{B}_\infty=\{\mathbf{B}_\kappa:\ \kappa\in \mathbf{CN}_\mathbf{I}\}$.

2.2.1 引理(导出的合取规则) 在 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta;\Omega)$ 中，有下列导出规则：对 $0<\gamma<\kappa$，

$$\{\varphi_\xi:\ \xi<\gamma\}\ /\ \bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_\xi.$$

证明：

(1)	φ_ξ,	对所有 $\xi<\gamma$,	假设.
(2)	$\psi\vee\neg\psi\rightarrow\varphi_\xi$,	对所有 $\xi<\gamma$,	(1)，公理 1，规则 1.
(3)	$\psi\vee\neg\psi\rightarrow\bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_\xi$,		(2)，规则 2.
(4)	$\bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_\xi$,		(3)，公理 1，规则 1.

□

从上述导出的合取规则易得 2.1.3 的规则 2，所以在实际使用中，它们可互换. 类似地，我们在 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta;\Omega)$ 中也有有穷逻辑的各种导出规则的概括形式，特别是**等值置换**的概括形式.

下面若不作说明，$\Phi,\Gamma,\Sigma,\Delta,\cdots$ 是 $\mathscr{L}_\kappa$ 的公式集，$\varphi,\psi,\theta,\cdots$ 是 $\mathscr{L}_\kappa$ 的公式.

2.2.2 引理 令 $\mathscr{L}_\kappa$ 是任意无穷命题语言，$\mathscr{L}'_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 是任意无穷语言，$\mathbf{B}_\kappa(\Delta;\Omega)$ 和 $\mathbf{B}'_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta;\Omega)$ 分别是用 $\mathscr{L}_\kappa$ 和 $\mathscr{L}'_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 表述的命题逻辑和谓词逻辑的演绎系统，则

$$\mathbf{B}_\kappa(\Delta;\Omega)\vdash\varphi\ \Rightarrow\ \mathbf{B}'_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta;\Omega)\vdash \mathrm{S}_f^X(\varphi),$$

其中 f 是从 φ 的初始命题符号集的一子集 X 到 $\mathscr{L}'_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的公式集中的任意函数.

证明：显然，$\mathrm{S}_f^X(\varphi)$ 是 $\mathscr{L}'_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的公式. 令 $\langle\psi_\xi:\ \xi\leqslant\gamma\rangle$ 是 $\mathbf{B}_\kappa(\Delta;\Omega)$ 中 φ 的长度为 γ 的形式证明，令 X_1 是在这个证明中出现的所有初始命题符号的集合. 我们令 $f_1=f\cup g$，其中函数 $g:\ (X_1-X)\rightarrow \mathrm{Form}(\mathscr{L}'_{\kappa\lambda\rho\pi})$. 施归纳于上述形式证明的长度，下证：

$\langle S_{f_1}^{X_1}(\psi_\xi)：\xi\leqslant\gamma\rangle$ 是 $\mathbf{B}'_{\kappa\lambda\mu\pi}(\Delta;\Omega)$ 中 $S_f^X(\varphi)$ 的形式证明，

其中 $S_{f_1}^{X_1}(\psi_\gamma)=S_f^X(\varphi)$.

对每一 $\xi\leqslant\gamma$，若 ψ_ξ 是 $\mathbf{B}_\kappa(\Delta;\Omega)$ 的公理或属于 Δ，则 $S_{f_1}^{X_1}(\psi_\xi)$ 是 ψ_ξ 在 $\mathscr{L}'_{\kappa\lambda\mu\pi}$ 中的代换特例. 若 ψ_ξ 从更前面的公式 $\psi_{\xi(0)},\cdots,\psi_{\xi(\tau)},\cdots$ 据分离规则或合取规则或分配律规则得到，则 $S_{f_1}^{X_1}(\psi_\xi)$ 是从(它前面)相应的公式 $S_{f_1}^{X_1}(\psi_{\xi(0)}),\cdots,S_{f_1}^{X_1}(\psi_{\xi(\tau)}),\cdots$ 据同一个规则得到的. 因为 $S_{f_1}^{X_1}(\psi_\gamma)=S_f^X(\varphi)$，所以 $\mathbf{B}'_{\kappa\lambda\mu\pi}(\Delta;\Omega)\vdash S_f^X(\varphi)$. □

2.2.3 定义 在 $\mathbf{B}_\kappa(\Delta;\Omega)$ 中，

$\Phi;\Gamma\vdash\varphi\Leftrightarrow\Phi\vdash\varphi$ 或存在 $\{\varphi_\xi：\xi<\gamma\}\subseteq\Gamma$，$0<\gamma<\kappa$，使得

$$\Phi\vdash\bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_\xi\rightarrow\varphi.$$

2.2.4 定理 在 $\mathbf{B}_\kappa(\Delta;\Omega)$ 中，$0<\gamma<\kappa$，

(1) 若 $\Phi;\Gamma\vdash\varphi$ 且 $\Phi;\Gamma\vdash\varphi\rightarrow\psi$，则 $\Phi;\Gamma\vdash\psi$.

(2) 若对所有 $\xi<\gamma$，有 $\Phi;\Gamma\vdash\psi\rightarrow\varphi_\xi$，则 $\Phi;\Gamma\vdash\psi\rightarrow\bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_\xi$.

(3) 令 $\mathrm{DR}_\gamma\in\Omega$，对每一 $\xi<\gamma$，Ψ_ξ 是 $\mathscr{L}_\kappa$ 的幂 $<\kappa$ 的公式集且 κ 是强极限基数，若

$$\text{对所有 } f\in\prod_{\xi<\gamma}\Psi_\xi,\text{ 有 }\Phi;\Gamma\vdash\psi\rightarrow\neg\bigwedge_{\xi<\gamma}f(\xi),$$

则
$$\Phi;\Gamma\vdash\psi\rightarrow\neg\bigwedge_{\xi<\gamma}\bigvee\Psi_\xi.$$

(4) 令 $\kappa_n\text{-}\mathrm{DR}_\gamma\in\Omega$，$\kappa=\bigcup_{n<\omega}\kappa_n$ 使得对每一 $n<\omega$，$\kappa_n<\kappa$，且对每一 $\xi<\gamma$，Ψ_ξ 是 $\mathscr{L}_\kappa$ 的幂 $\leqslant$ 某个 κ_n 的公式集，若

$$\text{对所有 } f\in\prod_{\xi<\gamma}\Psi_\xi,\text{ 有 }\Phi;\Gamma\vdash\psi\rightarrow\neg\bigwedge_{\xi<\gamma}f(\xi),$$

则
$$\Phi;\Gamma\vdash\psi\rightarrow\neg\bigwedge_{\xi<\gamma}\bigvee\Psi_\xi.$$

证明：不妨假设 κ 是正则基数. 首先我们注意到，若 $\Gamma=\varnothing$，则(1)—(4)就是推理规则. 若 $\Gamma\neq\varnothing$ 且对任意 ψ 有 $\Phi;\Gamma\vdash\psi$，则据 2.2.3，存在 $\varphi_0,\cdots,\varphi_\xi\in\Gamma$，其中 $\xi<\gamma$，$0<\gamma<\kappa$，使得 $\Phi\vdash\bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_\xi\rightarrow\psi$. 因为若 $\Phi\vdash\psi$，我们能取 $\gamma=1$ 和任意 $\varphi_0\in\Gamma$，则据 $\psi\rightarrow(\varphi_0\rightarrow\psi)$ 和分

离规则，我们有 $\Phi\vdash\varphi_0\to\psi$，即 $\Phi\vdash\bigwedge\varphi_0\to\psi$.

(1) 假设 $\Gamma\neq\varnothing$. 若 $\Phi;\Gamma\vdash\varphi$ 且 $\Phi;\Gamma\vdash\varphi\to\psi$，则据上述说明，存在 Γ 的幂 $<\kappa$ 的子集 Γ_1 和 Γ_2 使得

$$\Phi\vdash\bigwedge\Gamma_1\to\varphi,\quad \Phi\vdash\bigwedge\Gamma_2\to(\varphi\to\psi).$$

令 $\theta=\bigwedge\Gamma_1\wedge\bigwedge\Gamma_2$，据 κ 的基数性质，θ 是 $\mathscr{L}_\kappa$ 的公式，且

$$\Phi\vdash\theta\to\varphi,\quad \Phi\vdash\theta\to(\varphi\to\psi),$$

据公理 1 和分离规则，$\Phi\vdash\theta\to\psi$，所以易得 $\Phi;\Gamma\vdash\psi$.

(2) 假设 $\Gamma\neq\varnothing$. 若对所有 $\xi<\gamma$，有 $\Phi;\Gamma\vdash\psi\to\varphi_\xi$，则对每一 $\xi<\gamma$，存在 $\Gamma_\xi\subseteq\Gamma$ 使得 $|\Gamma_\xi|<\kappa$ 且 $\Phi\vdash\bigwedge\Gamma_\xi\to(\psi\to\varphi_\xi)$. 令

$$\theta=\bigwedge_{\xi<\gamma}\bigwedge\Gamma_\xi,$$

据 κ 的正则性，θ 是 $\mathscr{L}_\kappa$ 的公式，因此据合取公理，对每一 $\xi<\gamma$，$\Phi\vdash\theta\to\bigwedge\Gamma_\xi$，所以对所有 $\xi<\gamma$，$\Phi\vdash\theta\to(\psi\to\varphi_\xi)$，即 $\Phi\vdash\theta\wedge\psi\to\varphi_\xi$，据合取规则，$\Phi\vdash\theta\wedge\psi\to\bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_\xi$. 所以易得 $\Phi;\Gamma\vdash\psi\to\bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_\xi$.

(3) 假设 $\Gamma\neq\varnothing$ 且对所有 $f\in\prod_{\xi<\gamma}\Psi_\xi$，

$$\Phi;\Gamma\vdash\psi\to\neg\bigwedge_{\xi<\gamma}f(\xi),$$

则对所有 $f\in\prod_{\xi<\gamma}\Psi_\xi$，存在 Γ 的幂 $<\kappa$ 的子集 Γ_f 使得

$$\Phi\vdash\bigwedge\Gamma_f\to(\psi\to\neg\bigwedge_{\xi<\gamma}f(\xi)).$$

因为 κ 是强极限基数，所以 $\theta=\bigwedge\{\Gamma_f:\ f\in\prod_{\xi<\gamma}\Psi_\xi\}$ 是 $\mathscr{L}_\kappa$ 的公式. 据合取公理，对每一 $f\in\prod_{\xi<\gamma}\Psi_\xi$，有 $\vdash\theta\to\bigwedge\Gamma_f$，所以

$$\Phi\vdash\theta\wedge\psi\to\neg\bigwedge_{\xi<\gamma}f(\xi),$$

据分配律规则 DR_γ，

$$\Phi\vdash\theta\wedge\psi\to\neg\bigwedge_{\xi<\gamma}\bigvee\Psi_\xi,$$

所以

$$\Phi\vdash\theta\to(\psi\to\neg\bigwedge_{\xi<\gamma}\bigvee\Psi_\xi),$$

因此

$$\Phi;\Gamma\vdash\psi\to\neg\bigwedge_{\xi<\gamma}\bigvee\Psi_\xi.$$

(4)的证明类似(3). □

注意：(3)和(4)对分配律规则一般不成立，原因是这样的规则所依据的前提的个数未必$<\kappa$.

2.2.5 演绎定理(Karp,[1964]) 在$\mathbf{B}_\kappa(\Delta;\Omega)$中，

(1) $\Phi;\Gamma\vdash\varphi\Leftrightarrow\Phi\cup\Gamma\vdash\varphi$.

(2) 若$\Gamma=\{\varphi_\xi:\ \xi<\gamma\}$，其中$0<\gamma<\kappa$，

$$\Phi\vdash\bigwedge\Gamma\to\varphi\Leftrightarrow\Phi\cup\Gamma\vdash\varphi.$$

证明：(1)"$\Rightarrow$"显然. 下证"$\Leftarrow$"：设$\Phi\cup\Gamma\vdash\varphi$，则存在从假设$\Phi\cup\Gamma$到$\varphi$的形式证明$\langle\varphi_\xi:\ \xi\leqslant\gamma\rangle$使得$\varphi_\gamma=\varphi$. 运用超穷归纳我们来证明：对所有$\xi\leqslant\gamma$，$\Phi;\Gamma\vdash\varphi_\xi$. 若$\varphi_\xi$是公理或是$\Delta$中的元素或是$\Phi$中的公式，则$\Phi\vdash\varphi_\xi$，所以$\Phi;\Gamma\vdash\varphi_\xi$. 若$\varphi_\xi\in\Gamma$，则$\vdash\varphi_\xi\to\varphi_\xi$，所以仍有$\Phi;\Gamma\vdash\varphi_\xi$. 若$\varphi_\xi$是据分离规则或合取规则或分配律规则从更前面诸公式$\varphi_\zeta$(其中$\zeta<\xi$)中得到，则据归纳假设，$\Phi;\Gamma\vdash\varphi_\zeta$，据定理2.2.4，$\Phi;\Gamma\vdash\varphi_\xi$. 因为$\varphi=\varphi_\gamma$，所以$\Phi;\Gamma\vdash\varphi$.

(2) 据(1)只须证$\Phi\vdash\bigwedge\Gamma\to\varphi\Leftrightarrow\Phi;\Gamma\vdash\varphi$. 而这显然. □

2.2.6 推论 在上述$\mathrm{B}_\kappa(\Delta;\Omega)$中，

$$\Phi\cup\{\varphi\}\vdash\psi\Leftrightarrow\Phi\vdash\varphi\to\psi.\ \square$$

2.2.7 定理(Karp,[1964]) 在基本系统$\mathbf{B}_\kappa$中，

(1) (**吸收律**)

(a) $\vdash\bigwedge\varphi\cdots\varphi\leftrightarrow\varphi$.

(b) $\vdash\bigvee\varphi\cdots\varphi\leftrightarrow\varphi$.

其中$\bigwedge\varphi\cdots\varphi$和$\bigvee\varphi\cdots\varphi$分别表示对$<\kappa$个$\varphi$的重复合取和析取.

(2) (a) $\vdash\bigwedge_{\xi<\gamma}(\varphi_\xi\to\psi_\xi)\to(\bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_\xi\to\bigwedge_{\xi<\gamma}\psi_\xi)$.

(b) $\vdash\bigwedge_{\xi<\gamma}(\varphi\to\psi_\xi)\to(\varphi\to\bigwedge_{\xi<\gamma}\psi_\xi)$.

(c) $\vdash\bigwedge_{\xi<\gamma}(\varphi_\xi\to\psi)\to(\bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_\xi\to\psi)$.

(3) (a) $\vdash\bigwedge_{\xi<\gamma}(\varphi_\xi\to\psi_\xi)\to(\bigvee_{\xi<\gamma}\varphi_\xi\to\bigvee_{\xi<\gamma}\psi_\xi)$.

(b) $\vdash \bigwedge_{\xi<\gamma}(\varphi\to\psi_\xi)\to(\varphi\to\bigvee_{\xi<\gamma}\psi_\xi)$.

(c) $\vdash \bigwedge_{\xi<\gamma}(\varphi_\xi\to\psi)\to(\bigvee_{\xi<\gamma}\varphi_\xi\to\psi)$.

(4)(**等值律**)

(a) $\vdash \bigwedge_{\xi<\gamma}(\varphi_\xi\leftrightarrow\psi_\xi)\to(\bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_\xi\leftrightarrow\bigwedge_{\xi<\gamma}\psi_\xi)$.

(b) $\vdash \bigwedge_{\xi<\gamma}(\varphi_\xi\leftrightarrow\psi_\xi)\to(\bigvee_{\xi<\gamma}\varphi_\xi\leftrightarrow\bigvee_{\xi<\gamma}\psi_\xi)$.

(5)(**否定律**)

(a) $\vdash \bigwedge_{\xi<\gamma}\neg\varphi_\xi\leftrightarrow\neg\bigvee_{\xi<\gamma}\varphi_\xi$.

(b) $\vdash \bigvee_{\xi<\gamma}\neg\varphi_\xi\leftrightarrow\neg\bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_\xi$.

(c) $\vdash \bigwedge_{\alpha<\gamma}(\bigvee_{\beta<\delta}\neg\varphi_{\alpha\beta})\leftrightarrow\neg\bigvee_{\alpha<\gamma}(\bigwedge_{\beta<\delta}\varphi_{\alpha\beta})$.

(d) $\vdash \bigvee_{\alpha<\gamma}(\bigwedge_{\beta<\delta}\neg\varphi_{\alpha\beta})\leftrightarrow\neg\bigwedge_{\alpha<\gamma}(\bigvee_{\beta<\delta}\varphi_{\alpha\beta})$.

其中 $\varphi_{\alpha\beta}(\alpha<\gamma;\beta<\delta;\gamma,\delta<\kappa)$是 $\mathscr{L}_\kappa$ 的任意公式.

(6)(**广义-de Morgan-律**)

(a) $\vdash \bigwedge_{\xi<\gamma}(\varphi\vee\psi_\xi)\leftrightarrow\varphi\vee\bigwedge_{\xi<\gamma}\psi_\xi$.

(b) $\vdash \bigvee_{\xi<\gamma}(\varphi\wedge\psi_\xi)\leftrightarrow\varphi\wedge\bigvee_{\xi<\gamma}\psi_\xi$.

(7)(**广义结合律**) 令 $\gamma=\bigcup\{\gamma_\beta:\beta<\varepsilon\}$(即 γ 的共尾度是 ε)且对每一 $\beta<\varepsilon,\delta_\beta=\bigcup\{\gamma_\alpha:\alpha<\beta\}$,

(a) $\vdash \bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_\xi\leftrightarrow\bigwedge_{\beta<\varepsilon}(\bigwedge_{\xi<\gamma_\beta}\varphi_{\delta_\beta+\xi})$.

(b) $\vdash \bigvee_{\xi<\gamma}\varphi_\xi\leftrightarrow\bigvee_{\beta<\varepsilon}(\bigvee_{\xi<\gamma_\beta}\varphi_{\delta_\beta+\xi})$.

(8)(**广义交换律**) 令 $\{\varphi_\xi:\xi<\gamma\}=\{\varphi_{\beta(\xi)}:\xi<\eta\}$,

(a) $\vdash \bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_\xi\leftrightarrow\bigwedge_{\xi<\eta}\varphi_{\beta(\xi)}$.

(b) $\vdash \bigvee_{\xi<\gamma}\varphi_\xi\leftrightarrow\bigvee_{\xi<\eta}\varphi_{\beta(\xi)}$.

(c) 若 $f:\gamma\to\gamma$ 是单射,则

$\vdash \bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_\xi\leftrightarrow\bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_{f(\xi)}$.

$\vdash \bigvee_{\xi<\gamma}\varphi_\xi\leftrightarrow\bigvee_{\xi<\gamma}\varphi_{f(\xi)}$.

(9) 令 $\gamma=\eta+\tau$,

(a) $\vdash \bigwedge_{\xi<\tau}\varphi_{\eta+\xi}\to(\bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_\xi\leftrightarrow\bigwedge_{\xi<\eta}\varphi_\xi)$.

(b) $\vdash \bigwedge_{\xi<\tau}\neg\varphi_{\eta+\xi}\to(\bigvee_{\xi<\gamma}\varphi_\xi\leftrightarrow\bigvee_{\xi<\eta}\varphi_\xi)$.

证明:(1) 证(a):据公理 3,$\vdash \bigwedge\varphi\cdots\varphi\to\varphi$,而据公理 1 和合取规则,$\vdash\varphi\to\bigwedge\varphi\cdots\varphi$. (b)是(a)的对偶定理.

(2) (b)和(c)是(a) 的特例,所以只须证(a):

①	$\bigwedge_{\xi<\gamma}(\varphi_\xi\to\psi_\xi)$,	假设.
②	$\bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_\xi$,	假设.
③	$\varphi_\xi\to\psi_\xi$, 对所有 $\xi<\gamma$,	①,公理 3,规则 1.
④	φ_ξ, 对所有 $\xi<\gamma$,	②,公理 3,规则 1.
⑤	$\bigwedge_{\xi<\gamma}\psi_\xi$,	③,④,规则 1,2.2.1.
⑥	$\bigwedge_{\xi<\gamma}(\varphi_\xi\to\psi_\xi)\to(\bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_\xi\to\bigwedge_{\xi<\gamma}\psi_\xi)$,	①,②,⑤,推论 2.2.6.

(3) (b)和(c)是(a) 的特例,所以只须证(a):

①	$\bigwedge_{\xi<\gamma}(\varphi_\xi\to\psi_\xi)$,	假设.
②	$\varphi_\xi\to\psi_\xi$, 对所有 $\xi<\gamma$,	①,公理 3,规则 1.
③	$\neg\psi_\xi\to\neg\varphi_\xi$, 对所有 $\xi<\gamma$,	②,逆否.
④	$\bigwedge_{\xi<\gamma}(\neg\psi_\xi\to\neg\varphi_\xi)$,	③,2.2.1.
⑤	$\bigwedge_{\xi<\gamma}\neg\psi_\xi\to\bigwedge_{\xi<\gamma}\neg\varphi_\xi$,	④,(2)(a) ,规则 1.
⑥	$(\bigvee_{\xi<\gamma}\neg\psi_\xi)\neg\to(\bigvee_{\xi<\gamma}\neg\varphi_\xi)\neg$,	⑤,2.1.1.
⑦	$\neg\bigvee_{\xi<\gamma}\psi_\xi\to\neg\bigvee_{\xi<\gamma}\varphi_\xi$,	⑥,公理 2.
⑧	$\bigvee_{\xi<\gamma}\varphi_\xi\to\bigvee_{\xi<\gamma}\psi_\xi$,	⑦,逆否,等价置换.
⑨	$\bigwedge_{\xi<\gamma}(\varphi_\xi\to\psi_\xi)\to(\bigvee_{\xi<\gamma}\varphi_\xi\to\bigvee_{\xi<\gamma}\psi_\xi)$,	①,⑧,2.2.6.

(4)易从(2)和(3)得到.

(5) 据对偶性只须证(a)和(d). 先证(a):

① $\bigwedge_{\xi<\gamma}\neg\varphi_\xi\leftrightarrow(\bigvee_{\xi<\gamma}\varphi_\xi)\neg$, 2.1.1.

② $(\bigvee_{\xi<\gamma}\varphi_\xi)\neg\leftrightarrow\neg\bigvee_{\xi<\gamma}\varphi_\xi$, 公理 2.

③ $\bigwedge_{\xi<\gamma}\neg\varphi_\xi\leftrightarrow\neg\bigvee_{\xi<\gamma}\varphi_\xi$, ①,②.

证(d):

① $\bigwedge_{\beta<\delta}\neg\varphi_{\alpha\beta}\leftrightarrow\neg\bigvee_{\beta<\delta}\varphi_{\alpha\beta}$, 对每一 $\alpha<\gamma$, (a).

② $\bigvee_{\alpha<\gamma}(\bigwedge_{\beta<\delta}\neg\varphi_{\alpha\beta})\leftrightarrow\bigvee_{\alpha<\gamma}(\neg\bigvee_{\beta<\delta}\varphi_{\alpha\beta})$, ①,2.2.1,(3)(a).

③ $\bigvee_{\alpha<\gamma}(\neg\bigvee_{\beta<\delta}\varphi_{\alpha\beta})\leftrightarrow\neg\bigwedge_{\alpha<\gamma}(\bigvee_{\beta<\delta}\varphi_{\alpha\beta})$, (b).

④ $\bigvee_{\alpha<\gamma}(\bigwedge_{\beta<\delta}\neg\varphi_{\alpha\beta})\leftrightarrow\neg\bigwedge_{\alpha<\gamma}(\bigvee_{\beta<\delta}\varphi_{\alpha\beta})$, ②,③.

(6) 据对偶性只须证(a):

① $\bigwedge_{\xi<\gamma}(\neg\varphi\to\psi_\xi)\to(\neg\varphi\to\bigwedge_{\xi<\gamma}\psi_\xi)$, (2)的(b).

② $\bigwedge_{\xi<\gamma}(\varphi\vee\psi_\xi)\to\varphi\vee\bigwedge_{\xi<\gamma}\psi_\xi$, ①.

③ $\bigwedge_{\xi<\gamma}\psi_\xi\to\psi_\xi$, 对所有 $\xi<\gamma$, 公理 3.

④ $\varphi\vee\bigwedge_{\xi<\gamma}\psi_\xi\to\varphi\vee\psi_\xi$, 对所有 $\xi<\gamma$, ③,公理 1,规则 1.

⑤ $\varphi\vee\bigwedge_{\xi<\gamma}\psi_\xi\to\bigwedge_{\xi<\gamma}(\varphi\vee\psi_\xi)$, ④,规则 2.

⑥ $\bigwedge_{\xi<\gamma}(\varphi\vee\psi_\xi)\leftrightarrow\varphi\vee\bigwedge_{\xi<\gamma}\psi_\xi$, ②,⑤.

(7) 证(a):令 $\Gamma=\{\varphi_\xi:\xi<\gamma\}$,对 $\beta<\gamma$,令 $\theta_\beta=\bigwedge_{\xi<\gamma_\beta}\varphi_{\delta_\beta+\xi}$,据合取公理,对每一 $\xi<\gamma_\beta$, $\bigwedge\Gamma\vdash\varphi_{\delta_\beta+\xi}$,据 2.2.1,对每一 $\beta<\epsilon$, $\bigwedge\Gamma\vdash\theta_\beta$,再据 2.2.1, $\bigwedge\Gamma\vdash\bigwedge_{\beta<\epsilon}\theta_\beta$,据 2.2.6, $\vdash\bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_\xi\to\bigwedge_{\beta<\epsilon}\theta_\beta$.

反之,对每一 $\xi<\gamma$,存在唯一的 $\eta<\epsilon,\tau<\gamma$,使得 $\xi=\delta_\eta+\tau$(参见 Karp 的[1964],p. 10),所以 $\vdash\theta_\eta\to\varphi_\xi$. 令 $\Theta=\{\theta_\beta:\beta<\epsilon\}$,则据分离规则,对每一 $\xi<\gamma$, $\Theta\vdash\varphi_\xi$,据 2.2.1, $\Theta\vdash\bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_\xi$,据演绎定理和(2)

的(c)，$\vdash \bigwedge_{\beta<\epsilon}\theta_\beta\to\bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_\xi$. (a)证毕.

用$\neg\varphi_\xi$代换(a)中的φ_ξ，用$\neg\varphi_{\delta_\beta+\xi}$代换(a)中的$\varphi_{\delta_\beta+\xi}$，有

$$\vdash \bigwedge_{\xi<\gamma}\neg\varphi_\xi\leftrightarrow\bigwedge_{\beta<\epsilon}(\bigwedge_{\xi<\gamma_\beta}\neg\varphi_{\delta_\beta+\xi}),$$

据逆否规则，公理 2 和 2.1.1，易得(b).

(8) 证(a)：因为$\{\varphi_\xi:\xi<\gamma\}=\{\varphi_{\beta(\xi)}:\xi<\eta\}$，所以据合取公理，对每一$\xi<\eta$，$\vdash\bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_\xi\to\varphi_{\beta(\xi)}$，据合取规则，$\vdash\bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_\xi\to\bigwedge_{\xi<\eta}\varphi_{\beta(\xi)}$. 同理可证，$\vdash\bigwedge_{\xi<\eta}\varphi_{\beta(\xi)}\to\bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_\xi$.

(b)和(c)的证明类似(a).

(9) 证(a)：因为$\gamma=\eta+\tau$，所以

$$\{\varphi_\xi:\xi<\gamma\}=\{\varphi_\xi:\xi<\eta\}\cup\{\varphi_{\eta+\xi}:\xi<\tau\},$$

因此

①	$\bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_\xi\to\bigwedge_{\xi<\eta}\varphi_\xi$,	公理 3，规则 2.
②	$\bigwedge_{\xi<\tau}\varphi_{\eta+\xi}\to(\bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_\xi\to\bigwedge_{\xi<\eta}\varphi_\xi)$,	①.
③	$\bigwedge_{\xi<\eta}\varphi_\xi\wedge\bigwedge_{\xi<\tau}\varphi_{\eta+\xi}\to\bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_\xi$,	公理 3，规则 2.
④	$\bigwedge_{\xi<\tau}\varphi_{\eta+\xi}\to(\bigwedge_{\xi<\eta}\varphi_\xi\to\bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_\xi)$,	③.

证(b)：

①	$\bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_\xi\to\bigwedge_{\xi<\eta}\varphi_\xi$,	公理 3，规则 2.
②	$\bigvee_{\xi<\eta}\varphi_\xi\to\bigvee_{\xi<\gamma}\varphi_\xi$,	①，逆否，公理 2 等.
③	$\bigwedge_{\xi<\tau}\neg\varphi_{\eta+\xi}\to(\bigvee_{\xi<\eta}\varphi_\xi\to\bigvee_{\xi<\gamma}\varphi_\xi)$,	②.
④	$\bigvee_{\xi<\gamma}\varphi_\xi\to\bigvee_{\xi<\eta}\varphi_\xi\vee\bigvee_{\xi<\tau}\varphi_{\eta+\xi}$,	(7)(b)（当 $\epsilon=2$）.
⑤	$\bigvee_{\xi<\gamma}\varphi_\xi\to(\neg\bigvee_{\xi<\tau}\varphi_{\eta+\xi}\to\bigvee_{\xi<\eta}\varphi_\xi)$,	④.
⑥	$\neg\bigvee_{\xi<\tau}\varphi_{\eta+\xi}\to(\bigvee_{\xi<\gamma}\varphi_\xi\to\bigvee_{\xi<\eta}\varphi_\xi)$,	⑤.
⑦	$\bigwedge_{\xi<\tau}\neg\varphi_{\eta+\xi}\to(\bigvee_{\xi<\gamma}\varphi_\xi\to\bigvee_{\xi<\eta}\varphi_\xi)$,	⑥，(5)(a). □

二、谓词逻辑中的演绎定理

本小节若不特别说明，$\Phi,\Gamma,\cdots$总是$\mathscr{L}_{\kappa\lambda\mu\pi}$的公式集，$\varphi,\psi,\varphi_\xi,\cdots$总是$\mathscr{L}_{\kappa\lambda\mu\pi}$的公式，$X,Y,\cdots$总是 Var 的幂$<\lambda$的子集.

2.2.8 定义 在$\mathbf{B}_{\kappa\lambda\mu\pi}(\Delta;\Omega)$中，

$\Phi;\Gamma\vdash\varphi\Leftrightarrow\Phi\vdash\varphi$或存在$\{\varphi_\xi:\ \xi<\gamma\}\subseteq\Gamma,0<\gamma<\kappa$，使得

$$\Phi\vdash\bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_\xi\to\varphi.$$

2.2.9 定理 在$\mathbf{B}_{\kappa\lambda\mu\pi}(\Delta;\Omega)$中，$0<\gamma<\kappa$，

(1)—(4)的表述如 2.2.4(1)—(4).

(5) $\Phi;\Gamma\vdash\psi\to\varphi$，且每一$x\in X$不在$\Gamma$和$\psi$中自由出现，则

$$\Phi;\Gamma\vdash\psi\to\forall X\varphi.$$

(6) 若$\mathrm{IC}_\gamma\in\Omega$，则，

$$\Phi;\Gamma\vdash\psi\to\bigvee_{\xi<\gamma}\varphi_\xi\Rightarrow\Phi;\Gamma\vdash\psi\to\bigvee_{\xi<\gamma}\forall X\varphi_\xi,$$

其中IC_γ的限制条件满足(见 2.1.9)且每一$x\in\bigcup_{\xi<\gamma}X_\xi$不在$\Gamma$中自由出现.

(7) 若$\mathrm{DC}_\gamma\in\Omega$，则，

$$\Phi;\Gamma\vdash\psi\to\bigvee_{\xi<\gamma}\varphi_\xi\Rightarrow\Phi;\Gamma\vdash\psi\to\forall X_0\varphi_0\vee\bigvee_{1\leqslant\xi<\gamma}\exists Y_\xi\forall X_\xi\varphi_\xi,$$

其中DC_γ的限制条件满足(见 2.1.10)且每一$x\in\bigcup_{\xi<\gamma}X_\xi$不在$\Gamma$中自由出现.

证明：(1)—(4)的证明如同 2.2.4. 若$\Gamma=\varnothing$，则(5)—(7)就是推理规则. 若$\Gamma\neq\varnothing$，则据 2.2.4 的证明开头的说明，若$\Phi;\Gamma\vdash\varphi$，则存在$\Xi\subseteq\Gamma,|\Xi|<\kappa$，使得$\Phi\vdash\bigwedge\Xi\to\varphi$.

证(5)：设(5)的前提成立，则存在$\Xi\subseteq\Gamma,|\Xi|<\kappa$，使得$\Phi\vdash\bigwedge\Xi\to(\psi\to\varphi)$. 因为$|\Xi\cup\{\psi\}|<\kappa$且$X$中的元素不在$\bigwedge\Xi\wedge\psi$中自由出现，则据概括规则，$\Phi\vdash\bigwedge\Xi\wedge\psi\to\forall X\varphi$，因此

$$\Phi;\Gamma\vdash\psi\to\forall X\varphi.$$

证(6)：设(6)的前提成立，则存在 $\Xi\subseteq\Gamma$，$|\Xi|<\kappa$，使得 $\Phi\vdash\bigwedge\Xi\to(\psi\to\bigvee_{\xi<\gamma}\varphi_\xi)$，所以 $\vdash\bigwedge\Xi\wedge\psi\to\bigvee_{\xi<\gamma}\varphi_\xi$，据 IC_γ，

$$\Phi\vdash\bigwedge\Xi\wedge\psi\to\bigvee_{\xi<\gamma}\forall X_\xi\varphi_\xi,$$

因此 $\Phi\vdash\bigwedge\Xi\to(\psi\to\bigvee_{\xi<\gamma}\forall X_\xi\varphi_\xi)$，所以 $\Phi;\Gamma\vdash\psi\to\bigvee_{\xi<\gamma}\forall X_\xi\varphi_\xi$.

(7)的证明如同(6). □

2.2.10 演绎定理(Karp,[1964]) 任给 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta;\Omega)$，设在 $\Phi;\Gamma\vdash\varphi$ 的形式证明中运用量化规则所量化的变元不在 Γ 中自由出现，则在 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta;\Omega)$ 中(Ω 含分配律规则 $\Rightarrow$ κ 是强极限基数)，

(1) $\Phi;\Gamma\vdash\varphi\Leftrightarrow\Phi\cup\Gamma\vdash\varphi$.

(2) 若 $\Gamma=\{\varphi_\xi:\ \xi<\gamma\}$，其中 $0<\gamma<\kappa$，

$$\Phi\vdash\bigwedge\Gamma\to\varphi\Leftrightarrow\Phi\cup\Gamma\vdash\varphi.$$

(3) 若 Σ 是幂 $<\kappa$ 的句子集，则

$$\Phi\vdash\bigwedge\Sigma\to\varphi\Leftrightarrow\Phi\cup\Sigma\vdash\varphi.$$

证明：(3)是(2)的特例，而(1)—(2)的证明与 2.2.5(1)—(2)的证明完全相同，只是用 2.2.9 替换 2.2.4. □

2.2.11 推论 在 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta;\Omega)$ 中，$\mathrm{Fv}(\varphi)\cap\mathrm{Fv}(\psi)=\varnothing$，则

$$\Phi\cup\{\varphi\}\vdash\psi\Leftrightarrow\Phi\vdash\varphi\to\psi.\ \square$$

2.2.12 定理(量词性质 Karp,[1964]) 在 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 中，

(1) $\vdash\varphi\Rightarrow\ \vdash\forall X\varphi$.

(2) $\vdash\forall X\varphi\to\exists X\varphi$.

(3) $\vdash\forall X(\varphi\to\psi)\to(\forall X\varphi\to\forall X\psi)$.

(4) $\vdash\forall X(\varphi\to\psi)\to(\exists X\varphi\to\exists X\psi)$.

(5) 令 $X\cap\mathrm{Fv}(\varphi)=\varnothing$，则

(a) $\vdash\varphi\leftrightarrow\forall X\varphi$.

(b) $\vdash\varphi\leftrightarrow\exists X\varphi$.

(c) $\vdash\forall X(\varphi\to\psi)\leftrightarrow(\varphi\to\forall X\psi)$.

(d) $\vdash\forall X(\psi\to\varphi)\leftrightarrow(\exists X\psi\to\varphi)$.

(e) $\vdash\forall X(\varphi\wedge\psi)\leftrightarrow(\varphi\wedge\forall X\psi)$.

(6) $\vdash \forall X\varphi \leftrightarrow \forall X_0 \forall X_1 \varphi$， 若 $X = X_0 \cup X_1$.

(7)(**自由变元变换律**) $\vdash \forall X\varphi \leftrightarrow \forall \mathrm{Ran}(g)\mathrm{SF}_g^X(\varphi)$，
其中 $g: X \to \mathrm{Var}$ 是单射使得 $\mathrm{Ran}(g) \cap \mathrm{Fv}(\varphi) = \varnothing$，且 φ 中没有 $x \in X$ 的自由出现在约束 $g(x)$ 的量词的辖域中.

证明：(1)—(5)的证明类似有穷逻辑中相应定理的证明.

证(6)：据公理 4，$\vdash \forall X\varphi \to \varphi$，两次使用规则 3，我们就有 $\vdash \forall X\varphi \to \forall X_0 \forall X_1 \varphi$. 反之，据公理 4，有 $\vdash \forall X_0 \forall X_1 \varphi \to \forall X_1 \varphi$ 和 $\vdash \forall X_1 \varphi \to \varphi$，故 $\vdash \forall X_0 \forall X_1 \varphi \to \varphi$，据规则 3，$\vdash \forall X_0 \forall X_1 \varphi \to \forall X\varphi$.

证(7)：据公理 4，$\vdash \forall X\varphi \to \mathrm{SF}_g^X(\varphi)$，因为 $\mathrm{Ran}(g) \cap \mathrm{Fv}(\varphi) = \varnothing$，所以据规则 3，就有 $\vdash \forall X\varphi \to \forall \mathrm{Ran}(g)\mathrm{SF}_g^X(\varphi)$.

反之，据公理 4，$\vdash \forall \mathrm{Ran}(g)\mathrm{SF}_g^X(\varphi) \to \mathrm{SF}_g^X(\varphi)$，因为 X 中没有变元在 $\mathrm{SF}_g^X(\varphi)$ 中自由出现，所以据规则 3，$\vdash \mathrm{SF}_g^X(\varphi) \to \forall X\varphi$，故

$$\vdash \forall \mathrm{Ran}(g)\mathrm{SF}_g^X(\varphi) \to \forall X\varphi. \quad \square$$

2.2.13 引理(存在规则) 在 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta;\Omega)$ 中，

$$\mathrm{SF}_f^X\varphi \vdash \exists X\varphi,$$

其中 $f: X \to \mathrm{Term}(\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi})$，$\varphi$ 中没有 $x \in X$ 的自由出现在约束 $f(x)$ 的某个变元的量词的辖域中.

证明：据公理 4，$\vdash \forall X \neg\varphi \to \mathrm{SF}_f^X(\neg\varphi)$，所以 $\vdash \neg\mathrm{SF}_f^X(\neg\varphi) \to \neg\forall X \neg\varphi$，即 $\vdash \mathrm{SF}_f^X(\varphi) \to \neg\forall X \neg\varphi$，据公理 2 和 2.1.1，则 $\vdash \mathrm{SF}_f^X(\varphi) \to \exists X \neg\neg\varphi$，据 2.2.12(1)和(4)，有 $\vdash \mathrm{SF}_f^X(\varphi) \to \exists X\varphi$. $\square$

2.2.14 定理(约束变元变换律) 令 $f: X \to \mathrm{Var}$ 是单射使得 $\mathrm{Ran}(f)$ 中的变元不在 φ 中出现，则在 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 中，

$$\vdash \varphi \leftrightarrow \mathrm{SB}_f^X(\varphi).$$

证明：施归纳于 φ 的复杂度：若 φ 是原子公式，则 $\mathrm{Bv}(\varphi) = \varnothing$，所以 $\mathrm{SB}_f^X(\varphi) = \varphi$，因此有 $\vdash \varphi \leftrightarrow \mathrm{SB}_f^X(\varphi)$. 若 φ 是 $\neg\psi$，则据归纳假设，我们有 $\vdash \psi \leftrightarrow \mathrm{SB}_f^X(\psi)$，所以有 $\vdash \neg\psi \leftrightarrow \neg\mathrm{SB}_f^X(\psi)$，因此有 $\vdash \neg\psi \leftrightarrow \mathrm{SB}_f^X(\neg\psi)$. 若 φ 是 $\bigwedge_{\xi<\gamma} \varphi_\xi$，$0 < \gamma < \kappa$. 据归纳假设，对每一 $\xi < \gamma$，

$\vdash \varphi_\xi \leftrightarrow \mathrm{SB}_f^X(\varphi_\xi)$. 因为 $\mathrm{Bv}(\bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_\xi)=\bigcup_{\xi<\gamma}\mathrm{Bv}(\varphi_\xi)$，所以我们得到 $\vdash \bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_\xi \leftrightarrow \mathrm{SB}_f^X(\bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_\xi)$. 若 φ 是 $\forall Y\psi$，据 Karp 的[1964] 9.3.4 就有

$$\mathrm{SB}_f^X(\forall Y\psi)=\forall \mathrm{Ran}(g)\mathrm{SF}_f^{X\cap Y}\mathrm{SB}_f^X(\psi), \tag{2.1}$$

其中 $g: Y\to \mathrm{Var}$ 在 X 上是 f，在它处是恒等函数，$\mathrm{Ran}(f)$ 的元素不在 $\mathrm{SB}_f^X(\psi)$ 中自由出现，且 $\mathrm{SB}_f^X(\psi)$ 中没有 $x\in X$ 的自由出现在约束 $f(x)$ 的量词的辖域中. 据归纳假设易证

$$\vdash \forall \mathrm{Ran}(g)\mathrm{SF}_f^{X\cap Y}\mathrm{SB}_f^X(\psi)\leftrightarrow \forall \mathrm{Ran}(g)\mathrm{SF}_f^{X\cap Y}(\psi). \tag{2.2}$$

令 $Y_0=X\cap Y, Y_1=Y-X$. 运用 2.2.12(7) 于 Y_0，然后运用 2.2.12(2)和(6)，易得

$$\vdash \forall Y\psi \leftrightarrow \forall \mathrm{Ran}(g)\mathrm{SF}_f^{X\cap Y}(\psi), \tag{2.3}$$

其中 ψ 中没有 $x\in X\cap Y$ 的自由出现在约束 $f(x)$ 的量词的辖域中. 联立(2.1)，(2.2)和(2.3)，有

$$\vdash \forall Y\psi \leftrightarrow \mathrm{SB}_f^X(\forall Y\psi). \ \square$$

2.2.15 引理 令 $\varphi(x_\xi: \xi<\gamma)$ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$-公式，$\gamma<\lambda$，$\{x_\xi: \xi<\gamma\}\supseteq \mathrm{Fv}(\varphi)$，$\mathscr{L}'\subseteq \mathscr{L}\cup C$，其中 $C=\{c_\xi: \xi<\gamma\}$ 是新个体常元集，则

(1) $\vdash \varphi(x_\xi: \xi<\gamma) \Leftrightarrow \vdash \varphi(x_\xi/c_\xi: \xi<\gamma)$.

(2) $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta;\Omega)\vdash \varphi(x_\xi: \xi<\gamma) \Leftrightarrow \mathbf{B}'_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta;\Omega)\vdash \varphi(x_\xi/c_\xi: \xi<\gamma)$.

证明：(1) 因为从 $\varphi(x_\xi: \xi<\gamma)$ 到 $\varphi(x_\xi/c_\xi: \xi<\gamma)$ 没有改变 $\varphi(x_\xi: \xi<\gamma)$ 中的约束变元，所以 $\varphi(x_\xi/c_\xi: \xi<\gamma)$ 只是把 x_ξ 的自由出现代换成 c_ξ. 因此对 $\mathscr{L}'_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的任意结构 $\mathfrak{A}$ 和赋值 $f(x_\xi)=c_\xi^{\mathfrak{A}}$，

$$\mathfrak{A}\models \varphi(x_\xi: \xi<\gamma)[f] \Leftrightarrow \mathfrak{A}\models \varphi(x_\xi/c_\xi: \xi<\gamma)[f].$$

(2) “$\Rightarrow$”：设 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta;\Omega)\vdash \varphi(x_\xi: \xi<\gamma)$，因此 $\mathbf{B}'_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta;\Omega)\vdash \varphi(x_\xi: \xi<\gamma)$，据概括规则，$\mathbf{B}'_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta;\Omega)\vdash \forall\{x_\xi: \xi<\gamma\}\varphi(x_\xi: \xi<\gamma)$，据公理 4，$\mathbf{B}'_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta;\Omega)\vdash \varphi(x_\xi/c_\xi: \xi<\gamma)$.

“$\Leftarrow$”：设 $\langle\psi_\beta: \beta\leqslant\alpha\rangle$ 是 $\varphi(x_\xi/c_\xi: \xi<\gamma)$ 在 $\mathbf{B}'_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta;\Omega)$ 中的一形式证明. 令 Y 是在这个形式证明中出现的所有变元的集合，g 是从 Y 到不在 $\varphi(x_\xi: \xi<\gamma)$ 中出现的 Var 的变元的单射. 对每一 $\beta\leqslant\alpha$，

令 $\theta_\beta = S_g^Y(\psi_\beta)$，即 θ_β 是用 $g(y)$ 代换 ψ_β 中变元 y 的所有出现得到的公式. 因为我们这里只是重名了这些变元，所以 $\langle\theta_\beta:\ \beta\leqslant\alpha\rangle$ 仍是 $\mathbf{B}'_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta;\Omega)$ 中的一个形式证明. 令 σ_β 是用 x_ξ 代换 θ_β 中 c_ξ 的所有出现得到的公式，因为没有变元 x_ξ 在 θ_β 中出现，所以在 σ_β 中的 x_ξ 的所有出现都是自由的. 因此不难证明，$\langle\sigma_\beta:\ \beta\leqslant\alpha\rangle$ 也是一个形式证明，而且因为这个形式证明中的公式都是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的公式，所以该证明是 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta;\Omega)$ 中的一个证明. 下面我们来证：

$$\sigma_\alpha = SB_g^Y\varphi(x_\xi:\ \xi<\gamma).$$

因为 $\theta_\alpha = S_g^Y\varphi(x_\xi/c_\xi:\ \xi<\gamma)$，所以 $\sigma_\alpha = S_h^C(S_g^Y\varphi(x_\xi/c_\xi:\ \xi<\gamma))$，其中 $h=\{(c_\xi,x_\xi):\ \xi<\gamma\}$. 因为 $\mathrm{Ran}(g)\cap\{x_\xi:\ \xi<\gamma\}=\varnothing$，所以

$$\begin{aligned} S_h^C(S_g^Y\varphi(x_\xi/c_\xi:\ \xi<\gamma)) &= S_g^Y(S_h^C\varphi(x_\xi/c_\xi:\ \xi<\gamma)) \\ &= S_g^Y\varphi(x_\xi:\ \xi<\gamma) \\ &= SB_g^Y\varphi(x_\xi:\ \xi<\gamma); \end{aligned}$$

最后一个等式成立是因为 $\mathrm{Fv}(\varphi)\subseteq\{x_\xi:\ \xi<\gamma\}$. 所以 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta;\Omega)\vdash SB_g^Y\varphi(x_\xi:\ \xi<\gamma)$，据 2.2.14，$\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta;\Omega)\vdash\varphi(x_\xi:\ \xi<\gamma)$. □

2.2.16 定义 令 $\mathscr{L}'=\mathscr{L}\cup C$，其中 C 是基数足够大的新个体常元集，我们称在 $\mathbf{B}'_{\kappa\lambda\rho\pi}(\mathrm{CH})$ 中从公式集 Φ 到 φ 的形式证明使用了**选择规则** CH $\Leftrightarrow$ 存在形式证明 $\langle\psi_\xi:\ \xi\leqslant\gamma\rangle$ 使得下面两个条件满足：

(1) 对每一 $\xi\leqslant\gamma$，ψ_ξ 是 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的公理，或属于 Φ，或据 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的规则从 $\langle\psi_\xi:\ \xi\leqslant\gamma\rangle$ 中它更前面的公式得到，或据下列规则 CH 得到：

存在某个 $\zeta<\xi$ 使得 $\psi_\zeta=\exists X\theta$，$f\in C^X$ 且 $\psi_\xi=SF_f^X(\theta)$.

(2) 若对某个存在公式 $\exists X\theta$ 已运用过规则 CH，则不能再对 $\exists X\theta$ 的自由变元使用量化规则(如规则 3).

2.2.17 引理 设规定条件如上述定义，

$$\mathbf{B}'_{\kappa\lambda\rho\pi}(\mathrm{CH});\Phi\vdash\varphi \Rightarrow \mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi};\Phi\vdash\varphi.$$

证明：假设在 $\mathbf{B}'_{\kappa\lambda\rho\pi}(\mathrm{CH})$ 中，$\Phi\vdash\varphi$. 令 $\langle\exists X_\xi\psi_\xi:\ \xi\leqslant\gamma\rangle$ 是从 Φ 到 φ 的形式证明中运用过规则 CH 的公式序列. 对每一 $\xi\leqslant\gamma$，令 f_ξ：

$X_\xi \to C_\xi$ 是双射使得 $C_\xi \subseteq C$ 是不在上述形式证明中出现的个体常元集且对 $\xi \neq \zeta$, $C_\xi \cap C_\zeta = \varnothing$，则在 $\mathbf{B}'_{\kappa\lambda\rho\pi}(\mathrm{CH})$ 中，

$$\Phi \cup \{\mathrm{SF}_{f_\xi}(\psi_\xi):\ \xi \leqslant \gamma\} \vdash \varphi.$$

据 2.2.16 的条件(2)和演绎定理，

$$\Phi \cup \{\mathrm{SF}_{f_\xi}(\psi_\xi):\ \xi < \gamma\} \vdash \mathrm{SF}_{f_\gamma}(\psi_\gamma) \to \varphi.$$

令 g_γ: $Y_\gamma \to C_\gamma$ 是双射使得 $Y_\gamma \subseteq \mathrm{Var}$ 且 Y_γ 不在上述形式证明中出现，则据 2.2.15(2)，在 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 中，

$$\Phi \cup \{\mathrm{SF}_{f_\xi}(\psi_\xi):\ \xi < \gamma\} \vdash \mathrm{S}_{g_\gamma}(\mathrm{SF}_{f_\gamma}(\psi_\gamma) \to \varphi).$$

因为 φ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的公式，所以 φ 不含 C 中的常元，因此在 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 中，

$$\Phi \cup \{\mathrm{SF}_{f_\xi}(\psi_\xi):\ \xi < \gamma\} \vdash \mathrm{S}_{g_\gamma}(\mathrm{SF}_{f_\gamma}(\psi_\gamma)) \to \varphi.$$

据概括规则，

$$\Phi \cup \{\mathrm{SF}_{f_\xi}(\psi_\xi):\ \xi < \gamma\} \vdash \forall Y_\gamma[\mathrm{S}_{g_\gamma}(\mathrm{SF}_{f_\gamma}(\psi_\gamma)) \to \varphi].$$

据 2.2.12(5)的(d)和 2.2.14，

$$\Phi \cup \{\mathrm{SF}_{f_\xi}(\psi_\xi):\ \xi < \gamma\} \vdash \exists X_\gamma \psi_\gamma \to \varphi.$$

但因为 $\exists X_\gamma \psi_\gamma$ 是从 Φ 到 φ 的形式证明中的公式，因此

$$\Phi \cup \{\mathrm{SF}_{f_\xi}(\psi_\xi):\ \xi < \gamma\} \vdash \exists X_\gamma \psi_\gamma.$$

所以据分离规则，

$$\Phi \cup \{\mathrm{SF}_{f_\xi}(\psi_\xi):\ \xi < \gamma\} \vdash \varphi.$$

施归纳重复上述论证，在 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 中，有 $\Phi \vdash \varphi$. □

2.2.18 定理 令 λ 是正则基数，对每一 $\xi < \gamma < \lambda$, φ_ξ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的公式，$X_\xi \subseteq \mathrm{Var}$, $|X_\xi| < \lambda$，则在 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 中，

(1) (a) $\vdash \forall \bigcup_{\xi<\gamma} X_\xi \bigwedge_{\xi<\gamma} \varphi_\xi \to \bigwedge_{\xi<\gamma} \forall X_\xi \varphi_\xi$.

(b) $\vdash \bigvee_{\xi<\gamma} \exists X_\xi \varphi_\xi \to \exists \bigcup_{\xi<\gamma} X_\xi \bigvee_{\xi<\gamma} \varphi_\xi$.

(2) 若此外对每一 $\zeta, \xi < \gamma$ 使得 $\zeta \neq \xi$ 时，$X_\zeta \cap \mathrm{Fv}(\varphi_\xi) = \varnothing$，

(a) $\vdash \forall \bigcup_{\xi<\gamma} X_\xi \bigwedge_{\xi<\gamma} \varphi_\xi \leftrightarrow \bigwedge_{\xi<\gamma} \forall X_\xi \varphi_\xi$.

(b) $\vdash \bigvee_{\xi<\gamma} \exists X_\xi \varphi_\xi \leftrightarrow \exists \bigcup_{\xi<\gamma} X_\xi \bigvee_{\xi<\gamma} \varphi_\xi$.

(3) 若此外还有对每一$\zeta,\xi<\gamma$使得$\zeta\neq\xi$时，$X_\xi\cap X_\zeta=\varnothing$，

(a) $\vdash\bigwedge_{\xi<\gamma}\exists X_\xi\varphi_\xi\leftrightarrow\exists\bigcup_{\xi<\gamma}X_\xi\bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_\xi$.

(b) $\vdash\bigvee_{\xi<\gamma}\forall X_\xi\varphi_\xi\leftrightarrow\forall\bigcup_{\xi<\gamma}X_\xi\bigvee_{\xi<\gamma}\varphi_\xi$.

证明：(1) 据对偶性，只须证(a)：据公理 4，

$$\vdash\forall\bigcup_{\xi<\gamma}X_\xi\bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_\xi\to\bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_\xi,$$

而据公理 3，对每一$\zeta<\gamma$，$\vdash\bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_\xi\to\varphi_\zeta$，因此

$$\vdash\forall\bigcup_{\xi<\gamma}X_\xi\bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_\xi\to\varphi_\zeta.$$

据概括规则，$\vdash\forall\bigcup_{\xi<\gamma}X_\xi\bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_\xi\to\forall X_\zeta\varphi_\zeta$，所以据合取规则，

$$\vdash\forall\bigcup_{\xi<\gamma}X_\xi\bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_\xi\to\bigwedge_{\xi<\gamma}\forall X_\xi\varphi_\xi.$$

(2) 据对偶性，只须证(a)，而据(1)，只须证"$\leftarrow$"：据公理 3，对所有$\zeta<\gamma$，$\vdash\bigwedge_{\xi<\gamma}\forall X_\xi\varphi_\xi\to\forall X_\zeta\varphi_\zeta$. 据公理 4，$\vdash\forall X_\zeta\varphi_\zeta\to\varphi_\zeta$，因此据合取规则，$\vdash\bigwedge_{\xi<\gamma}\forall X_\xi\varphi_\xi\to\bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_\xi$. 因为$\lambda$是正则的，所以$\left|\bigcup_{\xi<\gamma}X_\xi\right|<\lambda$，显然$\bigcup_{\xi<\gamma}X_\xi$中的元素不在$\bigwedge_{\xi<\gamma}\forall X_\xi\varphi_\xi$中自由出现，所以据概括规则，

$$\vdash\bigwedge_{\xi<\gamma}\forall X_\xi\varphi_\xi\to\forall\bigcup_{\xi<\gamma}X_\xi\bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_\xi.$$

(3) 令$\mathscr{L}'=\mathscr{L}\cup C$，其中$C$是基数足够大的新个体常元集使得$C=\bigcup_{\xi<\gamma}C_\xi$，当$\zeta\neq\xi$时，$C_\zeta\cap C_\xi=\varnothing$；对每一$\xi<\gamma$，存在双射$f_\xi$：$X_\xi\to C_\xi$，因此在$\mathbf{B}'_{\kappa\lambda\rho\pi}$中，

①	$\bigwedge_{\xi<\gamma}\exists X_\xi\varphi_\xi$，		假设.
②	$\exists X_\xi\varphi_\xi$，	对所有$\xi<\gamma$，	①，公理 3.
③	$\mathrm{SF}_{f_\xi}\varphi_\xi$，	对所有$\xi<\gamma$，	②，规则 CH.
④	$\bigwedge_{\xi<\gamma}\mathrm{SF}_{f_\xi}\varphi_\xi$，		③，合取规则.
⑤	$\exists\bigcup_{\xi<\gamma}X_\xi\bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_\xi$，		④，2.2.13；

其中对$\zeta\neq\xi$，$X_\zeta\cap X_\xi=\varnothing$. 因此在$\mathbf{B}'_{\kappa\lambda\rho\pi}$(CH)中，

⑥ $\bigwedge_{\xi<\gamma}\exists X_\xi\varphi_\xi\vdash\exists\bigcup_{\xi<\gamma}X_\xi\bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_\xi$,

据 2.2.17，在 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 中，$\bigwedge_{\xi<\gamma}\exists X_\xi\varphi_\xi\vdash\exists\bigcup_{\xi<\gamma}X_\xi\bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_\xi$. 因为在⑤被量化的变元集 $\bigcup_{\xi<\gamma}X_\xi$ 不在 $\bigwedge_{\xi<\gamma}\exists X_\xi\varphi_\xi$ 中自由出现，则据演绎定理的推论，在 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 中，$\vdash\bigwedge_{\xi<\gamma}\exists X_\xi\varphi_\xi\to\exists\bigcup_{\xi<\gamma}X_\xi\bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_\xi$. 另一方面，在 $\mathbf{B}'_{\kappa\lambda\rho\pi}(\mathrm{CH})$ 中，

⑦	$\exists\bigcup_{\xi<\gamma}X_\xi\bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_\xi$,		假设.
⑧	$\mathrm{SF}_f\bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_\xi$,		⑦，规则 CH，$f=\bigcup_{\xi<\gamma}f_\xi$.
⑨	$\bigwedge_{\xi<\gamma}\mathrm{SF}_{f_\xi}\varphi_\xi$,		⑧和题设.
⑩	$\mathrm{SF}_{f_\xi}\varphi_\xi$,	对所有 $\xi<\gamma$	⑨，公理 3.
⑪	$\exists X_\xi\varphi_\xi$,	对所有 $\xi<\gamma$	⑩，2.2.13.
⑫	$\bigwedge_{\xi<\gamma}\exists X_\xi\varphi_\xi$,		⑪，合取规则.

据⑦，⑫，2.2.17 和演绎定理，在 $\mathrm{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 中，

$$\vdash\exists\bigcup_{\xi<\gamma}X_\xi\bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_\xi\to\bigwedge_{\xi<\gamma}\exists X_\xi\varphi_\xi.\ \square$$

练　习

2.2.19　若 φ 和 $\bar{\varphi}$ 规定如例 1.2.15. 证明：

$$\mathbf{B}_{\kappa^+\lambda\rho\pi}\vdash\varphi\Leftrightarrow\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}\vdash\bar{\varphi}.$$

2.2.20　证明当 $\lambda=\kappa$ 时 2.2.18 成立.

2.2.21　令 $\Sigma\cup\{\sigma\}$ 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的句子集，φ 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的公式，Φ 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的公式集. 证明：

(1) $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}};\Sigma\vdash\varphi\Rightarrow\mathbf{B}_{\omega_1\omega};\Sigma\vdash\varphi$.

(2)(**演绎定理**) $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}};\Sigma\cup\{\sigma\}\vdash\varphi\Rightarrow\mathscr{L}_{\mathfrak{M}};\Sigma\vdash\sigma\to\varphi$.

(3) 对所有 $\varphi\in\Phi$，$\mathscr{L}_{\mathfrak{M}};\Sigma\vdash\varphi$ 且 $\bigwedge\Phi\in\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}\Rightarrow\mathscr{L}_{\mathfrak{M}};\Sigma\vdash\bigwedge\Phi$.

(4) 若 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}};\Sigma\vdash\varphi$ 且 $v\in\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$，则 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}};\Sigma\vdash\forall v\varphi$.

(5) 若 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}};\Sigma\vdash\varphi(v/d)$ 且 d 是不在 $\Sigma\cup\{\sigma\}$ 的任何公式中出现的个体常元，则 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}};\Sigma\vdash\varphi$.

第 3 章　布尔代数与完全性定理

完全性定理对于逻辑系统的重要性不言而喻，用什么方法证明完全性定理也是令人感兴趣的，因为有时方法比结论更重要，它往往会引出新的研究课题和其它重要结果，因此在本章和第 4 章我们分别用不同的方法考察完全性定理. 读者可以根据自己的基础和需要分别或全部阅读之.

本章我们用布尔代数方法证明完全性定理，这个工作是 Karp 在其[1964]完成的. 由这些结果可见布尔代数与无穷逻辑的密切关系. 也许逻辑学家开始建立无穷逻辑就是受(无穷)布尔代数的影响. 最初建立的无穷逻辑可以看作是用逻辑方法描述布尔代数的结果以及用布尔代数的方法证明逻辑的结果. 例如，无穷合取 $\wedge$ 和无穷析取 $\vee$ 可以看作是布尔代数中的无穷交运算和并运算.

本章 §1 引入证明完全性定理所需的布尔代数基础.

§2—3 分别讨论命题逻辑和谓词逻辑的完全性定理.

§1　布尔代数基础

在此我们要研究的代数类似第 1 章所定义的**结构**概念，但是其论域可以不是通常意义上的个体域，例如可以是用某种公式类作为论域. 另外表述上也不尽相同，例如把对关系符号 R 的解释 $H(R)$ 看作是从论域到真值 **0**,**1** 的函数. 但许多重要的概念，如同态、同构等与第 **1** 章表述的相同. 下面在不加说明之处，读者应该

把本章提到的概念看作是前面章节已定义或交待过的概念.

称 $\mathfrak{B}=\langle B,\neg,\wedge,\vee\rangle$是**布尔代数** $\Leftrightarrow$ $\neg$ 是 B 上的一元运算,$\wedge$ 和 $\vee$ 是 B 上的二元运算满足下列条件:

交换律: $a\vee b=b\vee a$, $a\wedge b=b\wedge a$.

结合律: $a\vee(b\vee c)=(a\vee b)\vee c$,

$a\wedge(b\wedge c)=(a\wedge b)\wedge c$.

吸收律: $(a\wedge b)\vee b=b$, $a\vee(a\wedge b)=a$.

分配律: $a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$,

$a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$.

互补律: $(a\wedge\neg a)\vee b=b$, $(a\vee\neg a)\wedge b=b$.

注意:(Ⅰ)这里的$\neg$,$\wedge$和$\vee$与命题联结词$\neg$,$\wedge$和$\vee$不同,虽然它们之间存在对应. 请读者注意这一点.

(Ⅱ)a 的**补**是$\neg a$,a 和 b 的(**代数**)**并**是 $a\vee b$,a 和 b 的(**代数**)**交**是 $a\wedge b$. $a\wedge\neg a$ 是**零元 0**,$a\vee\neg a$ 是**单位元 1**. 若 $\mathbf{0}=\mathbf{1}$,则该代数称为**退化代数**;否则称为**非退化代数**.

最小非退化布尔代数是**真值代数**,其论域是$\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}$,记为 $\mathfrak{B}_0$.

在布尔代数上定义**偏序**(**关系**)$\leqslant$如下:

$$a\leqslant b\Leftrightarrow a=a\wedge b.$$

a 和 b 的**最大下界**是 $a\wedge b$,**最小上界**是 $a\vee b$. 更一般地,若 C 是 B 的子集且 C 的最大下界在 B 中存在,则我们把这个元素称为 C 的(**无穷**)**交**,记为$\wedge C$. 类似地,若 C 的最小上界存在,我们就称其为(**无穷**)**并**,记作$\vee C$. 若 κ 是基数且对 B 的所有幂$\leqslant\kappa$ 的子集 C,κ-交 $\wedge C$ 在 B 中存在,则称 $\mathfrak{B}$ 是κ-**完全布尔代数**. 因为$\vee C=\neg\wedge\{\neg c;c\in C\}$,所以$\kappa$-并$\vee C$ 也在κ-完全布尔代数中存在.

若对所有 $\gamma<\kappa$,$\mathfrak{B}$ 是 γ-完全的,则称 $\mathfrak{B}$ 为$\nearrow\kappa$-**完全布尔代数**.

若对所有基数 γ,$\mathfrak{B}$ 是 γ-完全的,则称 $\mathfrak{B}$ 为**完全布尔代数**.

如通常约定,ω_1-完全代数也称为**可数完全代数**.

3.1.1 例 **集合域**是代数 $\mathscr{S}=\langle S,\sim,\cap,\cup\rangle$,其中 S 是某个集合 U 的子集构成的族使得 S 在二元运算并"$\cup$"、交"$\cap$"和相对

U 的一元补(差)运算"~"下封闭. 显然,每一集合域是布尔代数. 若 T 是 S 的子集使得 $\bigcap T\in S$,则在代数的意义上,$\bigcap T=\wedge T$. 但是当 $\bigcap T\notin S$ 时,T 的代数交 $\wedge T$ 可以在 S 中存在.

若 S 的所有幂 $\leqslant\kappa$ 的子集 T 有 $\bigcap T\in S$,则称 $\mathscr{S}$ 为 **κ-集合域**.

若对所有 $\gamma<\kappa$,$\mathscr{S}$ 是 γ-集合域,则称 $\mathscr{S}$ 为 **$\nearrow\kappa$-集合域**.

若对所有基数 γ,$\mathscr{S}$ 是 γ-集合域,则称 $\mathscr{S}$ 是**完全集合域**.

称 $\mathfrak{B}_1$ 是布尔代数 $\mathfrak{B}$ 的**子代数**,记为 $\mathfrak{B}_1\subseteq\mathfrak{B}$, $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{B}_1$ 是代数,其论域是子集 $B_1\subseteq B$,其运算是 $\mathfrak{B}$ 的运算对 B_1 的限制. 易证这样的代数也是布尔代数. $\mathfrak{B}$ 的子代数 $\mathfrak{B}_1$ 称为 **κ-正则子代数** $\Leftrightarrow$ 若 $C\subseteq B_1$, $|C|\leqslant\kappa$ 且 $\wedge C\in B$,则 $\wedge C\in B_1$. $\mathfrak{B}_1\subseteq\mathfrak{B}$ 称为 $\mathfrak{B}$ 的 **$\nearrow\kappa$-正则子代数** $\Leftrightarrow$ 若对所有 $\gamma<\kappa$,$\mathfrak{B}_1$ 是 γ-正则子代数. $\mathfrak{B}_1\subseteq\mathfrak{B}$ 称为 $\mathfrak{B}$ 的**正则子代数** $\Leftrightarrow$ 若对所有基数 γ,$\mathfrak{B}_1$ 是 γ-正则子代数.

我们假设读者熟悉如何把一给定的布尔代数表示为一完全布尔代数的一完全子代数. 集合 $C\subseteq B$ 称为 **κ-生成** $\mathfrak{B}$ $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{B}$ 的、包含 C 的、κ-完全的 κ-子代数就是 $\mathfrak{B}$ 自身.

从 $\mathfrak{B}$ 到 $\mathfrak{B}_1$ 上的同态 h 称为 **κ-同态** $\Leftrightarrow$ 若 $C\subseteq B$, $|C|\leqslant\kappa$ 且 $\wedge C\in B$,则 $h(\wedge C)$ 是 $\mathfrak{B}_1$ 中 $\{h(c):c\in C\}$ 的交. 类似地,我们可以定义 **$\nearrow\kappa$-同态**. 同态 h 称为 **∞-同态** $\Leftrightarrow$ 对所有基数 γ,h 是 γ-同态.

令 $\mathfrak{B}$ 是布尔代数. 称 I 是 $\mathfrak{B}$ 上的**理想** $\Leftrightarrow$ $I\subseteq B$ 使得① $\mathbf{0}\in I$, $\mathbf{1}\notin I$,② $a,b\in I\Rightarrow a\vee b\in I$,③ $a,b\in B, a\in I$ 且 $b\leqslant a\Rightarrow b\in I$.

我们知道在同态和理想之间存在一个我们需要的对应:

$h:\mathfrak{B}\to\mathfrak{C}$ 是同态 $\Rightarrow I=\{a\in B:h(a)=\mathbf{0}\}$ 是 $\mathfrak{B}$ 上的理想.

另一方面,令 I 是 $\mathfrak{B}$ 上的理想. 考虑 B 上的等价关系~:

$$a\sim b\Leftrightarrow(a\wedge\neg b)\vee(b\wedge\neg a)\in I.$$

令等价类 $\|a\|=\{b\in B:b\sim a\}$,$\mathfrak{C}$ 是所有这样的等价类的聚合使得:

$$\|a\|\vee\|b\|=\|a\vee b\|,\qquad \|a\|\wedge\|b\|=\|a\wedge b\|,$$

$$\neg\|a\|=\|\neg a\|,$$

$$\mathbf{0}=\|\mathbf{0}\|,\qquad \mathbf{1}=\|\mathbf{1}\|.$$

易证 $\mathfrak{C}$ 是布尔代数，且是同态 $h(a)=\|a\|$ 的同态象.

类似地，在κ-完全布尔代数上的κ-同态和κ-**完全理想**（对κ-并封闭）之间存在一对应，在$\nearrow\kappa$-完全布尔代数上的$\nearrow\kappa$-同态和$\nearrow\kappa$-**完全理想**之间存在一对应，…. **极大理想**对应到 $\mathfrak{B}_0$ 上的同态.

我们假设读者熟悉下列 Stone-表示定理：

3.1.2 Stone-表示定理 每一布尔代数 $\mathfrak{B}$ 同构一集合域.

证明：本证明可分成两个部分. 第一部分是对任意 $a\neq\mathbf{0}$，证明存在 $\mathfrak{B}$ 的、包含 $\neg a$ 的极大理想. 更一般地，对 B 的任意子集 C 使得 C 的元素的有穷并没有一个是 $\mathbf{1}$，则存在包含 C 的极大理想.

第二部分是证明：把 a 映射到包含$\neg a$ 的所有极大理想的集合的映射是从 $\mathfrak{B}$ 到由诸极大理想构成的一子集域的同构. 这一部分证明对任意无穷基数保持不变. 因此，一$\nearrow\kappa$-完全布尔代数同构一$\nearrow\kappa$-集合域 $\Leftrightarrow$ 对每一 $a\neq\mathbf{0}$，存在包含 $\neg a$ 的$\nearrow\kappa$-完全理想. 等价地说，对任意 $a\neq\mathbf{0}$，存在从 $\mathfrak{B}$ 到 $\mathfrak{B}_0$ 的$\nearrow\kappa$-同态把 a 映射到 $\mathbf{1}$.

注意：上述证明的第一部分对 $\kappa>\omega$ 不成立. Stone-表示定理的详细证明请见 T. J. Jech[1978]，pp. 149—150.

若一$\nearrow\kappa$-完全布尔代数可以表示为一$\nearrow\kappa$-集合域的$\nearrow\kappa$-同态象，则称这个代数是$\nearrow\kappa$-**可表示代数**. 这个方面的工作可以参见 Chang 的[1957]和 Scott 的[1955]. 我们在下面只用这个条件的必要条件. 至于充分条件，它是引理 3.2.28 的一个直接推论.

3.1.3 定理 设 $\mathfrak{B}$ 是一$\nearrow\kappa$-集合域的$\nearrow\kappa$-同态象，任给 $a\neq\mathbf{0}$ 和由 B 的幂$<\kappa$ 的子集 C_ξ 的交 $\wedge C_\xi$ 构成的、幂$<\kappa$ 的聚合，则存在 $\mathfrak{B}$ 到 $\mathfrak{B}_0$ 的同态把 a 映射到 $\mathbf{1}$ 且保持上述交 $\wedge C_\xi$.

证明：设 $\mathscr{S}=\langle S,\sim,\cap,\cup\rangle$是某个集合 U 的$\nearrow\kappa$-子集域，h 是从 $\mathscr{S}$ 到 $\mathfrak{B}=\langle B,\neg,\wedge,\vee\rangle$的$\nearrow\kappa$-同态. 用下列方法把 B 划分为两个子集 B_1 和 B_2 使得 B_1 不包含互补对且 B_2 的每一元素是 B_1 的元素的补：把 B 中的元素排列成一个超穷序列$\langle b_\xi:\xi<|B|\rangle$，把 b_0 放入 B_1，然后把 b_ξ 放入 $B_1\Leftrightarrow\neg b_\xi$ 不在 B_1 中. 令 k 是 B_1 上 h 的逆使得对 $b\in B_2$，$k(b)=\sim k(\neg b)$，则 k 是 B 的所有元上的、h 的逆

且 k 保持补性质.

设给定的交为 $\wedge C_i, i\in I, |I|<\kappa$, 且对所有 $i\in I, |C_i|<\kappa$. 令

$$C=\{a,\neg a,\mathbf{0},\mathbf{1}\}\cup\bigcup_{i\in I}C_i\cup\{\wedge C_i:i\in I\}$$

$$\cup\{\neg c:c\in\bigcup_{i\in I}C_i\}\cup\{\neg\wedge C_i:i\in I\}.$$

若 κ 是奇异的,则每个 $\nearrow\kappa$-集合域是 κ-集合域且每一 $\nearrow\kappa$-同态是 κ-同态. 因此不妨设 κ 是正则的,从而 $|C|<\kappa$.

令 $\mathscr{K}$ 是 B 的下列子集的、幂 $<\kappa$ 的聚合:

$\{\neg a\}$, $\{\mathbf{0}\}$, $\{\neg\wedge C_i\}\cup C_i$, 对每一 $i\in I$,

$\{\neg b_0,\cdots,\neg b_n,(b_0\vee\cdots\vee b_n)\}$, 对每一有穷集 $\{b_0,\cdots,b_n\}\subseteq C$.

因为除了 $\{\neg a\}$, 上述每一集合的交为 $\mathbf{0}$, 所以 $\vee\{\wedge D:D\in\mathscr{K}\}=\neg a$. 对 $D\in\mathscr{K}$, 令 $\mathscr{J}=\{\{k(b):b\in D\}:D\in\mathscr{K}\}$, 因为 $\nearrow\kappa$-同态 h 把 $\bigcup\{\bigcap E:E\in\mathscr{J}\}$ 映射到 $\neg a\neq\mathbf{1}$, 所以 $\bigcup\{\bigcap E:E\in\mathscr{J}\}\neq U$, 据 $\mathscr{S}$ 中成立的分配律,存在 $T\in S, T\neq\varnothing$, 使得对所有 $D\in\mathscr{K}$ 存在 $b\in D$ 使得 $T\subseteq\sim k(b)$. 令 $C_1=C\cap\{b:T\subseteq\sim k(b)\}$, 则对每一 $D\in\mathscr{K}$, C_1 包含 D 中一元素. 因为

$$T\subseteq\sim k(b)\text{且 }T\subseteq\sim k(\neg b)=k(b)\Rightarrow T=\varnothing,$$

所以 C_1 不包含互补对. 显然, C_1 的上述性质正是我们所需的.

易见 $\neg a,\mathbf{0}\in C_1$, 且对每一 $i\in I$, C_1 或包含 $\neg\wedge C_i$ 或包含 C_i 的一元素. 因为 C_1 包含每一形如 $\{\neg b_0,\cdots,\neg b_n,(b_0\vee\cdots\vee b_n)\}$ 的集合的一元素且不包含 $\mathbf{1}$, 所以 C_1 的元素的每一有穷并都不是 $\mathbf{1}$. 由包含 C_1 的一极大理想给出的、到 $\mathfrak{B}_0$ 的同态就是我们要求的同态. □

3.1.4 定理 设 $\mathfrak{B}$ 是任意布尔代数,任给 $a\neq\mathbf{0}$ 和 $\mathfrak{B}$ 中交的可数聚合 $\{\wedge C_i:i<\omega\}$, 则存在 $\mathfrak{B}$ 到 $\mathfrak{B}_0$ 的同态把 a 映射到 $\mathbf{1}$ 且保持上述交 $\wedge C_i$.

证明: 令 $D_0=\{\neg a\}$, 设 D_n 有穷, $\vee D_n\neq\mathbf{1}$, D_n 包含 $\neg a$, 且对每一 $i\leqslant n$, D_n 包含 $\neg\wedge C_i$ 或包含 C_i 中一元素. 若 $\vee D_n\vee\neg\wedge C_{n+1}\neq\mathbf{1}$, 还令 $D_{n+1}=D_n\cup\{\neg\wedge C_{n+1}\}$. 另一方面,若 $\vee D_n\vee\neg\wedge C_{n+1}=\mathbf{1}$, 则存在 $c\in C_{n+1}$ 使得 $\vee D_n\vee c\neq\mathbf{1}$. 因为对所有 $c\in C_{n+1}$,

$$\vee D_n \vee c = \mathbf{1} \Rightarrow \vee D_n \vee \wedge C_{n+1} = \mathbf{1}.$$

但因为$\vee D_n \vee \neg \wedge C_{n+1} = \mathbf{1}$，所以$\vee D_n = \mathbf{1}$，与假设矛盾．在这种情况下，令$D_{n+1} = D_n \cup \{c\}$，则$\vee D_{n+1} \neq \mathbf{1}$，$D_{n+1}$包含$\neg a$，且对每一$i \leqslant n+1$，$D_{n+1}$或包含$\neg \wedge C_i$或包含$C_i$的一元素．令$D = \bigcup \{D_n : n < \omega\}$．因为$D$的元素的所有有穷并都不是$\mathbf{1}$，所以存在$\mathfrak{B}$的、包含$D$的极大理想，对应的、到$\mathfrak{B}_0$的同态就有我们要求的性质．□

注意：下面的定义与 2.1.7 的分配公理模式 D_γ 的异同：

3.1.5 定义　称布尔代数$\mathfrak{B}$满足(κ,δ)-**分配律** $\Leftrightarrow$ 对$\mathfrak{B}$中元素的每一双重指标集$\langle b_{ij} : i \in I, j \in J \rangle$，

$$\bigwedge_{i \in I} \Big(\bigvee_{j \in J} b_{ij} \Big) = \bigvee_{f \in \mathbf{F}} \Big(\bigwedge_{i \in I} b_{i,f(i)} \Big),$$

其中$\mathbf{F} = J^I$，$|I| \leqslant \kappa$，$|J| \leqslant \delta$，而且并$\bigvee_{j \in J} b_{ij}$(对所有$i \in I$)，交$\bigwedge_{i \in I} \big(\bigvee_{j \in J} b_{ij} \big)$，交$\bigwedge_{i \in I} b_{i,f(i)}$(对所有$f \in \mathbf{F}$)均在$\mathfrak{B}$中存在．

若$\mathfrak{B}$满足(κ,κ)-分配律，则简称$\mathfrak{B}$满足κ-**分配律**．

练　习

3.1.6　详细证明定理 3.1.2．

§2　命题逻辑的完全性定理

任给演绎系统$\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta;\Omega)$，称$\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta;\Omega)$相对语言$\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$是**完全系统** $\Leftrightarrow$ 对$\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的所有公式$\varphi$，$\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta;\Omega) \vdash \varphi \Leftrightarrow \models \varphi$．

称$\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta;\Omega)$相对$\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$是**强完全系统** $\Leftrightarrow$ 对$\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的所有公式$\varphi$和公式集$\Phi$，$\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta;\Omega)$；$\Phi \vdash \varphi \Leftrightarrow \Phi \models \varphi$．

称$\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta;\Omega)$是(**强**)**完全系统** $\Leftrightarrow$ $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta;\Omega)$相对所有语言$\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$是(强)完全的．

我们知道$\mathbf{B}_{\omega\omega}$是强完全的．后面我们将看到，对绝大多数由其它无穷语言表述的演绎系统来说，没有强完全性定理，而且对相当

一部分无穷语言来说，甚至不能建立有完全性定理的演绎系统.

本节只讨论命题逻辑的完全性. 除非另加说明，本节考虑的命题语言 $\mathscr{L}_\kappa$ 的初始命题符号集是 $\{p_\xi:\xi<\kappa\}$ 或 $\{p_{\alpha\beta}:\alpha,\beta<\kappa\}$，其中 κ 是正则基数；$p, p_\xi, p_{\alpha\beta}, \cdots$ 总是指 $\mathscr{L}_\kappa$ 的初始命题符号；$\varphi, \psi, \sigma, \cdots$ 总是指 $\mathscr{L}_\kappa$ 的公式；$\Phi, \Psi, \Sigma, \cdots$ 总是指 $\mathscr{L}_\kappa$ 的公式集.

显然，我们有下列引理：

3.2.1 引理 若函数 f 是定义在 $\{p_\xi:\xi<\kappa\}$ 或 $\{p_{\alpha\beta}:\alpha,\beta<\kappa\}$ 上的真值赋值函数使得 $\mathrm{Ran}(f)=\{0,1\}$，则存在 f 的唯一扩张 f^*：$\mathrm{Form}(\mathscr{L}_\kappa)\to\{0,1\}$ 使得

(1) $f^*(p)=f(p)$， 对任意 p，

(2) $f^*(\neg\varphi)=1 \Leftrightarrow f^*(\varphi)=0$，

(3) $f^*(\bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_\xi)=1 \Leftrightarrow$ 对所有 $\xi<\gamma, f^*(\varphi_\xi)=1$. □

注意：f^* 实际是论域为 $\{0,1\}$ 的 $\nearrow\kappa$ -真值布尔代数 $\mathfrak{B}_0$.

本节固定 f^* 是 f 的上述扩张.

3.2.2 定义 称 φ 是**有效公式**，记为 $\models\varphi$，

$\Leftrightarrow$ 对所有真值赋值 f 使得 f^* 如上规定，$f^*(\varphi)=1$.

称真值赋值 f **满足**公式集 $\Sigma \Leftrightarrow$ 对所有 $\varphi\in\Sigma, f^*(\varphi)=1$.

称 Σ 是**可满足公式集** $\Leftrightarrow$ 存在真值赋值 f 使得 f 满足 Σ.

称 φ 是 Σ 的**语义后承**，记为 $\Sigma\models\varphi$，

$\Leftrightarrow$ 对所有赋值 f，若对所有 $\psi\in\Sigma, f^*(\psi)=1$，则 $f^*(\varphi)=1$.

称 Σ 是**κ-语义一致的** $\Leftrightarrow$ Σ 的每一幂 $<\kappa$ 的子集是可满足的.

称 φ 是 Σ 的**严格语义后承**，记为 $\varnothing;\Sigma\models\varphi$，

$\Leftrightarrow$ $\models\varphi$，或存在幂 $<\kappa$ 的 $\Phi\subseteq\Sigma$ 使得 $\models\bigwedge\Phi\to\varphi$.

3.2.3 例 令 γ 是无穷基数，$\mathscr{L}_{\gamma^+}$ 的初始命题符号集是 $\{p_{\alpha\beta}:\alpha<\gamma^+,\beta<\gamma\}$，显见下列 Σ_γ 是 γ^+-语义一致但不是可满足的：

$$\Sigma_\gamma=\{\bigvee_{\beta<\gamma}p_{\alpha\beta}:\alpha<\gamma^+\}$$
$$\cup\{\neg(p_{\alpha\beta}\wedge p_{\alpha_1\beta}):\alpha,\alpha_1<\gamma^+,\alpha\neq\alpha_1 \text{ 且 } \beta<\gamma\}.$$

这说明，任何幂 $\leqslant\gamma$ 的集合可以单射入 γ，而幂为 γ^+ 的集合则

不然．对上例，若$|\Sigma|=2^\gamma$，则只需γ个初始命题符号．

3.2.4 例 令γ是无穷基数，$\mathscr{L}_{\gamma^+}$的初始命题符号集是$\{p_{\alpha\beta}:\alpha<\gamma,\beta<2\}$，显见下列$\Sigma$是$\gamma$-语义一致但不是可满足的：

$$\Sigma=\{\bigwedge_{\alpha<\gamma}(p_{\alpha 0}\vee p_{\alpha 1})\}\cup\{\neg\bigwedge_{\alpha<\gamma}p_{\alpha,f(\alpha)}:f\in 2^\gamma\}.$$

上述两例说明通常的紧致性在此已不成立．关于紧致性的问题以后有关章节还要详细讨论．

3.2.5 可满足引理 称Σ是可满足的$\Leftrightarrow$存在$\Phi\supseteq\Sigma$使得

(1) 若$\varphi\in\mathrm{Sub}(\Sigma)$，则 $\varphi\in\Phi\Leftrightarrow\neg\varphi\notin\Phi$，

(2) 若$\bigwedge\Psi\in\mathrm{Sub}(\Sigma)$且$|\Psi|<\kappa$，则

$$\bigwedge\Psi\in\Phi\Leftrightarrow \text{对所有}\ \psi\in\Psi,\psi\in\Phi.$$

证明：“$\Rightarrow$”：设存在真值赋值f满足Σ，则$\Phi=\{\varphi:f^*(\varphi)=1\}$有性质(1)和(2)且$\Sigma\subseteq\Phi$.

“$\Leftarrow$”：设$\Phi\supseteq\Sigma$满足(1)和(2)，令f是下列函数：对所有p，

$$f(p)=\begin{cases}1, & \text{若}\ p\in\Phi;\\ 0, & \text{若}\ p\notin\Phi.\end{cases}$$

令$\Gamma=\{\varphi:$ 若$\varphi\in\mathrm{Sub}(\Sigma)$，则$\varphi\in\Phi\Leftrightarrow f^*(\varphi)=1\}$．据归纳原则1.1.5，易证$\Gamma=\mathrm{Form}(\mathscr{L}_\kappa)$．因为$\Phi\supseteq\Sigma$，所以$f$满足$\Sigma$. □

3.2.6 例 令语言$\mathscr{L}_\kappa$有一个κ-语义一致但不是可满足的公式集Σ，因为满足Σ的真值赋值集是空的，所以有$\Sigma\models\varphi\wedge\neg\varphi$．若对$\mathscr{L}_\kappa$存在强完全系统$\mathbf{B}_\kappa$，则

$$\mathbf{B}_\kappa;\Sigma\vdash\varphi\wedge\neg\varphi\Leftrightarrow\Sigma\models\varphi\wedge\neg\varphi.$$

所以我们有$\mathbf{B}_\kappa;\Sigma\vdash\varphi\wedge\neg\varphi$．不难证明在$\mathbf{B}_\kappa$中从$\Sigma$到$\varphi\wedge\neg\varphi$的形式证明序列中出现的、属于$\Sigma$的公式少于$\kappa$个，所以存在幂$<\kappa$的$\Phi\subseteq\Sigma$使得$\mathbf{B}_\kappa;\Phi\vdash\varphi\wedge\neg\varphi$，据$\mathbf{B}_\kappa$的强完全性，有$\Phi\models\varphi\wedge\neg\varphi$，这与$\Sigma$的$\kappa$-语义一致性矛盾．

上例说明，对$\mathscr{L}_{\gamma^+}$，其中γ是无穷基数，若$\mathscr{L}_{\gamma^+}$有$\geqslant\gamma$个初始命题符号，则对应$\mathscr{L}_{\gamma^+}$就不存在强完全的演绎系统．因为γ个初始命题符号能被加上双重指标从而产生3.2.4那样γ-语义一致但

不是可满足的集合. 然而若$\mathscr{L}_{\gamma^+}$有$\delta<\gamma$个初始命题符号且$2^\delta\leqslant\gamma$，则存在对应$\mathscr{L}_{\gamma^+}$的强完全演绎系统$\mathbf{B}_{\gamma^+}(\mathrm{D}_\gamma)$(参见 3.2.16).

3.2.7 引理 (1) 令Γ是有效公式集，$\mathbf{B}_\kappa(\Gamma)$是扩张系统，则

$$\mathbf{B}_\kappa(\Gamma);\Sigma\vdash\varphi\Rightarrow\Sigma\models\varphi.$$

(2) 由 2.1.6 和 2.1.7 规定的$\mathscr{L}_\kappa$的CD_γ，D_γ和D_γ^+是有效式，且 2.1.8 规定的$\mathscr{L}_\kappa$的DR_γ和κ_n-DR_γ保持有效性.

证明:(1) 显然，$\mathbf{B}_\kappa$的公理是有效式，分离规则和合取规则保持有效性，这说明$\mathbf{B}_\kappa$的内定理是有效的.

若f是满足Σ的任意真值赋值，施归纳不难证明f^*满足$\mathscr{L}_\kappa(\Gamma)$中从$\Sigma$到$\varphi$的形式证明中所有的公式，因此$f^*(\varphi)=1$.

(2) 考虑CD_γ:设f是指派 0 或 1 给CD_γ中的初始命题符号的真值赋值. 若$f^*(\mathrm{CD}_\gamma)=0$，则对每一$\alpha<\gamma$，存在$\beta_\alpha<\gamma$使得$f^*(\varphi_{\alpha,\beta_\alpha})=0$. 令$g(\alpha)=\beta_\alpha$，则选择集$\{\varphi_{\alpha,g(\alpha)}:\alpha<\gamma\}$的公式在$f^*$的指派下皆为 0，这说明$\{\varphi_{\alpha,g(\alpha)}:\alpha<\gamma\}$不可能对某个$\xi<\gamma$包含$\varphi_\xi$和$\neg\varphi_\xi$，因为$f^*$不可能对$\varphi_\xi,\neg\varphi_\xi$皆赋值 0，所以$\varphi_\xi,\neg\varphi_\xi$必有一个不属于$\{\varphi_{\alpha,g(\alpha)}:\alpha<\gamma\}$，而这与$\mathrm{CD}_\gamma$的规定矛盾.

据选择公理，D_γ和D_γ^+显然是有效的.

考虑DR_γ:令f是任意真值函数使得对任意$g\in\prod_{i\in I}\Phi_i$，

$$f^*(\psi\rightarrow\neg\bigwedge_{i\in I}g(i))=f^*(\psi)=1,$$

则$f^*(\neg\bigwedge_{i\in I}g(i))=1$，即$f^*(\bigwedge_{i\in I}g(i))=0$，因此综上所述，

$$\text{对所有 } g\in\prod_{i\in I}\Phi_i \text{ 存在 } i\in I \text{ 使得 } f^*(g(i))=0. \tag{3.1}$$

若$f^*(\neg\bigwedge_{i\in I}\bigvee\Phi_i)\neq1$，则$f^*(\bigwedge_{i\in I}\bigvee\Phi_i)=1$，所以对所有$i\in I$，存在$\varphi_i\in\Phi_i$，$f^*(\varphi_i)=1$. 对所有$i\in I$，令$g(i)=\varphi_i$，所以存在$g\in\prod_{i\in I}\Phi_i$，对所有$i\in I$，$f^*(g(i))=1$，这与(3.1)矛盾. 验证$\kappa_n$-$\mathrm{DR}_\gamma$如上. □

3.2.8 完全性引理 令Σ是有效公式集，Ω是上述保持有效性的规则集，$\langle\varphi_{\alpha\beta}:\alpha<\gamma,\beta<\gamma_\alpha\rangle$是阵列使得$\gamma<\kappa$且对$\alpha<\gamma$，有$\gamma_\alpha$

$\leqslant\gamma$. 设该阵列的每一选择集是矛盾的且在 $\mathbf{B}_\kappa(\Sigma;\Omega)$ 中，

$$\text{对所有 } \alpha \text{ 使得 } 0<\alpha<\gamma, \vdash \bigvee_{\beta<\gamma_\alpha}\varphi_{\alpha\beta} \Rightarrow \vdash \neg\bigvee_{\beta<\gamma_0}\varphi_{0\beta},$$

则 $\mathbf{B}_\kappa(\Sigma;\Omega)$ 是完全的.

证明：据 3.2.7，若 φ 在 $\mathbf{B}_\kappa(\Sigma;\Omega)$ 中可证，则 φ 是有效公式.

设 φ 是任意有效式，我们来证明在满足上述题设的情况下，φ 在 $\mathbf{B}_\kappa(\Sigma;\Omega)$ 中可证. 不妨设 φ 是无穷公式，否则据有穷逻辑的完全性定理即可. 假设 γ 是最小的基数使得 γ 是 φ 中所有合取肢长度的基数的上界，所以 $\omega\leqslant\gamma<\kappa$. 我们用下列方法把 φ 的子公式和一定的公式序列对应起来：

① $\neg\psi\in\mathrm{Sub}(\varphi)$，对应序列 $\langle\neg\psi,\psi\rangle$；

② $\bigvee_{\xi<\gamma}\psi_\xi\in\mathrm{Sub}(\varphi)$，对应下面两种公式序列：

$$\langle\bigwedge_{\xi<\gamma}\psi_\xi, \langle\neg\psi_\xi:\xi<\gamma\rangle\rangle,$$

$$\langle\neg\bigwedge_{\xi<\gamma}\psi_\xi, \psi_\tau\rangle, \quad \text{对 } \bigwedge_{\xi<\gamma}\psi_\xi \text{ 的每一合取肢 } \psi_\tau.$$

不难证明，对 $\bigwedge_{\xi<\gamma}\psi_\xi$，从而对 φ，一共存在 γ 个这样的序列而且每一序列的长度至多是 γ. 我们用 $0<\alpha<\gamma$ 中的序数 α 来对上述序列加指标. 把上述每个序列改写为 $\langle\varphi_{\alpha\beta}:\beta<\gamma_\alpha\rangle$，其中 γ_α 是该序列的长度；对 $\alpha=0$，令 $\gamma_0=1$ 且 $\varphi_{00}=\neg\varphi$，即把序列 $\langle\neg\varphi\rangle$ 作为第一个序列. 这样我们得到了关于 φ 的阵列 $\langle\varphi_{\alpha\beta}:\alpha<\gamma,\beta<\gamma_\alpha\rangle$. 下证：

上述阵列的每一选择集是矛盾的.

假设存在这样的一个选择集 Γ 不是矛盾的，如下易证 Γ 满足 3.2.5 的(1)和(2)：Γ 满足(1)是显然的. 对(2)，假设 φ 的某个子公式 $\bigwedge_{\xi<\gamma}\psi_\xi\in\Gamma$，则相对 $\bigwedge_{\xi<\gamma}\psi_\xi$ 的公式序列是

$$\langle\bigwedge_{\xi<\gamma}\psi_\xi, \langle\neg\psi_\xi:\xi<\gamma\rangle\rangle,$$

$$\langle\neg\bigwedge_{\xi<\gamma}\psi_\xi, \psi_\tau\rangle, \quad \text{对 } \bigwedge_{\xi<\gamma}\psi_\xi \text{ 的每一合取肢 } \psi_\tau.$$

因为 Γ 是选择集且不包括矛盾命题，所以 $\neg\bigwedge_{\xi<\gamma}\psi_\xi\notin\Gamma$，因此对所有 $\tau<\gamma$，$\psi_\tau\in\Gamma$. 反之也同理可证. 这样我们证明了 Γ 满足 3.2.5 的

(1)和(2). 显然,$\neg\varphi\in\Gamma$(事实上每一选择集都包含$\neg\varphi$),因此据 3.2.5,$\neg\varphi$是可满足的,与φ的有效性矛盾.

下证:对所有α使得$0<\alpha<\gamma$,在$\mathbf{B}_\kappa(\Sigma;\Omega)$中,

$$\vdash \bigvee_{\beta<\gamma_\beta}\varphi_{\alpha\beta}.$$

据$\langle\varphi_{\alpha\beta}:\beta<\gamma_\alpha\rangle$的构造,对$0<\alpha<\gamma$,若$\langle\varphi_{\alpha\beta}:\beta<\gamma_\alpha\rangle$对应的是$\varphi$的形如$\neg\psi$的子公式,则$\bigvee_{\beta<\gamma_\alpha}\varphi_{\alpha\beta}=\bigvee\{\neg\psi,\psi\}$. 若$\langle\varphi_{\alpha\beta}:\beta<\gamma_\alpha\rangle$对应的是$\varphi$的形如$\bigwedge_{\xi<\gamma}\psi_\xi$的子公式,则$\bigvee_{\beta<\gamma_\alpha}\varphi_{\alpha\beta}$就有下列两种形式之一:

(1) $\bigvee\{\bigwedge_{\xi<\gamma}\psi_\xi,\ \{\neg\psi_\xi:\xi<\gamma\}\}$,或

(2) $\bigvee\{\neg\bigwedge_{\xi<\gamma}\psi_\xi,\ \psi_\tau\}$, 对$\bigwedge_{\xi<\gamma}\psi_\xi$的每一合取肢$\psi_\tau$.

(1)中的公式就是$\bigwedge_{\xi<\gamma}\psi_\xi\vee\bigvee_{\xi<\gamma}\neg\psi_\xi$,据公理 2 显然它是可证的. (2)中的公式就是公理 3. 所以,$\vdash\bigvee_{\beta<\gamma_\beta}\varphi_{\alpha\beta}$. 据题设和$\varphi_{00}=\neg\varphi$,$\vdash\neg\bigvee\varphi_{00}$,即$\vdash\neg\bigvee\neg\varphi$,因此我们有

$$\mathbf{B}_\kappa(\Sigma;\Omega)\vdash\varphi.\ \Box$$

3.2.9 完全性定理 基本系统$\mathbf{B}_{\omega_1}$是完全的.

证明:设$\langle\varphi_{n\beta}:n<\omega,\beta<\gamma_n\rangle$是$\mathscr{L}_{\omega_1}$的阵列,其中对每一$n<\omega$,$0<\gamma_n\leqslant\omega$且每一选择集是矛盾的. 假设对每一$n$使得$0<n<\omega$,在$\mathbf{B}_{\omega_1}$中,$\vdash\bigvee_{\beta<\gamma_n}\varphi_{n\beta}$,据完全性引理,我们只须证,$\vdash\neg\bigvee_{\beta<\gamma_0}\varphi_{0\beta}$.

设$\mathbf{B}_{\omega_1}\nvdash\neg\bigvee_{\beta<\gamma_0}\varphi_{0\beta}$,则$\bigvee_{\beta<\gamma_0}\varphi_{0\beta}$相对$\mathbf{B}_{\omega_1}$语法一致,则据 2.1.19,存在某个$\beta_0\in\gamma_0$使得$\varphi_{0\beta_0}$相对$\mathbf{B}_{\omega_1}$语法一致. 据归纳假设,对所有$i\leqslant n$,存在$\beta_i<\gamma_i$使得$\varphi_{0\beta_0}\wedge\cdots\wedge\varphi_{n\beta_n}$相对$\mathbf{B}_{\omega_1}$语法一致. 我们令$\psi_n=\varphi_{0\beta_0}\wedge\cdots\wedge\varphi_{n\beta_n}$,据题设对每一$n$使得$0<n<\omega$,$\mathbf{B}_{\omega_1}\vdash\bigvee_{\beta<\gamma_n}\varphi_{n\beta}$,所以

$$\mathbf{B}_{\omega_1}\vdash\psi_n\leftrightarrow\psi_n\wedge\bigvee_{\beta<\gamma_{n+1}}\varphi_{n+1,\beta},$$

因此$\psi_n\wedge\bigvee_{\beta<\gamma_{n+1}}\varphi_{n+1,\beta}$相对$\mathbf{B}_{\omega_1}$语法一致,因此存在$\beta_{n+1}<\gamma_{n+1}$使得$\psi_n\wedge\varphi_{n+1,\beta_{n-1}}$相对$\mathbf{B}_{\omega_1}$语法一致,所以$\psi_{n+1}$相对$\mathbf{B}_{\omega_1}$语法一致. 令$\Sigma=$

$\{\varphi_{n\beta_n}:n<\omega\}$，显然，这是一选择集. 如上证，$\Sigma$ 的公式的所有有穷合取相对 $\mathbf{B}_{\omega_1}$ 语法一致，因此 Σ 不是矛盾的. 与题设条件相反. □

注意：在上面给出的完全性定理的证明中，公式的可枚举性是本质的. 下面我们将看到，对 $\kappa>\omega_1$，需要增加集合论背景的公理或规则才能保证完全性定理的成立.

下面首先考虑包含 Chang-分配律的演绎系统的完全性. 从前面的 2.1.6，我们知道 $\bigvee_{\alpha<\gamma}(\bigwedge_{\beta<\gamma}\varphi_{\alpha\beta})$ 是 Chang-分配律的充分必要条件是 $\langle\varphi_{\alpha\beta}:\alpha,\beta<\gamma\rangle$ 的每一选择集是矛盾的.

3.2.10 引理 若 $\delta<\gamma<\kappa$，CD_δ 在 $\mathbf{B}_\kappa(CD_\gamma)$ 中可证.

证明：设阵列 $\langle\varphi_{\alpha\beta}:\alpha,\beta<\delta\rangle$ 的每一选择集矛盾. 首先对 $\alpha<\delta$，$\delta\leqslant\beta<\gamma$，通过重复 $\varphi_{\alpha\beta}=\varphi_{\alpha 0}$ 把 $\langle\varphi_{\alpha\beta}:\alpha,\beta<\delta\rangle$ 的每一横排 $\langle\varphi_{\alpha\beta}:\beta<\delta\rangle$ 扩充到长度为 γ 的公式序列. 据 2.2.7 的广义交换律，

$$\mathbf{B}_\kappa(CD_\gamma)\vdash\bigwedge_{\beta<\gamma}\varphi_{\alpha\beta}\leftrightarrow\bigwedge_{\beta<\delta}\varphi_{\alpha\beta},\quad \text{对每一 }\alpha<\delta. \tag{3.2}$$

然后对 $\delta\leqslant\alpha<\gamma$，通过令 $\varphi_{\alpha\beta}=\varphi_{0\beta}$ 来重复第 0 横排 $\langle\varphi_{0\beta}:\beta<\delta\rangle$ 把 $\langle\varphi_{\alpha\beta}:\alpha,\beta<\delta\rangle$ 扩充为行数长度为 γ 的 $\langle\varphi_{\alpha\beta}:\alpha,\beta<\gamma\rangle$. 据广义交换律，

$$\mathbf{B}_\kappa(CD_\gamma)\vdash\bigvee_{\alpha<\gamma}(\bigwedge_{\beta<\delta}\varphi_{\alpha\beta})\leftrightarrow\bigvee_{\alpha<\delta}(\bigwedge_{\beta<\delta}\varphi_{\alpha\beta}). \tag{3.3}$$

显然，如此得到的阵列 $\langle\varphi_{\alpha\beta}:\alpha,\beta<\gamma\rangle$ 仍有下列性质：

每一选择集是矛盾的.

因此 $\bigvee_{\alpha<\gamma}(\bigwedge_{\beta<\gamma}\varphi_{\alpha\beta})$ 是 Chang-分配律，所以，

$$\mathbf{B}_\kappa(CD_\gamma)\vdash\bigvee_{\alpha<\gamma}(\bigwedge_{\beta<\gamma}\varphi_{\alpha\beta}). \tag{3.4}$$

从(3.2)，(3.3)和(3.4)不难得到

$$\mathbf{B}_\kappa(CD_\gamma)\vdash\bigvee_{\alpha<\delta}(\bigwedge_{\beta<\delta}\varphi_{\alpha\beta}).\ \square$$

3.2.11 引理 若 $\gamma<\kappa$ 且对每一 $\alpha<\gamma$，$\gamma_\alpha\leqslant\gamma$，且 $\mathscr{L}_\kappa$ 的阵列 $\langle\varphi_{\alpha\beta}:\alpha<\gamma,\beta<\gamma_\alpha\rangle$ 的每一选择集是矛盾的，则

$$\mathbf{B}_\kappa(CD_\gamma)\vdash\bigvee_{\alpha<\gamma}(\bigwedge_{\beta<\gamma_\alpha}\varphi_{\alpha\beta}).$$

证明：类似 3.2.10 的证明，通过重复已有公式把上述阵列扩充为长度为 γ 的公式序列. □

3.2.12 完全性定理（Scott-Tarski，[1958]）　令 γ 是无穷基数，则 $\mathbf{B}_{\gamma^+}(\mathrm{CD}_\gamma)$ 相对语言 $\mathscr{L}_{\gamma^+}$ 是完全的.

证明：给定 $\mathscr{L}_{\gamma^+}$ 的阵列 $\langle\varphi_{\alpha\beta}:\alpha<\delta,\beta<\gamma_\alpha\rangle$，其中 $\delta<\gamma^+$ 且对 $\alpha<\delta,\gamma_\alpha\leqslant\delta$ 使得每一选择集是矛盾的. 设对所有 α 使得 $0<\alpha<\delta$ 且在 $\mathbf{B}_{\gamma^+}(\mathrm{CD}_\gamma)$ 中，$\vdash\bigvee_{\beta<\gamma_\alpha}\varphi_{\alpha\beta}$，据完全性引理，只须证 $\vdash\neg\bigvee_{\beta<\gamma_0}\varphi_{0\beta}$.

因为 $\langle\neg\varphi_{\alpha\beta}:\alpha<\delta,\beta<\gamma_\alpha\rangle$ 的每一选择集也是矛盾的，所以据 3.2.10 和 3.2.11，

$$\vdash\bigvee_{\alpha<\delta}\theta_\alpha,\tag{3.5}$$

其中 $\theta_\alpha=\bigwedge_{\beta<\gamma_\alpha}\neg\varphi_{\alpha\beta}$. 据我们的假设，对 $0<\alpha<\delta$，我们有 $\vdash\bigvee_{\beta<\gamma_\alpha}\varphi_{\alpha\beta}$，所以，$\vdash\neg\theta_\alpha$，因此据合取规则，

$$\vdash\bigwedge_{1\leqslant\alpha<\delta}\neg\theta_\alpha,\tag{3.6}$$

据 2.2.7(9)的(b)，

$$\vdash\bigwedge_{1\leqslant\alpha<\delta}\neg\theta_\alpha\to(\bigvee_{\alpha<\delta}\theta_\alpha\to\theta_0),\tag{3.7}$$

联立(3.5)，(3.6)和(3.7)，有 $\vdash\theta_0$，因此 $\vdash\neg\bigvee_{\beta<\gamma_0}\varphi_{0\beta}$. □

3.2.13 完全性定理（Scott-Tarski，[1958]）　令 κ 是不可达基数，则 $\mathbf{B}_\kappa(\{\mathrm{CD}_\gamma:\gamma<\kappa\})$ 是完全的. □

证明留给读者做练习.

下面我们来考虑包括公理 D_γ 的演绎系统的完全性.

3.2.14 引理　令 κ 是正则无穷基数，γ 是基数使得 $(2^\gamma)^+\leqslant\kappa$，

(1) CD_γ 在 $\mathbf{B}_\kappa(\mathrm{D}_\gamma)$ 中可证.

(2) D_γ 在 $\mathbf{B}_\kappa(\mathrm{CD}_{2^\gamma})$ 中可证.

(3) 若基数 $\delta,\tau\leqslant\gamma$，且 $\delta^\tau=\{f_\xi:\xi<\delta^\tau\}$（**注意**：等式左边的 δ^τ 表示函数集，花括号内的 δ^τ 表示基数），则

$$\mathbf{B}_\kappa(\mathrm{D}_\gamma)\vdash\bigwedge_{\alpha<\delta}(\bigwedge_{\beta<\tau}\varphi_{\alpha\beta})\to\bigvee_{\xi<\delta^\tau}(\bigwedge_{\alpha<\delta}\varphi_{\alpha,f_\xi(\alpha)}).$$

证明：(1) 设 $\mathscr{L}_\kappa$ 的阵列 $\langle\varphi_{\alpha\beta}:\alpha,\beta<\gamma\rangle$ 的每一选择集是矛盾的，要证 $\bigvee_{\alpha<\gamma}(\bigwedge_{\beta<\gamma}\varphi_{\alpha\beta})$ 在 $\mathbf{B}_\kappa(\mathrm{D}_\gamma)$ 中可证. 令 $\langle g_\xi:\xi<2^\gamma\rangle$ 是据 D_γ 的假设

预先选定的 γ^γ 中元素的序列，则$\{\varphi_{\alpha,g_\xi(\alpha)}:\alpha<\gamma\}$是一个矛盾的选择集，所以在 $\mathbf{B}_\kappa(\mathrm{D}_\gamma)$中，

$$\vdash \bigvee_{\alpha<\gamma}\varphi_{\alpha,g_\xi(\alpha)},\quad \text{对每一}\ \xi<2^\gamma.$$

因为 $2^\gamma<\kappa$，所以据合取规则，$\vdash \bigwedge_{\xi<2^\gamma}(\bigvee_{\alpha<\gamma}\varphi_{\alpha,g_\xi(\alpha)})$. 而据 D_γ，

$$\vdash \neg\bigvee_{\xi<2^\gamma}(\bigwedge_{\alpha<\gamma}\neg\varphi_{\alpha,g_\xi(\alpha)})\to\neg\bigwedge_{\alpha<\gamma}(\bigvee_{\beta<\gamma}\neg\varphi_{\alpha\beta}).$$

据 2.2.7(5)等，$\mathbf{B}_\kappa(\mathrm{D}_\gamma)\vdash\bigvee_{\alpha<\gamma}(\bigwedge_{\beta<\gamma}\varphi_{\alpha\beta})$.

(2)—(3)的证明留给读者做练习. □

3.2.15 完全性定理 若 κ 是强不可达基数(即 κ 是正则基数且 $\gamma<\kappa\Rightarrow 2^\gamma<\kappa$)，则 $\mathbf{B}_\kappa(\{\mathrm{D}_\gamma:\gamma<\kappa\})$是完全的.

证明：因为当 $\gamma<\kappa$ 时，$2^\gamma<\kappa$. 故据 3.2.13，$\mathbf{B}_\kappa(\{\mathrm{CD}_\gamma:\gamma<\kappa\})$是完全的，而据 3.2.14，就有本定理. □

3.2.16 强完全性定理 令 γ 是无穷基数，$(2^\gamma)^+\leqslant\kappa$ 且 $\mathscr{L}_\kappa$ 至多有 γ 个初始命题符号，则 $\mathbf{B}_\kappa(\mathrm{D}_\gamma)$是强完全的.

证明：令 $\mathrm{PR}=\{p_\alpha:\alpha<\delta\}$是 $\mathscr{L}_\kappa$ 的所有初始命题符号的集合使得 PR 可用一个序数 $\delta\leqslant\gamma$ 指标. 对 PR 的每一真值赋值 f(显然，PR 有 2^δ 个不同的真值赋值)，令 $\theta_f=\bigwedge_{\alpha<\delta}f'(p_\alpha)$，其中

$$f(p_\alpha)=\begin{cases}1, & f'(p_\alpha)=p_\alpha;\\ 0, & f'(p_\alpha)=\neg p_\alpha.\end{cases}$$

则 f 是唯一满足 θ_f 的真值赋值. 因为系统内定理就是有效式，所以 $\mathbf{B}_\kappa\vdash\theta_f\to\varphi\Rightarrow f$ 满足 φ. 令 Δ 是 $\mathscr{L}_\kappa$ 的下列公式集

$$\{\varphi: f\ 满足\ \varphi\Rightarrow\mathbf{B}_\kappa\vdash\theta_f\to\varphi,\ f\ 满足\ \neg\varphi\Rightarrow\mathbf{B}_\kappa\vdash\theta_f\to\neg\varphi\}.$$

据归纳原则，易证 Δ 包含 $\mathscr{L}_\kappa$ 的所有初始命题符号且在$\neg$，$\wedge$下封闭，所以 $\Delta=\mathrm{Form}(\mathscr{L}_\kappa)$. 因此我们有

$$f\ 满足\ \varphi\Leftrightarrow\mathbf{B}_\kappa\vdash\theta_f\to\varphi. \tag{3.8}$$

假设 Σ 是任一公式集，φ是任一公式且 $\Sigma\models\varphi$. 下证在 $\mathbf{B}_\kappa(\mathrm{D}_\gamma)$中，$\Sigma\vdash\varphi$. 枚举 $\mathscr{L}_\kappa$ 的所有真值赋值的集合 $\mathscr{F}(\mathrm{PR})=\{f_\xi:\xi<2^\delta\}$.

把 $\mathscr{F}$(PR)划分成两个子集：

$$\mathscr{F}_1=\{f:f\text{ 满足 }\Sigma\},\quad \mathscr{F}_2=\{f:f\text{ 不满足 }\Sigma\}.$$

则据(3.8)，在 $\mathbf{B}_\kappa$ 中，对所有 $f\in\mathscr{F}_1$，

$$\vdash\theta_f\to\varphi. \tag{3.9}$$

对所有 $f\in\mathscr{F}_2$，存在 $\psi\in\Sigma$ 使得 $\vdash\theta_f\to\neg\psi$，则对所有 $f\in\mathscr{F}_2$，

$$\Sigma\vdash\neg\theta_f. \tag{3.10}$$

显然，

$$\vdash\bigwedge_{\alpha<\delta}(p_\alpha\vee\neg p_\alpha). \tag{3.11}$$

令 $p_{\alpha0}=p_\alpha, p_{\alpha1}=\neg p_\alpha$，对 $2\leqslant\beta<\delta$，令 $p_{\alpha\beta}=p_\alpha$，所以(3.11)就成为

$$\vdash\bigwedge_{\alpha<\delta}(\bigvee_{\beta<\delta}p_{\alpha\beta}). \tag{3.12}$$

据 D_γ 和 3.2.14，D_δ 在 $\mathbf{B}_\kappa(\mathrm{D}_\gamma)$中可证，因此给定函数集 δ^δ 的元素的序列 $\langle g_\xi:\xi<2^\delta\rangle$ 使得对每一真值赋值 $f_\xi\in 2^{\mathrm{PR}}$，$p_{\alpha,g_\xi(\alpha)}=f'(p_\alpha)$ (因为 $|2^{\mathrm{PR}}|=2^\delta$)，所以

$$\mathbf{B}_\kappa(\mathrm{D}_\gamma)\vdash\bigwedge_{\alpha<\delta}(\bigvee_{\beta<\delta}p_{\alpha\beta})\to\bigvee_{\xi<2^\delta}(\bigwedge_{\alpha<\delta}f'_\xi(p_\alpha)).$$

因此 $\mathbf{B}_\kappa(\mathrm{D}_\gamma)\vdash\bigvee_{\xi<2^\delta}(\bigwedge_{\alpha<\delta}f'_\xi(p_\alpha))$. 即

$$\mathbf{B}_\kappa(\mathrm{D}_\gamma)\vdash\bigvee\{\theta_{f_\xi}:\xi<2^\delta\}. \tag{3.13}$$

若 $\mathscr{F}_2=\varnothing$，则据(3.9)，2.2.7(3)的(c)，

$$\mathbf{B}_\kappa(\mathrm{D}_\gamma)\vdash\bigvee\{\theta_{f_\xi}:\xi<2^\delta\}\to\varphi. \tag{3.14}$$

因此据(3.13)，$\mathbf{B}_\kappa(\mathrm{D}_\gamma)\vdash\varphi$，所以在 $\mathbf{B}_\kappa(\mathrm{D}_\gamma)$中，$\Sigma\vdash\varphi$.

若 $\mathscr{F}_1=\varnothing$，则据(3.10)和 2.2.7(5)的(a)，我们有 $\Sigma\vdash\neg\bigvee\{\theta_{f_\xi}:\xi<2^\delta\}$. 从而据(3.13)，在 $\mathbf{B}_\kappa(\mathrm{D}_\gamma)$中，易得 $\Sigma\vdash\varphi$.

若 $\mathscr{F}_1\neq\varnothing$ 且 $\mathscr{F}_2\neq\varnothing$，则我们可以把 $\mathscr{F}_1$ 和 $\mathscr{F}_2$ 写作

$$\mathscr{F}_1=\{f_{h_1(\xi)}:\xi<\gamma_1\},\quad \mathscr{F}_2=\{f_{h_2(\xi)}:\xi<\gamma_2\}.$$

据(3.9)和(3.10)，我们有下列(3.15)和(3.16)

$$\vdash\bigvee_{\xi<\gamma_1}\theta_{f_{h_1(\xi)}}\to\varphi, \tag{3.15}$$

$$\Sigma\vdash\bigwedge_{\xi<\gamma_2}\neg\theta_{f_{h_2(\xi)}}. \tag{3.16}$$

因此据(3.13),(3.16)和 2.2.7(9)(b),

$$\Sigma \vdash \bigvee_{\xi<\gamma_1} \theta_{f_{h_1(\xi)}}. \tag{3.17}$$

据(3.15)和(3.17),$\Sigma \vdash \varphi$. □

3.2.17 强完全性定理 若 κ 是强不可达的且 $\mathscr{L}_\kappa$ 只有 $<\kappa$ 个初始命题符号,则 $\mathbf{B}_\kappa(\{\mathrm{D}_\gamma:\gamma<\kappa\})$ 是强完全的.

证明:因为若 $\mathscr{L}_\kappa$ 有 γ 个初始命题符号,则据 3.2.16,$\mathbf{B}_\kappa(\mathrm{D}_\gamma)$ 是强完全的,然后据 3.2.14,就有本定理. □

3.2.18 完全性定理 任给无穷基数 $\gamma<\kappa$,则系统 $\mathbf{B}_\kappa(\mathrm{DR}_\gamma)$ 和 $\mathbf{B}_\kappa(\kappa_\pi\text{-}\mathrm{DR}_\gamma)$ 是完全的.

证明:只须证 $\mathbf{B}_\kappa(\mathrm{DR}_\gamma)$ 是完全的. 令 $\langle\varphi_{\alpha\beta}:\alpha<\gamma,\beta<\gamma_\alpha\rangle$ 是 $\mathscr{L}_\kappa$ 的阵列使得 $\gamma<\kappa$;对 $\alpha<\gamma,\gamma_\alpha\leqslant\gamma$;且阵列的每一选择集是矛盾的. 假设在 $\mathbf{B}_\kappa(\mathrm{DR}_\gamma)$ 中,对所有 α 使得 $0<\alpha<\gamma$,$\vdash \bigvee_{\beta<\gamma_\alpha}\varphi_{\alpha\beta}$,据完全性引理,只须证 $\vdash \neg\bigvee_{\beta<\gamma_0}\varphi_{0\beta}$.

因为对每一 $f\in\prod_{\alpha<\gamma}\{\varphi_{\alpha\beta}:\beta<\gamma_\alpha\}$,$f$ 是定义在 γ 上的函数使得对每一 $\alpha<\gamma$,$f(\alpha)\in\{\varphi_{\alpha\beta}:\beta<\gamma_\alpha\}$,所以 $\langle f(\alpha):\alpha<\gamma\rangle$ 是选择集,因此 $\{\neg f(\alpha):\alpha<\gamma\}$ 也包含一对矛盾公式,所以 $\vdash \bigvee_{\alpha<\gamma}\neg f(\alpha)$. 根据 2.2.7(5),$\vdash\neg\bigwedge_{\alpha<\gamma}f(\alpha)$. 因此,对所有 $f\in\prod_{\alpha<\gamma}\{\varphi_{\alpha\beta}:\beta<\gamma_\alpha\}$,

$$\vdash \bigvee_{\beta<\gamma_0}\varphi_{0\beta}\to\neg\bigwedge_{\alpha<\gamma}f(\alpha).$$

据 DR_γ,

$$\vdash \bigvee_{\beta<\gamma_0}\varphi_{0\beta}\to\neg\bigwedge_{\alpha<\gamma}\Big(\bigvee_{\beta<\gamma_\alpha}\varphi_{\alpha\beta}\Big),$$

因此

$$\vdash \bigwedge_{\alpha<\gamma}\Big(\bigvee_{\beta<\gamma_\alpha}\varphi_{\alpha\beta}\Big)\to\neg\bigvee_{\beta<\gamma_0}\varphi_{0\beta}.$$

即

$$\vdash \Big(\bigvee_{\beta<\gamma_0}\varphi_{0\beta}\Big)\wedge\Big[\bigwedge_{0<\alpha<\gamma}\Big(\bigvee_{\beta<\gamma_\alpha}\varphi_{\alpha\beta}\Big)\Big]\to\neg\bigvee_{\beta<\gamma_0}\varphi_{0\beta}. \tag{3.18}$$

据假设,对所有 α 使得 $0<\alpha<\gamma$,$\vdash \bigvee_{\beta<\gamma_\alpha}\varphi_{\alpha\beta}$,所以据合取规则,

$$\vdash \bigwedge_{0<\alpha<\gamma}\Big(\bigvee_{\beta<\gamma_\alpha}\varphi_{\alpha\beta}\Big),$$

再据(3.18)，有

$$\vdash \bigvee_{\beta<\gamma_0}\varphi_{0\beta}\to\neg\bigvee_{\beta<\gamma_0}\varphi_{0\beta}.$$

因为$(\psi\to\neg\psi)\to\neg\psi$是重言式的特例，所以$\vdash\neg\bigvee_{\beta<\gamma_0}\varphi_{0\beta}$. □

注意：到目前为止，我们还没有用到§1的代数基础. 下面我们来证，若γ是共尾度为ω的奇异基数：$\gamma=\bigcup_{n<\omega}\gamma_n$且对每一$n<\omega$，$2^{\gamma_n}\leqslant\gamma$，则$\mathbf{B}_{\gamma^+}(\bigwedge_{n<\omega}D_{\gamma_n})$是完全的. 证明这个定理，不仅需要前面的代数基础，还需要下列布尔代数的概念和引理.

令Σ是$\mathscr{L}_\kappa$的κ-语义一致的公式集，因此Σ的每一幂$<\kappa$的子集是可满足的，显然下列关系$=_\Sigma$

$$\varphi=_\Sigma\psi\Leftrightarrow\Sigma\models\varphi\leftrightarrow\psi$$

是定义在**公式代数(Lindenbaum-Tarski-代数)**上的关系，容易证明$=_\Sigma$是等价关系. 令$[\varphi]_\Sigma=\{\psi:\varphi=_\Sigma\psi\}$(当$\Sigma=\varnothing$时，我们省略下标)，$B(\mathscr{L}_\kappa;\Sigma)$是$\mathscr{L}_\kappa$的所有这样的等价类的集合，则我们定义具有下列运算的公式代数的同态象：其中$\gamma<\kappa$，

$$-[\varphi]_\Sigma=[\neg\varphi]_\Sigma,\quad \bigwedge_{\xi<\gamma}[\varphi_\xi]_\Sigma=[\bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_\xi]_\Sigma,\quad \bigvee_{\xi<\gamma}[\varphi_\xi]_\Sigma=[\bigvee_{\xi<\gamma}\varphi_\xi]_\Sigma.$$

令$\mathfrak{B}(\mathscr{L}_\kappa;\Sigma)$是代数$\langle B(\mathscr{L}_\kappa;\Sigma),-,\wedge,\vee\rangle$. Σ的κ-语义一致性蕴涵该代数是至少有两个元素的非退化代数. 定义上述代数上的偏序$\leqslant$和常元$\mathbf{0},\mathbf{1}$如下：

$$[\varphi]_\Sigma\leqslant[\psi]_\Sigma\Leftrightarrow\Sigma\models\varphi\to\psi,$$

$$\mathbf{0}=[\varphi\wedge\neg\varphi]_\Sigma,\quad \mathbf{1}=[\varphi\vee\neg\varphi]_\Sigma.$$

3.2.19 引理 (1) 若Σ是$\mathscr{L}_\kappa$的可满足公式集，则$\mathfrak{B}(\mathscr{L}_\kappa;\Sigma)$是非退化的$\nearrow\kappa$-可表示布尔代数.

(2) 若Σ是可满足公式集且$\overline{\Sigma}=\{\varphi:\Sigma\models\varphi\}$，则$\mathfrak{B}(\mathscr{L}_\kappa;\overline{\Sigma})$同构于一非退化的$\nearrow\kappa$-集合域.

证明：先证(2)：假设Σ是可满足的. 令$\mathscr{F}=\{f:f$是满足Σ的赋值$\}$，对每一公式φ，令$h(\varphi)=\{f:f\in\mathscr{F}$且$f$满足$\varphi\}$，则

$$h(\neg\varphi)=\mathscr{F}-h(\varphi)=\sim h(\varphi).$$

$$h(\bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_\xi)=\bigcap\{h(\varphi_\xi):\xi<\gamma\},$$
$$h(\bigvee_{\xi<\gamma}\varphi_\xi)=\bigcup\{h(\varphi_\xi):\xi<\gamma\}.$$
因此$\langle \mathrm{Ran}(h),\sim,\bigcap,\bigcup\rangle$是一个$\nearrow\kappa$-集合域. 易证
$$\overline{\Sigma}\vdash\varphi\leftrightarrow\psi\Leftrightarrow h(\varphi)=h(\psi).$$
因此映射$g([\varphi]_{\overline{\Sigma}})=h(\varphi)$是从$\mathrm{B}(\mathscr{L}_\kappa;\overline{\Sigma})$到$\mathrm{Ran}(h)$上的双射. 显然，$g$是同构映射.

证(1)：设Σ和$\overline{\Sigma}$如(2)规定，令$g([\varphi]_{\overline{\Sigma}})=[\varphi]_\Sigma$. 易证$g$是从$\mathfrak{B}(\mathscr{L}_\kappa;\overline{\Sigma})$到$\mathfrak{B}(\mathscr{L}_\kappa;\Sigma)$上的一个$\nearrow\kappa$-同态. 因为$\mathfrak{B}(\mathscr{L}_\kappa;\Sigma)$是$\mathfrak{B}(\mathscr{L}_\kappa;\overline{\Sigma})$的$\nearrow\kappa$-同态象，而且$\mathfrak{B}(\mathscr{L}_\kappa;\overline{\Sigma})$同构于一个非退化的$\nearrow\kappa$-集合域，所以$\mathfrak{B}(\mathscr{L}_\kappa;\Sigma)$是非退化的$\nearrow\kappa$-可表示布尔代数. □

令$\mathfrak{B}=\langle \mathrm{B},\neg,\wedge,\vee\rangle$是一个$\nearrow\kappa$-完全的布尔代数，其中$\mathrm{B}=\mathrm{Form}(\mathscr{L}_\kappa)$. 任给$\mathfrak{B}$中对$\mathscr{L}_\kappa$的初始命题符号的真值赋值$f$，则在$\mathfrak{B}$中存在$\mathrm{Form}(\mathscr{L}_\kappa)$上唯一赋值$f^*$使得

(1) $f^*(p)=f(p)$， 对所有初始命题符号p，

(2) $f^*(\neg\varphi)=\neg f^*(\varphi)$，

(3) $f^*(\bigwedge_{\xi<\delta}\varphi_\xi)=\bigwedge_{\xi<\delta}f^*(\varphi_\xi)$，

(4) $f^*(\bigvee_{\xi<\delta}\varphi_\xi)=\bigvee_{\xi<\delta}f^*(\varphi_\xi)$.

我们称f在$\mathfrak{B}$中满足$\Sigma\Leftrightarrow$对所有$\varphi\in\Sigma$，$f^*(\varphi)=\mathbf{1}$. 我们称公式φ在$\mathfrak{B}$中成立$\Leftrightarrow$对$\mathfrak{B}$中所有赋值f，$f^*(\varphi)=\mathbf{1}$.

注意：上述对$\mathscr{L}_\kappa$-公式的解释与真值代数$\mathfrak{B}_0$中的解释（代数意义上）相同. 若f是$\mathfrak{B}$的一赋值，则易证$\langle \mathrm{Ran}(f^*),\neg,\wedge,\vee\rangle$是由$\mathrm{Ran}(f)$生成的、$\mathfrak{B}$的、$\nearrow\kappa$-完全的$\nearrow\kappa$-子代数.

3.2.20 引理 令$\mathfrak{B}$是非退化的$\nearrow\kappa$-可表示布尔代数，φ是$\mathscr{L}_\kappa$-公式，则下列命题等价：

(1) φ是可满足的.

(2) φ在$\mathfrak{B}$中是可满足的.

(3) $\mathfrak{B}$中存在一个赋值f使得$f^*(\varphi)\neq\mathbf{0}$.

证明：显然我们有：(1) ⇒ (2) ⇒ (3). 因此只须证(3) ⇒ (1). 显见每一$\bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_\xi\in \mathrm{Sub}(\varphi)$与$\mathfrak{B}$的交$\bigwedge_{\xi<\gamma}f^*(\varphi_\xi)$相对应. 不妨设$\kappa$是正则的，因此$\varphi$有$<\kappa$个子公式(参见 1.3.2)，所以存在$<\kappa$个这样的交，而且每一交有$<\kappa$个"合取肢". 据 3.1.2 和 3.1.3，存在从$\mathfrak{B}$到$\mathfrak{B}_0$上的同态h把$f^*(\varphi)$映射到$\mathbf{1}$且保持φ的所有子公式所对应的交. 因此若$\bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_\xi\in \mathrm{Sub}(\varphi)$，则

$$h(f^*(\bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_\xi))=h(\bigwedge_{\xi<\gamma}f^*(\varphi_\xi))=(h\circ f)^*(\bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_\xi).$$

因为h是同态，所以$h(f^*(\neg\varphi))=(h\circ f)^*(\neg\varphi)$. 显然，$\Delta=\{\psi: h(f^*(\varphi))=\mathbf{1}\}$包含$\varphi$且满足 3.2.5 的(1)—(2)，因此$\varphi$(在$\mathfrak{B}_0$中)是可满足的. □

3.2.21 推论 令$\mathfrak{B}$是任一非退化的$\nearrow\kappa$-可表示布尔代数，则下列命题等价：

(1) $\vdash\varphi$.

(2) φ在$\mathfrak{B}$中成立.

(3) 对$\mathfrak{B}$中所有赋值f，$f^*(\varphi)=\mathbf{1}$.

证明：令 3.2.20 中的φ是$\neg\varphi$，就有

$\nvdash\varphi\Leftrightarrow\varphi$在某个非退化的$\nearrow\kappa$-可表示布尔代数$\mathfrak{B}$中不成立. □

3.2.22 引理 令Δ是$\mathscr{L}_\kappa$-公式集，$\mathfrak{B}$是$\nearrow\kappa$-完全布尔代数使得Δ中所有公式在$\mathfrak{B}$中成立，若$\mathbf{B}_\kappa(\Delta);\Sigma\vdash\varphi$且$f$是$\mathfrak{B}$的赋值使得$\{f^*(\psi):\psi\in\Sigma\}$有下界$b\in B$，则$f^*(\varphi)\geqslant b$.

证明：因为公理都在$\mathfrak{B}$中成立且分离规则和合取规则保持性质"$f^*(\varphi)\geqslant b$". □

显然在 3.2.22 的条件下，Σ在$\mathfrak{B}$中成立 ⇒ φ在$\mathfrak{B}$中成立.

我们称公式集Σ相对演绎系统$\mathbf{B}_\kappa(\Delta)$是**形式一致公式集** ⇔ 存在公式$\varphi$使得$\mathbf{B}_\kappa(\Delta);\Sigma\nvdash\varphi$. 这个条件等价于

$$\mathbf{B}_\kappa(\Delta);\Sigma\nvdash p\wedge\neg p.$$

若$\mathbf{B}_\kappa(\Delta)\vdash p\wedge\neg p$，则不存在公式集相对$\mathbf{B}_\kappa(\Delta)$是形式一致的. 这样的系统称为**形式不一致系统**，否则称为**形式一致系统**. 据演绎定

理，若 $\Sigma\vdash p\wedge\neg p$，则 Σ 有幂 $<\kappa$ 的子集 Δ 使得 $\Delta\vdash p\wedge\neg p$. 因此 Σ 相对 $\mathbf{B}_\kappa(\Delta)$ 是形式一致的 $\Leftrightarrow$ Σ 的每一幂 $<\kappa$ 的子集相对 $\mathbf{B}_\kappa(\Delta)$ 是形式一致的. 称 φ 相对 $\mathbf{B}_\kappa(\Delta)$ 是**形式一致公式** $\Leftrightarrow$ $\{\varphi\}$ 相对 $\mathbf{B}_\kappa(\Delta)$ 是形式一致的.

令 Δ 是有效公式集. 因为 $\mathbf{B}_\kappa(\Delta)$ 的每一内定理是有效的，所以 Σ 是 κ-语义一致 $\Rightarrow$ Σ 是形式一致. 若 Σ 是形式一致但不是 κ-语义一致，则存在 Σ 的子集 $\{\varphi_\xi:\xi<\delta\}$，$0<\delta<\kappa$，使得 $\vDash\bigwedge\limits_{\xi<\delta}\varphi_\xi\to p\wedge\neg p$，但 $\nvdash\bigwedge\limits_{\xi<\delta}\varphi_\xi\to p\wedge\neg p$，因此 $\mathbf{B}_\kappa(\Delta)$ 是不完全的. 所以我们证明了，若 $\mathbf{B}_\kappa(\Delta)$ 是完全的，则

$$\Sigma\text{ 是 }\kappa\text{-语义一致的}\Leftrightarrow\Sigma\text{ 是形式一致的}.$$

这个命题的逆也同样易证. 据演绎定理，易得下列引理：

3.2.23 引理 相对 $\mathbf{B}_\kappa(\Delta)$，

(1) Σ 是形式一致的 $\Leftrightarrow$ Σ 的幂 $<\kappa$ 的子集是形式一致的.

(2) 若 Σ 是形式一致的且对所有 $\varphi\in\Phi$，$\Sigma\vdash\varphi$，则

$$\Sigma\cup\Phi\text{ 是形式一致的}.$$

(3) $\mathbf{B}_\kappa(\Delta)$ 是完全的 $\Leftrightarrow$ 对每一公式 φ，

$$\varphi\text{ 是形式一致的}\Leftrightarrow\varphi\text{ 是可满足的}.$$

(4) $\mathbf{B}_\kappa(\Delta)$ 是完全的 $\Leftrightarrow$ 对每一公式集 Σ，

$$\Sigma\text{ 是形式一致的}\Leftrightarrow\Sigma\text{ 是 }\kappa\text{-语义一致的}.$$

(5) $\mathbf{B}_\kappa(\Delta)$ 是强完全的 $\Leftrightarrow$ 对每一公式集 Σ，

$$\Sigma\text{ 是形式一致的}\Leftrightarrow\Sigma\text{ 是可满足的}.$$

(6) $\Sigma\cup\{\varphi\}$ 是形式一致的 $\Leftrightarrow$ $\Sigma\nvdash\neg\varphi$.

(7) Σ 是形式一致的 $\Rightarrow$ $\Sigma\cup\{\varphi\}$ 或 $\Sigma\cup\{\neg\varphi\}$ 是形式一致的.

(8) $\Sigma\cup\{\bigvee\limits_{\xi<\delta}\varphi_\xi\}$ 是形式一致的，则存在 $\tau<\delta$ 使得

$$\Sigma\cup\{\bigvee_{\xi<\delta}\varphi_\xi,\ \varphi_\tau\}\text{ 是形式一致的}.\ \square$$

令 Σ 是相对 $\mathbf{B}_\kappa(\Delta)$ 形式一致的公式集. 定义 $\mathrm{Form}(\mathscr{L}_\kappa)$ 上的关系 $\sim_\Sigma$ 如下：

$$\varphi\sim_\Sigma\psi\Leftrightarrow\Sigma\vdash\varphi\leftrightarrow\psi.$$

显见$\sim_{\Sigma}$是等价关系，令$\|\varphi\|_{\Sigma}=\{\psi:\varphi\sim_{\Sigma}\psi\}$. 当$\Sigma=\varnothing$时，省略下标. 令$B(\mathbf{B}_{\kappa}(\Delta);\Sigma)$是所有这样的等价类的集合，则我们得到具有下列运算的 Lindenbaum-Tarski-代数：其中$\gamma<\kappa$,

$$\neg\|\varphi\|_{\Sigma}=\|\neg\varphi\|_{\Sigma},$$

$$\bigwedge_{\xi<\gamma}\|\varphi_{\xi}\|_{\Sigma}=\|\bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_{\xi}\|_{\Sigma},\quad \bigvee_{\xi<\gamma}\|\varphi_{\xi}\|_{\Sigma}=\|\bigvee_{\xi<\gamma}\varphi_{\xi}\|_{\Sigma}.$$

令$\mathfrak{B}=\mathfrak{B}(\mathbf{B}_{\kappa}(\Delta);\Sigma)=\langle B(\mathbf{B}_{\kappa}(\Delta);\Sigma),\neg,\wedge,\vee\rangle$. Σ的形式一致性保证上述代数至少有两个等价类，所以它是非退化的. 定义代数$\mathfrak{B}$上的偏序$\leqslant$和常元$\mathbf{0},\mathbf{1}$如下：

$$\|\varphi\|_{\Sigma}\leqslant\|\psi\|_{\Sigma}\Leftrightarrow\Sigma\vdash\varphi\to\psi,$$

$$\mathbf{0}=\|\varphi\wedge\neg\varphi\|_{\Sigma},\quad \mathbf{1}=\|\varphi\vee\neg\varphi\|_{\Sigma}.$$

因为对所有$\delta<\gamma$, $\|\bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_{\xi}\|_{\Sigma}\leqslant\|\varphi_{\delta}\|$且对所有$\delta<\gamma$, $\Sigma\vdash\psi\to\varphi_{\delta}\Rightarrow\Sigma\vdash\psi\to\bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_{\xi}$，所以上述代数是$\nearrow\kappa$-完全布尔代数使得对所有$\gamma<\kappa$, $\|\bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_{\xi}\|_{\Sigma}$和$\|\bigvee_{\xi<\gamma}\varphi_{\xi}\|_{\Sigma}$分别是$\{\|\varphi_{\xi}\|_{\Sigma}:\xi<\gamma\}$的交和并.

设$\mathbf{B}_{\kappa}(\Delta)$是完全的，则对任意公式$\varphi,\psi$,

$$\mathbf{B}_{\kappa}(\Delta);\Sigma\vdash\varphi\leftrightarrow\psi\Leftrightarrow\Sigma\models\varphi\leftrightarrow\psi.$$

因此，$\|\varphi\|_{\Sigma}=[\varphi]_{\Sigma}$，所以代数$\mathfrak{B}(\mathbf{B}_{\kappa}(\Delta);\Sigma)$正好就是 3.2.19 中的$\mathfrak{B}(\mathscr{L}_{\kappa};\Sigma)$，所以 3.2.19 中的$\mathfrak{B}(\mathscr{L}_{\kappa};\Sigma)$可以用$\mathfrak{B}(\mathbf{B}_{\kappa}(\Delta);\Sigma)$来置换，3.2.19 也可以重述如下：

3.2.24 引理 设$\mathbf{B}_{\kappa}(\Delta)$是完全的，则

(1) 若Σ是形式一致的，则$\mathfrak{B}(\mathbf{B}_{\kappa}(\Delta);\Sigma)$是非退化的$\nearrow\kappa$-可表示布尔代数.

(2) 若Σ是可满足公式集且$\overline{\Sigma}=\{\varphi:\Sigma\models\varphi\}$，则$\mathfrak{B}(\mathbf{B}_{\kappa}(\Delta);\overline{\Sigma})$同构于一非退化的$\nearrow\kappa$-集合域. □

我们称生成布尔代数$\mathfrak{B}$的集合C是**自由集**$\Leftrightarrow$每一从C到任一布尔代数$\mathfrak{B}_1$中的映射f能扩张为从$\mathfrak{B}$到$\mathfrak{B}_1$中的同态. 这时的$\mathfrak{B}$称为**自由布尔代数**.

从下面两个引理可得，代数$\mathfrak{B}(\mathbf{B}_{\kappa}(\Delta))=\mathfrak{B}(\mathbf{B}_{\kappa}(\Delta);\varnothing)$是$\nearrow\kappa$-完全的自由布尔代数使得对所有$\varphi\in\Delta$, φ在$\mathfrak{B}(\mathbf{B}_{\kappa}(\Delta))$中成立. 这

就意味着,任给$\nearrow\kappa$-完全布尔代数$\mathfrak{B}(\mathbf{B}_\kappa(\Delta))$使得对所有$\varphi\in\Delta$,$\varphi$在$\mathfrak{B}$中成立,则存在语言$\mathscr{L}_\kappa$和从$\mathfrak{B}(\mathbf{B}_\kappa(\Delta))$到$\mathfrak{B}$上的$\nearrow\kappa$-同态.特别是,布尔代数$\mathfrak{B}(\mathbf{B}_\kappa)$是$\nearrow\kappa$-完全的自由布尔代数.事实上,若$\Sigma\subseteq\Xi$且$\Xi$形式一致,则映射$h(\|\varphi\|_\Sigma)=\|\varphi\|_\Xi$定义了一个从$\mathfrak{B}(\mathbf{B}_\kappa(\Delta);\Sigma)$到$\mathfrak{B}(\mathbf{B}_\kappa(\Delta);\Xi)$的$\nearrow\kappa$-同态.

3.2.25 引理 若Σ相对$\mathbf{B}_\kappa(\Delta)$形式一致,则对所有$\varphi\in\Delta$,$\varphi$在$\mathfrak{B}(\mathbf{B}_\kappa(\Delta);\Sigma)$中成立.

证明:令$\mathfrak{B}=\mathfrak{B}(\mathbf{B}_\kappa(\Delta);\Sigma)$,$f$是$\mathfrak{B}$中对初始命题符号的任意赋值.我们须证明对所有$\varphi\in\Delta$,$f^*(\varphi)=\mathbf{1}$.因为$f$把某个等价类$\|p\|_\Sigma$赋于$\mathscr{L}_\kappa$的每一初始命题$p_\xi$或$p_{\alpha\beta}$,所以存在从所有这样的初始命题符号集PR到$\mathscr{L}_\kappa$的公式集的函数$g$使得$f(p_\xi)=\|g(p_\xi)\|_\Sigma$.因此对所有初始命题$p_\xi$,$f^*(p_\xi)=\|S_g^{PR}(p_\xi)\|_\Sigma$.因为$f^*$,$S_g^{PR}$和把公式$\varphi$映射到$\mathfrak{B}$的元素$\|\varphi\|_\Sigma$的函数都是$\nearrow\kappa$-同态,所以施归纳易证,对所有公式$\varphi$,$f^*(\varphi)=\|S_g^{PR}(\varphi)\|_\Sigma$.特别是,若$\varphi\in\Delta$,则$S_g^{PR}(\varphi)$是$\varphi$的一个特例,因而是$\mathbf{B}_\kappa(\Delta)$的公理,因此

$$f^*(\varphi)=\|S_g^{PR}(\varphi)\|_\Sigma=\mathbf{1}.\ \square$$

3.2.26 引理 设$\mathfrak{B}$是非退化的$\nearrow\kappa$-完全布尔代数使得对所有$\varphi\in\Delta$,φ在$\mathfrak{B}$中成立,令C是B的子集且$\nearrow\kappa$-生成$\mathfrak{B}$,令$\mathscr{L}_\kappa=\{p_c;c\in C\}$.对每一$c\in C$,在$\mathfrak{B}$中用赋值$f(p_c)=c$来解释$\mathscr{L}_\kappa$,令$\Sigma=\{\varphi;\varphi$是$\mathscr{L}_\kappa$的公式且$f^*(\varphi)=1\}$,则$\Sigma$相对$\mathbf{B}_\kappa(\Delta)$形式一致且$\mathfrak{B}\cong\mathfrak{B}(\mathbf{B}_\kappa(\Delta);\Sigma)$,因此$\mathfrak{B}$是$\mathfrak{B}(\mathbf{B}_\kappa(\Delta))$的$\nearrow\kappa$-同态象.

证明:若在$\mathfrak{B}_\kappa(\Delta)$中$\Sigma\vdash\varphi$,则据$\Sigma$的构造和3.2.22,$f^*(\varphi)=1$.因为在$\mathfrak{B}$中$\mathbf{1}\neq\mathbf{0}$,所以$\Sigma$相对$\mathbf{B}_\kappa(\Delta)$是形式一致的.因为$C$ $\nearrow\kappa$-生成$\mathfrak{B}$,所以$\mathrm{Ran}(f^*)=B$.若$f^*(\varphi)=f^*(\psi)$,则据Σ的构造,$\varphi\leftrightarrow\psi\in\Sigma$,所以$\|\varphi\|_\Sigma=\|\psi\|_\Sigma$.因此映射$h(f^*(\varphi))=\|\varphi\|_\Sigma$是从$B$到$B(\mathbf{B}_\kappa(\Delta);\Sigma)$上的函数.若$\|\varphi\|_\Sigma=\|\psi\|_\Sigma$,则$\Sigma\vdash\varphi\leftrightarrow\psi$,据3.2.22,$f^*(\varphi\leftrightarrow\psi)=\mathbf{1}$.据布尔代数的变换,$f^*(\varphi)=f^*(\psi)$,因此$h$是单射.因为$f^*$和把公式$\varphi$映射到$\|\varphi\|_\Sigma$的函数都是$\nearrow\kappa$-同

态，显然，h 也是$\nearrow\kappa$-同态．因此 $\mathfrak{B}\simeq\mathfrak{B}(\mathbf{B}_\kappa(\Delta);\Sigma)$．因为把 $\|\varphi\|_\varnothing$ 映射到 $\|\varphi\|_\Sigma$ 的映射也是$\nearrow\kappa$-同态，所以 $\mathfrak{B}$ 是 $\mathfrak{B}(\mathbf{B}_\kappa(\Delta))$ 的$\nearrow\kappa$-同态象．□

3.2.27 完全性引理 令 γ 是无穷基数，κ 是正则无穷基数，则对 $\mathscr{L}_\kappa$ 的有效公式集 Δ，下列命题等价：

(1) 若 $\mathscr{L}_\kappa$ 有 γ 个初始命题符号，则 $\mathbf{B}_\kappa(\Delta)$ 是完全的．

(2) 若 $\mathscr{L}_\kappa$ 有 γ 个初始命题符号，则 $\mathfrak{B}(\mathbf{B}_\kappa(\Delta))$ 同构于一$\nearrow\kappa$-集合域．

(3) 每一具有 γ 个$\nearrow\kappa$-生成子且使所有 $\varphi\in\Delta$ 在其中成立的、$\nearrow\kappa$-完全的布尔代数 $\mathfrak{B}$ 是$\nearrow\kappa$-可表示的．

证明：(1) ⇒ (2)．假设 $\mathscr{L}_\kappa$ 有 γ 个初始命题符号，据(1)，$\mathbf{B}_\kappa(\Delta)$ 是完全的．令 $\Phi=\{\varphi:\models\varphi\}$ 是有效句子集，则 $\mathfrak{B}(\mathbf{B}_\kappa(\Delta);\varnothing)=\mathfrak{B}(\mathbf{B}_\kappa(\Delta))$，据 3.2.24(2)，$\mathfrak{B}(\mathbf{B}_\kappa(\Delta))$ 同构于一$\nearrow\kappa$-集合域．

(2) ⇒ (3)．若题设给出的 $\mathfrak{B}$ 是退化的，则 $\mathfrak{B}$ 只有一个元素 $\mathbf{1}=\mathbf{0}$，显然，它是 $\mathfrak{B}(\mathbf{B}_\kappa(\Delta))$ 的同态象（只要令 $h(\|\varphi\|)=\mathbf{1}_\mathfrak{B}$，其中 φ 是 $\mathscr{L}_\kappa$ 的任意公式，这样的 h 显然保持布尔运算）．若 $\mathfrak{B}$ 是非退化的，据 3.2.26，$\mathfrak{B}$ 是 $\mathfrak{B}(\mathbf{B}_\kappa(\Delta))$ 的$\nearrow\kappa$-同态象．据假设(2)，在上述两种情况下，$\mathfrak{B}(\mathbf{B}_\kappa(\Delta))$ 同构于一$\nearrow\kappa$-集合域，所以 $\mathfrak{B}$ 是这个集合域的同态象，因此 $\mathfrak{B}$ 是$\nearrow\kappa$-可表示的．

(3) ⇒ (1)．假设 $\mathscr{L}_\kappa$ 有 γ 个初始命题符号，则 $\mathfrak{B}(\mathbf{B}_\kappa(\Delta))$ 由 $\{\|p\|:p$ 是 $\mathscr{L}$ 的初始命题符号$\}$$\nearrow\kappa$-生成，且这些元素都互不相同．因为所有的 $\varphi\in\Delta$ 在这个代数中成立，所以据(3)，$\mathfrak{B}(\mathbf{B}_\kappa(\Delta))$ 是$\nearrow\kappa$-可表示的．因为公理都是有效的，且推理规则保持有效性，所以 $\vdash\varphi\Rightarrow\models\varphi$．据 3.2.21，若 $\models\varphi$，则 φ 在所有$\nearrow\kappa$-可表示的布尔代数中成立．特别是，对赋值 $f(p)=\|p\|$，有 $f^*(\varphi)=\|\varphi\|=\mathbf{1}$，因此 $\vdash\varphi$，所以 $\mathfrak{B}(\mathbf{B}_\kappa(\Delta)$ 是完全的．□

注意：若把 3.2.27 中关于 γ 的条件删去，则 3.2.27 断定：

$\mathbf{B}_\kappa(\Delta)$ 是完全的 ⇔ $\begin{cases}\text{每一使得 }\Delta\text{ 中所有公式成立的}\\ \nearrow\kappa\text{-完全布尔代数是}\nearrow\kappa\text{-可表示的.}\end{cases}$

本节前面的诸完全性定理都可以看作是相应的、我们已知的布尔代数的表示性定理的逻辑表达.

下列引理是关于 Chang-分配律的 γ-可表示性.

3.2.28 引理 令 γ 是无穷基数，则 γ-完全布尔代数 $\mathfrak{B}$ 是 γ-可表示的 $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{B}$ 满足下列条件：

若 B 的元素阵列 $\langle b_{\alpha\beta}:\alpha,\beta<\gamma\rangle$ 的每一选择集包含互补对，则

$$\bigwedge_{\alpha<\gamma}(\bigvee_{\beta<\gamma} b_{\alpha\beta})=\mathbf{1}. \tag{3.19}$$

证明：若 $\mathfrak{B}$ 满足(3.19)，则公理 CD_γ 显然在 $\mathfrak{B}$ 中成立，据 3.2.12，$\mathbf{B}_{\gamma^+}(\mathrm{CD}_\gamma)$ 相对语言 $\mathscr{L}_{\gamma^+}$ 是完全的，再据 3.2.27，$\mathfrak{B}$ 是 γ^+-可表示的，因而也是 γ-可表示的. 反之，若 $\mathfrak{B}$ 是 γ-可表示的且 $\bigwedge_{\alpha<\gamma}(\bigvee_{\beta<\gamma} b_{\alpha\beta})\neq\mathbf{1}$，则根据 3.1.3，存在一个从 $\mathfrak{B}$ 到 $\mathfrak{B}_0$ 的同态 h 把 $\neg\bigvee_{\alpha<\gamma}(\bigwedge_{\beta<\gamma} b_{\alpha\beta})$ 映射到 $\mathbf{1}$，且对所有 $\alpha<\gamma$，h 保持所有的交 $\bigwedge_{\beta<\gamma} b_{\alpha\beta}$ 和所有的并 $\bigvee_{\alpha<\gamma}(\bigwedge_{\beta<\gamma} b_{\alpha\beta})$. 因为在 $\mathfrak{B}_0$ 中，$\bigwedge_{\alpha<\gamma}(\bigvee_{\beta<\gamma}\neg b_{\alpha\beta})=\mathbf{1}$，所以存在选择函数 $f\in\gamma^\gamma$ 使得对所有 $\alpha<\gamma$，$\neg h(b_{\alpha,f(\alpha)})=\mathbf{1}$，因此，$\{b_{\alpha,f(\alpha)}:\alpha<\gamma\}$ 是 $\langle b_{\alpha\beta}:\alpha,\beta<\gamma\rangle$ 的选择集且不包含互补对，矛盾. □

3.2.29 引理 令 γ 是无穷基数，则 γ-完全布尔代数 $\mathfrak{B}$ 是 γ-可表示的 $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{B}$ 满足下列条件：

任给 $b\neq\mathbf{0}$ 和阵列 $\langle b_{\alpha\beta}:\alpha,\beta<\gamma\rangle$ 使得对所有 $\alpha<\gamma$，$\bigvee_{\beta<\gamma} b_{\alpha\beta}=\mathbf{1}$，则存在选择集 C 使得 $C\cup\{b\}$ 不包含互补对. (3.20)

证明：据 3.2.28，只须证(3.19)等价(3.20). 假设(3.19)成立，令 $b\neq\mathbf{0}$ 且给定阵列 $\langle b_{\alpha\beta}:\alpha,\beta<\gamma\rangle$ 使得对所有 $\alpha<\gamma$，$\bigvee_{\beta<\gamma} b_{\alpha\beta}=\mathbf{1}$. 构造新阵列 $\langle d_{\alpha\beta}:\alpha,\beta<\gamma\rangle$ 如下：

$\langle\neg b,\cdots,\neg b,\cdots\rangle$，　　其长度为 γ，

$\langle\neg b_{\alpha\beta}:\beta<\gamma\rangle$，　　对 $\alpha<\gamma$.

假设对 $\langle b_{\alpha\beta}:\alpha,\beta<\gamma\rangle$ 的每一选择集 C，$C\cup\{b\}$ 包含一互补对. 考虑 $C\cup\{b\}$ 的两种情况：若 C 包含一互补对，则 $\langle d_{\alpha\beta}:\alpha,\beta<\gamma\rangle$ 的每一选择集也包含互补对. 若 C 中有 $\neg b$，则 $\langle d_{\alpha\beta}:\alpha,\beta<\gamma\rangle$ 的每一选择集有它的补元 b，此外 $\langle d_{\alpha\beta}:\alpha,\beta<\gamma\rangle$ 的第一排都是 $\neg b$，所以它的选择集

都包含$\neg b$,因此新阵列的每一选择集仍包含互补对,据(3.19),

$$\bigvee_{\alpha<\gamma}(\bigwedge_{\beta<\gamma} d_{\alpha\beta})=\mathbf{1}.$$

因为对所有 $\alpha<\gamma$, $\bigvee_{\beta<\gamma} b_{\alpha\beta}=\mathbf{1}$,所以

$$\bigvee_{\alpha<\gamma}(\bigwedge_{\beta<\gamma} d_{\alpha\beta})=\neg b,$$

因此 $b=\mathbf{0}$,矛盾.

反之,假设(3.20)成立,且对阵列 $\langle b_{\alpha\beta}:\alpha,\beta<\gamma\rangle$ 的每一选择集 C,$C\cup\{b\}$包含一互补对. 假设要证结论不成立,则

$$\neg b=\bigvee_{\alpha<\gamma}(\bigwedge_{\beta<\gamma} b_{\alpha\beta})\neq\mathbf{1},$$

则 $b\neq\mathbf{0}$. 构造新阵列如下:对每一 $\alpha<\gamma$,每一横排的长度为 γ,

$$\langle\neg\bigwedge_{\beta<\gamma} b_{\alpha\beta},\neg b,\cdots,\neg b\rangle, \tag{3.21}$$

$$\langle\bigwedge_{\beta<\gamma} b_{\alpha\beta},\neg b_{\alpha 0},\cdots,\neg b_{\alpha\beta},\cdots\rangle. \tag{3.22}$$

显然,每一横排都有并 $\mathbf{1}$. 据(3.20),对这个新阵列,存在选择集 D 使得 $D\cup\{b\}$不包含互补对,但这意味,对(3.21)类型的横排,对每一 $\alpha<\gamma$,只有 $\neg\bigwedge_{\beta<\gamma} b_{\alpha\beta}\in D$,对(3.22)类型的横排,对每一 $\alpha<\gamma$,对某个 $\beta<\gamma$,$\neg b_{\alpha\beta}\in D$,因此 $C=\{b_{\alpha\beta}:\neg b_{\alpha\beta}\in D\}$是原阵列$\langle b_{\alpha\beta}:\alpha,\beta<\gamma\rangle$的选择集. 显然 C 不包含互补对,矛盾. □

3.2.30 引理 令 $\gamma=\bigcup_{n<\omega}\gamma_n$,其中每一 γ_n 是小于 γ 的无穷基数,若 $\mathfrak{B}$ 是 γ-完全的布尔代数且对所有 $n<\omega$ 满足 γ_n-分配律(参见 3.1.5),则它是 γ-可表示的.

证明:令 $b\neq\mathbf{0}$,任给阵列$\langle b_{\alpha\beta}:\alpha,\beta<\gamma\rangle$使得对所有 $\alpha<\gamma$, $\bigvee_{\beta<\gamma} b_{\alpha\beta}=\mathbf{1}$. 据 3.2.29,只须证存在该阵列的选择集 C 使得 $C\cup\{b\}$不包含互补对. 对所有 $n<\omega$,不妨假设 $\gamma_n<\gamma_{n+1}$. 对 $n<\omega,\alpha<\gamma$,递归定义 $\delta_n=\gamma_n-\bigcup_{i<n}\gamma_i$, $d_{\alpha n}=\bigvee_{\beta<\delta_n} b_{\alpha\beta}$. 称 C 是关于 δ 的选择集 $\Leftrightarrow$ $\delta\subseteq\gamma$ 且对每一 $\alpha<\delta$,C 至少包含给定阵列的横排$\langle b_{\alpha\beta}:\beta<\gamma\rangle$的一元素.

我们来证明:

任给 $d\neq\mathbf{0}$ 和 $n<\omega$,存在函数 $f:\delta_n\to\omega$ 使得

$$d\wedge\bigwedge_{\alpha<\delta_n} d_{\alpha,f(\alpha)}\neq\mathbf{0}. \tag{3.23}$$

因为对所有 $\alpha<\gamma$，$1=\bigvee_{\beta<\gamma}b_{\alpha\beta}=\bigvee_{n<\omega}d_{\alpha n}$，所以存在

$$d=d\wedge\bigwedge_{\alpha<\delta_n}(\bigvee_{n<\omega}d_{\alpha n}),$$

据 (δ_n,ω)-分配律，$d\wedge\bigvee_{f\in\omega^{\delta_n}}(\bigwedge_{\alpha<\delta_n}d_{\alpha,f(\alpha)})\neq\mathbf{0}$. 据代数变换，对某个 $f\in\omega^{\delta_n}$，$d\wedge\bigwedge_{\alpha<\delta_n}d_{\alpha,f(\alpha)}\neq\mathbf{0}$. 因此(3.23)得证.

类似地，我们来证明：

任给 $d\neq\mathbf{0}$，$n<\omega$，$m<\omega$ 和 $\delta\subseteq\delta_m$，若 $d\leqslant\bigwedge_{\alpha<\delta}d_{\alpha n}$，则存在关于 δ 的选择集 C 使得 $d\wedge\wedge C\neq\mathbf{0}$. (3.24)

因为 $d\leqslant\bigwedge_{\alpha<\delta}d_{\alpha n}=\bigwedge_{\alpha<\delta}(\bigvee_{\beta<\delta_n}b_{\alpha\beta})$，所以

$$\mathbf{0}\neq d=d\wedge\bigwedge_{\alpha<\delta}(\bigvee_{\beta<\delta_n}b_{\alpha\beta}).$$

据代数变换，对某个 $f:\delta\to\delta_n$，$d\wedge\bigwedge_{\alpha<\delta_n}b_{\alpha,f(\alpha)}\neq\mathbf{0}$. 据 (γ_m,γ_n)-分配律，存在 $C=\langle b_{\alpha,f(\alpha)}:\alpha<\delta\rangle$，显然 C 是关于 δ 的选择集，因此(3.24)得证.

据(3.23)，存在 $f_0\in\omega^{\delta_0}$ 使得 $b\wedge(\bigwedge_{\alpha<\delta_0}d_{\alpha,f_0(\alpha)})\neq\mathbf{0}$. 下令 $\delta_{0m}=\{\alpha\in\delta_0:f_0(\alpha)=m\}$. 因为 $\delta_{00}\subseteq\delta_0$，所以

$$b\wedge(\bigwedge_{\alpha<\delta_0}d_{\alpha,f_0(\alpha)})\leqslant\bigwedge_{\alpha<\delta_{00}}d_{\alpha 0}.$$

据(3.24)，存在一关于 δ_{00} 的选择集 C_0 使得

$$b\wedge(\bigwedge_{\alpha<\delta_0}d_{\alpha,f_0(\alpha)})\wedge\wedge C_0\neq\mathbf{0}.$$

下面我们施归纳来构造关于 δ_{0m} 的选择集 C_{0m}. 假设对 $k\leqslant n$，我们已经找到函数 $f_k:\delta_k\to\omega$ 和 C_k 使得

$$b\wedge\bigwedge_{i\leqslant k}(\bigwedge_{\alpha<\delta_i}d_{\alpha,f_i(\alpha)})\wedge\bigwedge_{i\leqslant k}\wedge C_i\neq\mathbf{0}\qquad(3.25)_k$$

且 C_k 是关于 $\bigcup\{\delta_{ij}:i+j=k\}$ 的选择集，其中 $\delta_{ij}=\{\alpha:\alpha<\delta_i$ 且 $f_i(\alpha)=j\}$，我们必须找到满足 $(3.25)_{n+1}$ 的 f_{n+1} 和 C_{n+1}.

令 $b_n=b\wedge\bigwedge_{i\leqslant n}(\bigwedge_{\alpha<\delta_i}d_{\alpha,f_i(\alpha)})\wedge\bigwedge_{i\leqslant n}\wedge C_i$，用(3.23)找到函数

$$f_{n+1}:\delta_{n+1}\to\omega \text{ 使 } b_n\wedge(\bigwedge_{\alpha<\delta_{n+1}}d_{\alpha,f_{n+1}(\alpha)})=d_{n+1}\neq\mathbf{0}.$$

下面我们来找关于

$$\bigcup\{\delta_{ij}: i+j=n+1\}=$$
$$\delta_{0,n+1}\cup\delta_{1,n}\cup\cdots\cup\delta_{i,n+1-i}\cup\cdots\cup\delta_{n+1,0}$$
的选择集 C_{n+1}. 因为
$$d_{n+1}\leqslant\bigwedge_{\alpha<\delta_0} d_{\alpha,f_0(\alpha)}\leqslant\wedge\{d_{\alpha,n+1}:\alpha<\delta_{0,n+1}\},$$
其中第二个不等式成立是因为 $\delta_{0,n+1}\subseteq\delta_0$ 且 $f_0(\alpha)=n+1$,所以据(3.24),存在一个关于 $\delta_{0,n+1}$的选择集 C^0_{n+1}使得 $d_{n+1}\wedge\wedge C^0_{n+1}\neq\mathbf{0}$. 再施归纳如下:任给 $i<n+1$ 和关于 $\delta_{i,n+1-i}$的选择集 C^i_{n+1}使得 $d_{n+1}\wedge\wedge C^0_{n+1}\wedge\cdots\wedge\wedge C^i_{n+1}\neq\mathbf{0}$;因为据 d_{n+1}的构造,
$$\begin{aligned}d_{n+1}\wedge\wedge C^0_{n+1}\wedge\cdots\wedge\wedge C^i_{n+1}&\leqslant\wedge\{d_{\alpha,f_{i+1}(\alpha)}:\alpha<\delta_{i+1}\}\\&\leqslant\wedge\{d_{\alpha,n-i}:\alpha<\delta_{i+1,n-i}\}.\end{aligned}$$
从(3.24)又可以找到关于 $\delta_{i+1,n-i}$的选择集 C^{i+1}_{n+1}使得
$$d_{n+1}\wedge\bigwedge_{j\leqslant i+1}\wedge C^j_{n+1}\neq\mathbf{0}.$$
令 $C_{n+1}=\bigcup_{i\leqslant n+1}C^i_{n+1}$,则 $d_{n+1}\wedge\wedge C_{n+1}\neq\mathbf{0}$,即
$$[b\wedge\bigwedge_{i\leqslant n}(\bigwedge_{\alpha<\delta_i}d_{\alpha,f_i(\alpha)})\wedge(\bigwedge_{i\leqslant n}\wedge C_i)]\wedge(\bigwedge_{\alpha<\delta_{n+1}}d_{\alpha,f_{n+1}(\alpha)})\wedge\wedge C_{n+1}\neq\mathbf{0},$$
所以$[b\wedge\bigwedge_{i\leqslant n+1}(\bigwedge_{\alpha<\delta_i}d_{\alpha,f_i(\alpha)})\wedge(\bigwedge_{i\leqslant n+1}\wedge C_i)]\neq\mathbf{0}$,这就证明了 C_{n+1}有我们需要的性质$(3.25)_{n+1}$.

这样据归纳我们完成了对 C_{n+1}的定义. 令 $C=\bigcup_{n<\omega}C_n$,则 C 是整个阵列$\langle b_{\alpha\beta}:\alpha,\beta<\gamma\rangle$的选择集. 因为对所有 $n<\omega$,$b\wedge\bigwedge_{i\leqslant n}\wedge C_i\neq\mathbf{0}$,所以 $C\cup\{b\}$不包含互补对. □

3.2.31 完全性定理 令 $\gamma=\bigcup_{n<\omega}\gamma_n$,且对每一 $n<\omega$,$2^{\gamma_n}\leqslant\gamma$,则 $\mathrm{B}_{\gamma^+}(\bigwedge_{n<\omega}\mathrm{D}_{\gamma_n})$相对 $\mathscr{L}_{\gamma^+}$是完全的.

证明:因为每一 $\gamma_n<\gamma$,所以 $\bigwedge_{n<\omega}(\mathrm{D}_{\gamma_n})$是 $\mathscr{L}_{\gamma^+}$的公式,据 3.2.7(2),$\bigwedge_{n<\omega}\mathrm{D}_{\gamma_n}$是有效公式. 假设 $\mathfrak{B}$ 是具有 γ^+ 个$\nearrow\gamma^+$-生成子且使 $\bigwedge_{n<\omega}\mathrm{D}_{\gamma_n}$成立的$\nearrow\gamma^+$-完全布尔代数. 显然对所有 $n<\omega$,$\mathfrak{B}$ 满足γ_n-分配律. 据 3.2.30,$\mathfrak{B}$ 是$\nearrow\gamma^+$-可表示的. 据 3.2.27,$\mathrm{B}_{\gamma^+}(\bigwedge_{n<\omega}\mathrm{D}_{\gamma_n})$相对

$\mathscr{L}_{\gamma^+}$ 是完全的. □

注意：因为 γ 是奇异基数，所以据例 1.2.15，$\mathscr{L}_\gamma$ 和 $\mathscr{L}_{\gamma^+}$ 的表达力相同.

练　习

3.2.32　证明定理 3.2.13 和引理 3.2.23.

3.2.33　相对语言 $\mathscr{L}_\infty$，有无具有完全性的演绎系统？

§3　谓词逻辑的完全性定理

3.3.1 定义　令 γ 是无穷基数，$\lambda\leqslant\gamma^+$ 是基数，则 $\kappa(\gamma^+,\lambda)$ 是最小的基数 κ 使得(1) $\gamma\leqslant\kappa$，(2) 对所有 $\xi<\lambda$，$\kappa^\xi=\kappa$.

3.3.2 引理　$\kappa(\gamma^+,\lambda)$ 有下列基本性质：

(1) $\gamma\leqslant\kappa(\gamma^+,\lambda)\leqslant\gamma^\lambda$.

(2) $\lambda\leqslant\kappa(\gamma^+,\lambda)$.

(3) 若 λ 是正则基数，则 $\kappa(\gamma^+,\lambda)=\bigcup_{\xi<\lambda}\gamma^\xi$.

(4) 若 $|I|<\kappa(\gamma^+,\lambda)$，且对每一 $i\in I$，$|S_i|<\lambda$，则

$$\left|\bigcup_{i\in I}S_i\right|<\kappa(\gamma^+,\lambda).$$

证明：(1)和(2)是 3.3.1 的直接推论.

(3) 令 $\kappa=\bigcup_{\xi<\lambda}\gamma^\xi$，显然 κ 满足 3.3.1(1)，所以只须证 κ 满足其(2)：易见 $\kappa=|S|$，其中 $S=\{s:s$ 是幂$\leqslant\gamma$ 的序数的序列且 $|s|<\lambda\}$，但 κ 也等于 $|T|=|\{s:s$ 是幂$<\gamma$ 的序数的序列且 $|s|<\lambda\}|$. 因此只须证明：若 $0<\delta<\lambda$，则存在从 T^δ 到 S 中的单射. 对 $f=\langle f_\xi:\xi<\delta\rangle\in T^\delta$，令函数 $g(f)={}^\frown\langle\gamma{}^\frown f_\xi:\xi<\delta\rangle$，其中 $^\frown$ 表示序列之间的**毗连运算**(concatenation). 因为 λ 是正则的，所以序列 $g(f)\in S$，据毗连运算的性质，可以证明 g 是单射(参见 Karp 的[1964]，Ch. 2).

(4) 该证明分成两种情况：

情况 1　假设 $\lambda \leqslant |I|$：则 $\left|\bigcup_{i\in I} S_i\right| \leqslant |I\times I| = |I| < \kappa(\gamma^+, \lambda)$.

情况 2　假设 $|I| < \lambda$：据 König-定理（参见 Jech 的[1978]，p. 45），$\left|\bigcup_{i\in I} S_i\right| < |\lambda^I|$，而据本引理的(2)，$|\lambda^I| \leqslant \kappa(\gamma^+, \lambda)$. □

令 φ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的原子公式. 若 φ 形如 $t_1 \equiv t_2$，则称 $\{t_1, t_2\}$ 是 φ 的主项集；若 φ 形如 $P(t_\xi : \xi < \eta)$，其中 $0 < \eta < \pi$，则称 $\{t_\xi : \xi < \eta\}$ 是 φ 的主项集. 若项 t 由（函数符号和）其它项构成，则这些项及其 t 自身称为 t 的子项.

3. 3. 3 引理　若 σ 是 $\mathscr{L}_{\gamma^+\lambda\rho\pi}$-句子，且 $Y \subseteq \mathrm{Var}$ 是不在 σ 中出现的 $\kappa(\gamma^+, \lambda)$ 个个体变元的集合，则存在项集 Term 使得若 Δ 是

$$\{\mathrm{SF}_f(\varphi) : \varphi \in \mathrm{Sub}(\sigma), f \in \mathrm{Term}^{\mathrm{Fv}(\varphi)}\} \cup \{t_1 \equiv t_2 : t_1, t_2 \in \mathrm{Term}\},$$

则下列条件成立：

(1) Δ 中原子公式的主项和 Term 中项的子项在 Term 中.

(2) Δ 的每一公式和 Term 的每一项有 $<\lambda$ 个自由变元.

(3) $|\mathrm{Term}| = \kappa(\gamma^+, \lambda)$.

(4) $\psi \in \Delta$ 的自由变元和 $t \in \mathrm{Term}$ 的所有变元在 Y 中.

(5) $|\Delta| = \kappa(\gamma^+, \lambda)$.

证明：令 $\kappa = \kappa(\gamma^+, \lambda)$，$\mathrm{Term}_0 = Y \cup \{\sigma$ 中的个体常元$\}$.

若 σ 中没有函数符号，则易证 Term_0 满足条件(1)—(5)：因为据 1. 3. 2(1)，我们有(2). 证(3)：因为 γ^+ 是正则基数，所以施归纳易证 σ 的个体常元的基数 $<\gamma^+$，所以 $\leqslant \kappa$，因此 $|\mathrm{Term}_0| = \kappa$. (4)显然. 证(5)：据 1. 3. 2(3)，$|\mathrm{Sub}(\sigma)| < \gamma^+$. 对每一子公式 φ，存在 $|\mathrm{Term}_0^{\mathrm{Fv}(\varphi)}|$ 个函数，也即存在 $|\mathrm{Term}_0^{\mathrm{Fv}(\varphi)}|$ 个代换特例. 因为 $|\mathrm{Fv}(\varphi)| < \lambda$，且对所有 $\xi < \lambda$，$\kappa^\xi = \kappa$，所以对每一子公式 φ，有 κ 个代换特例，所以 $|\Delta| = |\mathrm{Sub}(\sigma)| \cdot \kappa + \kappa = \kappa$.

若 σ 含有函数符号，则我们分以下两种情况讨论之：

情况 1　假设 $\rho < \lambda$（即设 λ 是奇异基数）：令 Term 是 Term_0 相对 σ 中的函数符号根据项的形成规则封闭的闭包. 据 ρ 的正则性，$\mathrm{Term} = \bigcup_{\zeta<\rho} \mathrm{Term}_\zeta$，其中对 $0 < \zeta < \rho$，Term_ζ 是所有形如 $F(t_\xi : \xi < \zeta)$

的项集使得 F 是 σ 的 ζ 元函数符号且对每一 $\xi<\zeta, t_\xi\in\bigcup_{\tau<\zeta}\mathrm{Term}_\tau$.显然,Term 满足(1)和(4). 对(2):因为项的长度 $<\rho$,在情况 1 的条件下,$\rho<\lambda$ 且 σ 的每一子公式 φ 有 $<\lambda$ 个自由变元,所以若 $f\in \mathrm{Term}^{\mathrm{Fv}(\varphi)}$,则 $|\mathrm{Fv}(\mathrm{SF}_f(\varphi))|\leqslant|\mathrm{Fv}(\varphi)|\cdot\rho<\lambda$,所以有(2). 已知 $|\mathrm{Term}_0|=\kappa$. 若 $\zeta>0$ 且对 $\tau<\zeta$,$|\mathrm{Term}_\tau|=\kappa$,则因为 $\kappa^\zeta=\kappa$,所以 $|\mathrm{Term}_\zeta|=\kappa$. 因为 $\kappa^\rho=\kappa$,所以 $|\mathrm{Term}|=\kappa$,即 Term 满足性质(3). 由此有性质(5).

情况 2　假设 $\rho\geqslant\lambda$:据第 1 章对 $\mathscr{L}_{\gamma^+\lambda\omega}$ 的规定,λ 是正则基数且 $\rho\leqslant\gamma^+$. 令 $\Delta_0=\{\mathrm{SF}_f(\varphi):\varphi\in\mathrm{Sub}(\sigma)$ 且 $f\in\mathrm{Term}_0{}^{\mathrm{Fv}(\varphi)}\}$. 对 $\tau<\zeta$,任给 Term_τ 和 Δ_τ,我们来定义 Term_ζ 和 Δ_ζ:令 Term_ζ 是 $\bigcup_{\xi<\zeta}\Delta_\xi$ 中公式的项的集合,$\Delta_\zeta=\{\mathrm{SF}_f(\varphi):\varphi\in\mathrm{Sub}(\sigma)$ 且 $f\in\mathrm{Term}_\zeta{}^{\mathrm{Fv}(\varphi)}\}$,$\mathrm{Term}=\bigcup_{\zeta<\lambda}\mathrm{Term}_\zeta$. 若 $\varphi\in\mathrm{Sub}(\sigma)$,则 φ 有 $<\lambda$ 个自由变元. 因为 λ 是正则基数,所以对任意 $f\in\mathrm{Term}^{\mathrm{Fv}(\varphi)}$,存在 $\zeta<\lambda$ 使得 $f\in\mathrm{Term}_\zeta^{\mathrm{Fv}(\varphi)}$. 因此 $\Delta=\bigcup_{\zeta<\lambda}\Delta_\zeta\cup\{t_1\equiv t_2:t_1,t_2\in\mathrm{Term}\}$. 由此可得(1). 施归纳于 $\zeta<\lambda$,我们来证明(2)—(4). 显然,Term_0 和 Δ_0 有性质(2)—(4). 假设对所有 $\tau<\zeta$,Term_τ 和 Δ_τ 有(2)—(4). 对 $\zeta<\lambda$,考虑 Term_ζ 和 Δ_ζ. 易见,Term_ζ 中的项是某个 Δ_τ 中公式的子项,因此据归纳假设,它有 $<\lambda$ 的自由变元且这些变元都在 Y 中. 若 $\varphi\in\mathrm{Sub}(\sigma)$ 且 $f\in\mathrm{Term}_\zeta{}^{\mathrm{Fv}(\varphi)}$,则 $\mathrm{Fv}(\mathrm{SF}_f(\varphi))\subseteq\bigcup\{\mathrm{Fv}(f(y)):y\in\mathrm{Fv}(\varphi)\}$,而据 λ 的正则性,$\bigcup\{\mathrm{Fv}(f(y)):y\in\mathrm{Fv}(\varphi)\}$ 是 Y 的幂 $<\lambda$ 的子集,所以 Term_ζ 和 Δ_ζ 有性质(2),(4). 因为对 $\tau<\zeta$,据归纳假设,$|\mathrm{Term}_\tau|=\kappa$,所以对 $\tau<\zeta$,$|\Delta_\tau|=|\mathrm{Sub}(\sigma)|\cdot|\mathrm{Term}_\tau{}^{\mathrm{Fv}(\varphi)}|=\kappa$,因此 $\left|\bigcup_{\tau<\zeta}\Delta_\tau\right|=\zeta\cdot\kappa=\kappa$. $\bigcup_{\tau<\zeta}\Delta_\tau$ 中的每一公式对 Term_ζ 至多贡献了 γ 个项,所以 $|\mathrm{Term}_\zeta|=\kappa\cdot\gamma=\kappa$,所以(3)得证. 因为,$|\Delta|=\left|\bigcup_{\zeta<\lambda}\Delta_\zeta\cup\{t_1\equiv t_2:t_1,t_2\in\mathrm{Term}\}\right|=\kappa+\kappa=\kappa$,所以(5)得证. □

3.3.4 记号　为了方便,以后我们有时把公式 φ 写作 $\varphi(X)$,

甚至 $\varphi(X(0),\cdots,X(\xi),\cdots)$，其中 X 是个体变元序列使 X 无需含 φ 中所有自由变元且 X 可含不在 φ 中的变元. 令 f 是从 $\mathrm{Ran}(X)$ 到某项集的函数，则 $\varphi(f\circ X)=\varphi(f(X(0)),\cdots,f(X(\xi)),\cdots)$ 表示首先改变 φ 中的约束变元以避免可能的混淆，然后用 $f(X(\xi))$ 代换 φ 中 $X(\xi)$ 的自由出现. **注意**：这里需要假设在代换时存在足够多的既不在 φ 中、也不在任何 $f(X(\xi))$ 中的变元.

3.3.5 可满足引理 令 σ 是 $\mathscr{L}_{\gamma^+\lambda\rho\kappa}$ 的句子使得 $\mathscr{L}_{\gamma^+\lambda\rho\kappa}$ 有一个不在 σ 中出现的、由 $\kappa(\gamma^+,\lambda)$ 个个体变元组成的集合 Y. 如 3.3.3 那样构造集合 Term，Δ，则下列命题等价：

(1) σ 是可满足的.

(2) σ 有一个幂 $\leqslant\kappa(\gamma^+,\lambda)$ 的模型.

(3) 存在公式集 Φ 使得 Φ 包含 σ 和 $\{t\equiv t:t\in\mathrm{Term}\}$ 且满足：

① 若项 $F(t_\xi:\xi<\zeta)$，$F(t_\xi':\xi<\zeta)$ 在 Term 中，则

$\{t_\xi\equiv t_\xi':\xi<\zeta\}\subseteq\Phi\Rightarrow F(t_\xi:\xi<\zeta)\equiv F(t_\xi':\xi<\zeta)\in\Phi.$

② 若 $t_0'\equiv t_1'$，$t_0\equiv t_1\in\Delta$，则

$$t_0\equiv t_0',t_1\equiv t_1',t_0\equiv t_1\in\Phi\Rightarrow t_0'\equiv t_1'\in\Phi.$$

③ 若原子公式 $R(t_\xi:\xi<\eta)$，$R(t_\xi':\xi<\eta)\in\Delta$，则

$\{t_\xi\equiv t_\xi':\xi<\eta\}\cup\{R(t_\xi:\xi<\eta)\}\subseteq\Phi\Rightarrow R(t_\xi':\xi<\eta)\in\Phi.$

④ 若 $\varphi\in\Delta$，则 $\varphi\in\Phi\Leftrightarrow\neg\varphi\notin\Phi$.

⑤ 若 $\bigwedge\Psi\in\Delta$，则 $\bigwedge\Psi\in\Phi\Leftrightarrow\Psi\subseteq\Phi$.

⑥ 若 $\forall X\varphi\in\Delta$，(这里为了直观用 $\forall$ 作为初始符号)，则

$$\forall X\varphi\in\Phi\Leftrightarrow\{\mathrm{SF}_g(\varphi):g\in\mathrm{Term}^X\}\subseteq\Phi.$$

证明：(2) ⇒ (1) 显然，所以下证 (1) ⇒ (3)，(3) ⇒ (2).

(1) ⇒ (3)：设 σ 是可满足的，则 σ 有模型 $\mathfrak{A}$. 我们要找 $\mathfrak{A}$ 的赋值 f 使得 $\Phi_f=\{\varphi:\mathfrak{A}\models\varphi[f]\}$ 满足条件①—⑥. 易见对 $\mathfrak{A}$ 的任意赋值 f，Φ_f 皆满足①—⑤，所以非平凡的情况只是对条件⑥的验证. 首先把 Δ 中所有量化式排列如下：

$$\forall X_0\varphi_0,\cdots,\forall X_\beta\varphi_\beta,\cdots,\qquad\beta<\alpha.$$

所谓上述量化式的**证据公式**的序列是指下列公式序列：

$$\varphi_0(g_0 \circ X_0), \cdots, \varphi_\beta(g_\beta \circ X_\beta), \cdots, \qquad \beta<\alpha;$$

其中每一 g_β 是从 X_β 到 Y 的单射，对 $\tau \neq \beta$, $\mathrm{Ran}(g_\beta) \cap \mathrm{Ran}(g_\tau) = \varnothing$，且对 $\tau \leqslant \beta$, $\mathrm{Ran}(g_\beta)$ 的变元不在 $\forall X_\tau \varphi_\tau$ 中出现. 这样的函数序列是可以找到的：假设对 $\tau<\beta$，我们已有 g_τ. 因为对 $\tau<\beta$, Y 中只有 $<\lambda$ 个变元在 $\mathrm{Ran}(g_\tau)$，且对 $\tau \leqslant \beta$, Y 中只有 $<\lambda$ 个变元在 $\forall X_\tau \varphi_\tau$ 中，所以据 3.3.2(4)，对 $\tau<\beta$, Y 中有 κ 个变元不在 $\mathrm{Ran}(g_\tau)$ 中；对 $\tau \leqslant \beta$, Y 中有 κ 个变元不在 $\forall X_\tau \varphi_\tau$ 中，因此我们能找到从 X_β 到这样的变元的单射 g_β.

令 $W_\beta = \varphi_\beta(g_\beta \circ X_\beta) \to \forall X_\beta \varphi_\beta$. 给定 $\mathfrak{A}$ 的任意赋值 $f \in A^{\mathrm{Var}}$，施超穷归纳，我们来定义从 $\mathrm{Ran}(g_\beta)$ 到 A 的函数 h_β 使得若 $f_\beta \in A^{\mathrm{Var}}$ 是这样的赋值：对 $\tau \leqslant \beta$，在 $\mathrm{Ran}(g_\tau)$ 上是 h_τ，在别处是 f，则 $\mathfrak{A} \models W_\beta[f_\beta]$. 设对 $\tau<\beta$，已有这样的 h_τ，我们来找所需的 h_β. 令 $f'_\beta \in A^{\mathrm{Var}}$ 对 $\tau<\beta$，在 $\mathrm{Ran}(g_\tau)$ 上是 h_τ，在别处是 f. 若 $\mathfrak{A} \models \forall X_\beta \varphi_\beta[f'_\beta]$，则令 h_β 在 $\mathrm{Ran}(g_\beta)$ 上是 f，在这种情况下我们有 $f'_\beta = f_\beta$，所以 $\mathfrak{A} \models \forall X_\beta \varphi_\beta[f_\beta]$，因此 $\mathfrak{A} \models W_\beta[f_\beta]$. 若 $\mathfrak{A} \not\models \forall X_\beta \varphi_\beta[f'_\beta]$，则选择从 X_β 到 A 的函数 h 使得 $\mathfrak{A} \not\models \varphi_\beta[f'_\beta * h]$. 选择 h_β 使得 $h_\beta \circ g_\beta$ 和 h 在 X_β 上相同. 据 Y 的性质和 Δ 的构造，

$$\mathrm{Ran}(g_\tau) \cap \mathrm{Fv}(\varphi_\beta) = \varnothing, \quad \mathrm{Ran}(g_\beta) \cap \mathrm{Fv}(\varphi_\beta) = \varnothing.$$

又因为 $\mathrm{Ran}(g_\tau) \cap \mathrm{Ran}(g_\beta) = \varnothing$，所以 f_β 和 f'_β 在 $\mathrm{Fv}(\varphi_\beta)$ 上相同，因为 f_β 和 f'_β 只在 $\mathrm{Ran}(g_\beta)$ 上不同，所以

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \not\models \varphi_\beta[f'_\beta * h] &\Leftrightarrow \mathfrak{A} \not\models \varphi_\beta[f_\beta * h] \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{A} \not\models \varphi_\beta(g_\beta \circ X_\beta)[f_\beta * h] \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{A} \not\models \varphi_\beta(g_\beta \circ X_\beta)[f_\beta],
\end{aligned}$$

在这种情况下，仍有 $\mathfrak{A} \models W_\beta[f_\beta]$. 归纳至此完毕.

令 $\Phi_{f_\alpha} = \{\varphi : \mathfrak{A} \models \varphi[f_\alpha]\}$. 因为 f_α 和 f_β 在 $\mathrm{Fv}(W_\beta)$ 上相同，所以对所有 $\beta<\alpha$, $\mathfrak{A} \models W_\beta[f_\alpha]$，因此若 $\mathfrak{A} \not\models \forall X_\beta \varphi_\beta[f_\alpha]$，则我们有 $\mathfrak{A} \not\models$

$\varphi_\beta(g_\beta \circ X_\beta)[f_\alpha]$. 但因为 Y 中没有变元在 Δ 的公式中约束，所以 $\varphi_\beta(g_\beta \circ X_\beta)=\mathrm{SF}_{g_\beta}(\varphi_\beta)$. 现在验证 Φ 有性质⑥就很容易了，故略.

(3) ⇒ (1). 假设(3)成立. 我们要构造 σ 的幂 $\leqslant \kappa(\gamma^+,\lambda)$ 的模型 $\mathfrak{A}$. 给定 Φ 使之满足条件①—⑥且包含 σ 和 $\{t\equiv t: t\in \mathrm{Term}\}$. 定义 Term 上的关系 $\approx$：

$$t_1\approx t_2 \Leftrightarrow t_1\equiv t_2\in\Phi,$$

据条件②可以证明 $\approx$ 是对称和传递的，而自返性显然；所以 $\approx$ 是等价关系. 下面用 $[t]_\approx$ 表示以 t 为代表元的等价类. 令 $\mathfrak{A}$ 的个体域 A 是所有这样的等价类的集合，据 3. 3. 3(3)，$|\mathrm{Term}|=\kappa(\gamma^+,\lambda)$，所以 $|A|\leqslant\kappa(\gamma^+,\lambda)$.

固定 $y_0\in Y$，我们来解释 $\mathscr{L}_{\gamma^+\lambda\rho\kappa}$ 的符号：

对个体常元 c，

$$c^{\mathfrak{A}}=\begin{cases}[c]_\approx, & \text{若 } c\in \mathrm{Term};\\ [y_0]_\approx, & \text{否则}.\end{cases}$$

对 ζ 元函数符号 F，

$$F^{\mathfrak{A}}([a_\xi]_\approx:\xi<\zeta)=\begin{cases}[F(t_\xi:\xi<\zeta)]_\approx, & \text{若对 } \xi<\zeta, \text{存在 } t_\xi\in[a_\xi]_\approx \text{使得 } F(t_\xi:\xi<\zeta)\in \mathrm{Term};\\ [y_0]_\approx, & \text{否则}.\end{cases}$$

Φ 的性质①保证这些对应是单射. 最后据 Φ 的性质②—③对等词 $\equiv$ 和 η 元关系符号 R 解释如下：

$$\mathfrak{A}\models t_0\equiv t_1[[a_0]_\approx,[a_1]_\approx]$$
$$\Leftrightarrow \text{存在 } t_0\in[a_0]_\approx,\ t_1\in[a_1]_\approx \text{使得 } t_0\equiv t_1\in\Delta\cap\Phi,$$
$$\mathfrak{A}\models R(t_\xi:\xi<\eta)[[a_\xi]_\approx:\xi<\eta]$$
$$\Leftrightarrow \text{对 } \xi<\eta,\ t_\xi\in[a_\xi]_\approx \text{使得 } R(t_\xi:\xi<\eta)\in\Delta\cap\Phi.$$

令 f 是 $\mathfrak{A}$ 的任意赋值使得对 $y\in Y$，$f(y)=[y]_\approx$，且对 σ 中出现的每一个体常元 c，$f(c)=[c]_\approx$. 施归纳于项，我们用下列方法

把 f 扩张为 Term 上的赋值 f^*：若 $F(t_\xi:\xi<\zeta)\in\mathrm{Term}$，则对每一 $\xi<\zeta$，$t_\xi\in\mathrm{Term}$. 据归纳假设，$f^*(t_\xi)=[t_\xi]_\sim$，因此定义

$$f^*(F(t_\xi:\xi<\zeta))=F^{\mathfrak{A}}([t_\xi]_\sim:\xi<\zeta)=[F(t_\xi:\xi<\zeta)]_\sim.$$

所以对所有 $t\in\mathrm{Term}$，我们有 $f^*(t)=[t]_\sim$. 为了简便，下面我们对 f 和 f^* 不加区别.

最后我们施归纳于公式的构造步骤的秩（见 1.3.14）来验证：对所有 $\varphi\in\Delta$ 和 Term 上的 f，

$$\mathfrak{A}\models\varphi[f]\Leftrightarrow\varphi\in\Phi.$$

秩为 0 的公式是原子公式. 考虑原子公式 $R(t_\xi:\xi<\eta)\in\Delta$，因为对每一 $\xi<\eta$，$t_\xi\in\mathrm{Term}$，所以

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}\models R(t_\xi:\xi<\eta)[f]&\Leftrightarrow\mathfrak{A}\models R(t_\xi:\xi<\eta)[f(t_\xi):\xi<\eta]\\&\Leftrightarrow\mathfrak{A}\models R(t_\xi:\xi<\eta)[[a_\xi]_\sim:\xi<\eta]\\&\Leftrightarrow R(t_\xi:\xi<\eta)\in\Phi.\end{aligned}$$

对等词也类似可证.

假设秩小于 φ 的秩的公式已有要证的性质. 当 $\varphi=\neg\psi$ 的情况易证. 设 $\varphi=\bigwedge_{\xi<\delta}\varphi_\xi\in\Delta$，则对 σ 的某个子公式 ψ 和某个函数 $g\in\mathrm{Term}^{\mathrm{Fv}(\psi)}$，$\varphi=\mathrm{SF}_g(\psi)$. 所以 ψ 形如 $\bigwedge_{\xi<\delta}\psi_\xi$. 易证 $\varphi=\bigwedge_{\xi<\delta}\mathrm{SF}_g(\psi_\xi)$，且对每一 $\xi<\delta$，φ_ξ 是 $\mathrm{SF}_g(\psi_\xi)$，所以每一 $\varphi_\xi\in\Delta$. 因为每一 φ_ξ 的秩小于 φ 的秩，据归纳假设，对所有 $\xi<\delta$，$\mathfrak{A}\models\varphi_\xi[f]\Leftrightarrow\varphi_\xi\in\Phi$. 据 Φ 的性质⑤，

$$\mathfrak{A}\models\varphi[f]\Leftrightarrow\varphi\in\Phi.$$

最后假设 $\varphi=\forall X\psi$，则对 σ 的某个子公式 θ 和某个函数 $g\in\mathrm{Term}^{\mathrm{Fv}(\theta)}$，$\varphi=\mathrm{SF}_g(\theta)$. 显然 θ 形如 $\forall X\psi'$，因为 Y 中的变元不在 φ 中出现，所以 $\varphi=\forall X\mathrm{SF}_g(\psi')$. 若 $h\in\mathrm{Term}^X$，则

$$\mathrm{SF}_h^X(\psi)=\mathrm{SF}_h^X(\mathrm{SF}_g^{\mathrm{Fv}(\theta)}(\psi'))=\mathrm{SF}_{h\cup g}^{\mathrm{Fv}(\psi')}(\psi')\in\Delta.$$

因为这些代换式的秩小于 φ 的秩，所以据归纳假设，

$$\mathfrak{A}\models\mathrm{SF}_h(\psi)[f]\Leftrightarrow\mathrm{SF}_h(\psi)\in\Phi.$$

据 Φ 的性质⑥，

$$\text{对所有 } h\in \mathrm{Term}^X,\ \mathfrak{A}\models \mathrm{SF}_h(\psi)[f] \Leftrightarrow \varphi\in \Phi.$$

因为 Y 的变元不在 φ 中(约束)出现，所以

$$\mathfrak{A}\models \varphi[f] \Rightarrow \text{对所有 } h\in \mathrm{Term}^X,\ \mathfrak{A}\models \mathrm{SF}_h(\psi)[f].$$

反之，若 $\mathfrak{A}\not\models \varphi[f]$，则存在 $h_1\in A^X$ 使得 $\mathfrak{A}\not\models \psi[f*h_1]$. 选择从 X 到 Term 的函数 h 使得对 $x\in X, h(x)\in h_1(x)$. 因为在 Term 上，$f(t)=[t]_\approx$，所以 $f\circ h=h_1$，因此

$$\mathfrak{A}\not\models \psi[f*h_1] \Rightarrow \mathfrak{A}\not\models \mathrm{SF}_h(\psi)[f].$$

至此归纳完毕. 综上结果，我们有 $\mathfrak{A}\models \varphi[f] \Leftrightarrow \varphi\in\Phi$. 因为 Φ 是可满足的且 $\sigma\in\Phi$，所以 σ 是可满足的. □

注意：3.3.3 和 3.3.5 要求 σ 是句子，而不是公式，但这些限制不是本质的，从可满足性的观点看，自由个体变元和个体常元实际上无法区别.

下面我们证明由 3.3.5 得到的关于 Löwenheim-Skolem-定理的两个推论，尽管集中研究该定理是第 11 和 13 章的工作.

3.3.6 $\mathscr{L}_{\gamma^+\lambda\rho\pi}$-向下-Löwenheim-Skolem-定理 令 Σ 是 $\mathscr{L}_{\gamma^+\lambda\rho\pi}$-句子集使得 $\gamma^+\leqslant|\Sigma|$ 且对所有 $\xi<\lambda, |\Sigma|^\xi=|\Sigma|$，则

$$\Sigma \text{ 有模型} \Leftrightarrow \Sigma \text{ 有幂} \leqslant |\Sigma| \text{ 的模型}.$$

证明：令 σ 是 $\bigwedge\Sigma$，则 σ 是 $\mathscr{L}_{|\Sigma|^+\lambda\rho\pi}$ 的句子且 $\kappa(|\Sigma|^+,\lambda)=|\Sigma|$. 据 3.3.5，就有本推论. □

3.3.7 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$-向下-Löwenheim-Skolem-定理 假设 Σ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$-句子集且有模型 $\mathfrak{A}$，若 γ 是基数使得对所有 $\xi<\lambda$, $\gamma^\xi=\gamma$, 且 $\kappa+|\Sigma|\leqslant\gamma<|A|$，则 Σ 有幂为 γ 的模型.

证明：引入新个体常元集 $\{c_\xi:\xi<\gamma\}$，令

$$\sigma=\bigwedge\Sigma\wedge\bigwedge\{\neg(c_\xi\equiv c_\zeta):\xi,\zeta<\gamma \text{ 使得 } \xi\neq\zeta\}.$$

则 σ 是 $\mathscr{L}_{\gamma^+\lambda\rho\pi}$ 的句子且 $\delta(\gamma^+,\lambda)=\gamma$. 据 3.3.5，$\sigma$ 有幂 $\leqslant\gamma$ 的模型. 据 σ 的构造，σ 的每一模型的幂 $\geqslant\gamma$；所以得证. □

令 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta;\Omega)$ 是第 2 章定义的演绎系统，易证

$$\varphi\sim\psi \Leftrightarrow \mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta;\Omega)\vdash\varphi\leftrightarrow\psi$$

是 Form($\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$)上的等价关系．我们令 B($\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta;\Omega)$)是所有这样的等价类 $\|\varphi\|=\{\psi:\varphi\sim\psi\}$ 构成的集合．由命题联结词导出的、在 B($\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta;\Omega)$)上的运算定义如下：其中 $\gamma<\kappa$

$$\neg\|\varphi\|=\|\neg\varphi\|,$$

$$\bigwedge_{\xi<\gamma}\|\varphi_\xi\|=\|\bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_\xi\|,\quad \bigvee_{\xi<\gamma}\|\varphi_\xi\|=\|\bigvee_{\xi<\gamma}\varphi_\xi\|.$$

令 $\mathbf{1}=\|\varphi\vee\neg\varphi\|$，$\mathbf{0}=\|\varphi\wedge\neg\varphi\|$．显然，$\mathfrak{B}=\mathfrak{B}(\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta;\Omega))=\langle B(\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta;\Omega)),\neg,\wedge,\vee\rangle$ 是 $\nearrow\kappa$-完全布尔代数．定义偏序 $\leqslant$：

$$\|\varphi\|\leqslant\|\psi\|\Leftrightarrow \mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta;\Omega)\vdash\varphi\rightarrow\psi.$$

据约束变元变换律(2.2.14)和公理 4，对所有代换函数 $f:X\rightarrow$ Term($\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$)，

$$\|\forall X\varphi\|\leqslant\|\varphi(f\circ X)\|.$$

不难看到 $\|\forall X\varphi\|$ 是所有 $\|\varphi(f\circ X)\|$ 的最大下界．

注意：我们也可以如第 2 节那样定义 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的、相对公式集 Σ 的等价关系 $\sim_\Sigma$．但是由于我们后面要证的定理没有强完全性定理，所以这里采用简洁的形式．

3.3.8 完全性定理　假设 $\mathscr{L}_{\gamma^+\lambda\rho\pi}$ 是无穷语言使得对所有 $\xi<\lambda$，$\gamma^\xi=\gamma$，则 $\mathbf{B}=\mathbf{B}_{\gamma^+\lambda\rho\pi}(\mathrm{CD}_\gamma;\mathrm{DC}_\gamma)$ 是完全的．

证明：据 3.2.7，$\mathbf{B}$ 中可证的公式皆有效．据 2.2.15，只须证 $\mathscr{L}'_{\gamma^+\lambda\rho\pi}$ 的每一有效句 σ 在 $\mathscr{L}'_{\gamma^+\lambda\rho\pi}$ 表述的 $\mathbf{B}'=\mathbf{B}'_{\gamma^+\lambda\rho\pi}(\mathrm{CD}_\gamma;\mathrm{DC}_\gamma)$ 中可证，其中 $\mathscr{L}'_{\gamma^+\lambda\rho\pi}=\mathscr{L}_{\gamma^+\lambda\rho\pi}\cup C$，$C$ 是如 2.2.15 所规定的新个体常元集．为此，我们构造代数 $\mathfrak{B}=\mathfrak{B}(\mathbf{B}')$，且令 Y 是不在 σ 中出现的 $\kappa(\gamma^+,\lambda)=\gamma$ 个变元的集合．据 3.3.3，构造项集 Term 和公式集 Δ．显然 Term 和 Δ 的幂皆为 γ．

假设 $\mathbf{B}'\nvdash\sigma$，由 $\mathfrak{B}$ 的 γ-表示性和 3.1.3 可知，$\mathfrak{B}$ 有一到 $\mathfrak{B}_0$ 的同态 h 把 $\|\neg\sigma\|$ 映射到 1 且保持任意给定的 γ 个交或并的聚合，其中每一交和并至多有 γ 个项．我们要根据这样的同态 h 构造集合 $\Phi=\{\varphi:h(\|\varphi\|)=1\}$ 使得满足 3.3.5(3)的①—⑥．因为 $\neg\sigma\in\Phi$，所以 $\neg\sigma$ 可满足，因此 $\nvDash\sigma$，从而完成本定理的证明．

首先我们用 3.3.5 的程序来选择证据公式(当然,若 σ 不包含量化句,这一步可以省略). 排列 Δ 中所有的量化句:

$$\forall X_0\varphi_0,\cdots,\forall X_\beta\varphi_\beta,\cdots,$$

不妨假设该序列长度是 γ. 选择相应的证据公式

$$\varphi_0(g_0\circ X_0),\cdots,\varphi_\beta(g_\beta\circ X_\beta),\cdots,\quad \beta<\gamma,$$

使得每一 $g_\beta:X_\beta\to Y$ 是单射,且对 $\tau\neq\beta$, $\mathrm{Ran}(g_\beta)\cap\mathrm{Ran}(g_\tau)=\varnothing$, 且对 $\tau\leqslant\beta$, $\mathrm{Ran}(g_\beta)$ 的变元不在 $\forall X_\tau\varphi_\tau$ 中出现.

令 $W_\beta=\varphi_\beta(g_\beta\circ X_\beta)\to\forall X_\beta\varphi_\beta$. 我们来证明,在 $\mathfrak{B}$ 中,

$$\|\neg\sigma\wedge\bigwedge_{\beta<\gamma}W_\beta\|\neq\mathbf{0}.$$

假设 $\|\neg\sigma\wedge\bigwedge_{\beta<\gamma}W_\beta\|=\mathbf{0}$, 则在 $\mathbf{B}'$ 中, $\vdash\neg(\neg\sigma\wedge\bigwedge_{\beta<\gamma}W_\beta)$, 即

$$\vdash\neg\sigma\to\bigvee_{\beta<\gamma}\neg W_\beta.$$

对每一 W_β, 考虑函数 g_β. 显然这些函数的值域两两不相交;对 $\tau<\beta$, $\mathrm{Ran}(g_\beta)$ 不在 W_τ 中自由出现,而且 Δ 的每一公式有 $<\lambda$ 个自由变元. 因此据 DC_γ, 能在每一 W_β 前面加上一个长度 $<\lambda$ 且包含 $\mathrm{Fv}(W_\beta)\cap\bigcup_{\tau<\beta}\mathrm{Ran}(g_\tau)$ 的序列 Y_β:

$$\vdash\neg\sigma\to\forall\mathrm{Ran}(g_0)\neg W_0\vee[\bigvee_{1\leqslant\beta<\gamma}\exists Y_\beta\forall\mathrm{Ran}(g_\beta)\neg W_\beta]. \tag{3.26}$$

因为

$$\vdash\neg W_\beta\leftrightarrow\varphi_\beta(g_\beta\circ X_\beta)\wedge\neg\forall X_\beta\varphi_\beta,$$

且 $\mathrm{Ran}(g_\beta)$ 的变元不在 X_β 和 φ_β 中出现,据 2.2.12(3)和(5),对每一 $\beta<\gamma$,

$$\vdash\forall\mathrm{Ran}(g_\beta)\neg W_\beta\leftrightarrow[\forall\mathrm{Ran}(g_\beta)\varphi_\beta(g_\beta\circ X_\beta)\wedge\neg\forall X_\beta\varphi_\beta],$$

即

$$\vdash\neg\forall\mathrm{Ran}(g_\beta)\neg W_\beta\leftrightarrow[\exists\mathrm{Ran}(g_\beta)\varphi_\beta(g_\beta\circ X_\beta)\to\forall X_\beta\varphi_\beta]. \tag{3.27}$$

再据 2.2.12(3),

$$\vdash \neg\exists Y_\beta \forall \mathrm{Ran}(g_\beta)\neg W_\beta \leftrightarrow \forall Y_\beta[\exists \mathrm{Ran}(g_\beta)\varphi_\beta(g_\beta\circ X_\beta)\rightarrow\forall X_\beta\varphi_\beta]. \tag{3.28}$$

据(3.27),(3.28)和 2.2.12(7),显见(3.26)的"$\rightarrow$"右边的每一析取肢的否定是可证的,因此我们有 $\vdash\sigma$,而这与我们假设 $\nvdash\sigma$ 矛盾,所以

$$\|\neg\sigma\wedge\bigwedge_{\beta<\gamma}W_\beta\|\neq\mathbf{0}.$$

我们选择被同态 h 保持的、如下(3.29)和(3.30)的并和(3.31)的交的聚合,使得 h 是到 $\mathfrak{B}_0$ 的映射且把 $\|\neg\sigma\wedge\bigwedge_{\beta<\gamma}W_\beta\|$ 映射到 $\mathbf{1}$ 上:对 Term 中所有形如 $F(t_\xi:\xi<\zeta)$,$F(t'_\xi:\xi<\zeta)$ 的项,

$$\bigvee_{\xi<\zeta}\neg\|t_\xi\equiv t'_\xi\|\vee\|F(t_\xi:\xi<\zeta)\equiv F(t'_\xi:\xi<\zeta)\|. \tag{3.29}$$

对 Δ 中所有形如 $R(t_\xi:\xi<\eta)$ 和 $R(t'_\xi:\xi<\eta)$ 的原子公式,

$$\bigvee_{\xi<\eta}\neg\|t_\xi\equiv t'_\xi\|\vee\neg\|R(t_\xi:\xi<\zeta)\|\vee\|R(t'_\xi:\xi<\eta)\|. \tag{3.30}$$

对 Δ 中所有形如 $\bigwedge_{\xi<\delta}\varphi_\xi$ 的合取式,

$$\bigwedge_{\xi<\delta}\|\varphi_\xi\|=\|\bigwedge_{\xi<\delta}\varphi_\xi\|. \tag{3.31}$$

据等词公理,显然,上述并(3.29)和(3.30)是 $\mathbf{1}$. 另外易见,Term 和 Δ 中至多有 γ 个如上那样的并和交,其中每一个至多有 γ 个项. 令 $\Phi=\{\varphi:h(\|\varphi\|)=\mathbf{1}\}$,其中 h 如上规定. 因此 $\neg\sigma\in\Phi$. 下面简单验证 Φ 满足 3.3.5(3)的①—⑥. 据等词公理,Φ 显然满足①—③. ④也易证. 据合取公理和合取规则,我们有⑤. 非平凡情况只有⑥:据公理 4,对所有 $f\in\mathrm{Term}^X$,$\|\forall X\varphi\|\leqslant\|\mathrm{SF}_f(\varphi)\|$. **注意**:这里公理 4 的规定条件能满足,因为 Term 中项的变元都在 Y 中,而且这样的变元不会在 Δ 的量化式中约束出现. 因为 h 是保序的,所以

$$\forall X\varphi\in\Phi\Rightarrow\text{所有代换特例 }\mathrm{SF}_f(\varphi)\in\Phi.$$

反之,若 $\forall X\varphi\notin\Phi$,则因为存在 β 使得 $W_\beta=\varphi_0(g_\beta\circ X)\rightarrow\forall X\varphi_0$,且因为 $h(\|W_\beta\|)=\mathbf{1}$ 和 $h(\|\forall X\varphi_0\|)=\mathbf{0}$,所以 $h(\|\varphi_0(g_\beta\circ X)\|)=\mathbf{0}$,因此 $\varphi_0(g_\beta\circ X)\notin\Phi$. 但在这种情况下,$\varphi_0(g_\beta\circ X)=\mathrm{SF}^X_{g_\beta}(\varphi_0)$,所以性质⑥成立. 因为 $\neg\sigma\in\Phi$ 是可满足的,所以 $\nvdash\sigma$. □

下面我们用 $D_{<\kappa}$ 表示 $\{D_\gamma: \gamma<\kappa\}$，用 $DBH_{<\kappa}$ 表示 $\{DBH_\gamma: \gamma<\kappa\}$（参见 2.1.10 后面的说明）.

3.3.9 完全性定理 若 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 是无穷语言使得 κ 是强不可达基数，则 $\mathbf{B}_{\kappa\kappa\rho\pi}(D_{<\kappa}; DBH_{<\kappa})$ 是完全的.

证明：令 φ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\kappa\rho\pi}$ 的有效公式，γ 是 φ（作为一符号串）的长度和 $\{\rho,\pi\}-\{\kappa\}$ 的长度的最小基数上界. 易见 $\gamma<\kappa$，且若 $\rho<\kappa$，则 $\rho\leqslant\gamma$；若 $\pi<\kappa$，则 $\pi\leqslant\gamma$. 令 $\mathscr{L}_1=\mathscr{L}_{(2^\gamma)^+,\gamma^+,\rho_1,\pi_1}$ 是表述 φ 的诸代换特例的语言，其中

$$\rho_1=\begin{cases}\rho, & 若\ \rho<\kappa;\\ \gamma^+, & 若\ \rho=\kappa.\end{cases}\qquad \pi_1=\begin{cases}\pi, & 若\ \pi<\kappa;\\ \gamma^+, & 若\ \pi=\kappa.\end{cases}\tag{3.32}$$

则 φ 是 $\mathscr{L}_1$ 的公式且 $\mathscr{L}_1$ 的每一公式是 $\mathscr{L}_{\kappa\kappa\rho\pi}$ 的公式. 据 3.3.8，φ 在 $\mathscr{L}_1$ 表述的 $\mathbf{B}_{(2^\gamma)^+,\gamma^+,\rho_1,\pi_1}(CD_{2^\gamma}; DC_{2^\gamma})$ 中可证. 因为 κ 是强不可达的，所以 $2^\gamma<\kappa$. 据 3.2.14 和其它明显事实，可以从基本系统和 D_{2^γ} 中推出 CD_{2^γ}，从基本系统和 DBH_{2^γ} 中推出 DC_{2^γ}，所以

$$\mathbf{B}_{\kappa\kappa\rho\pi}(D_{<\kappa}; DBH_{<\kappa})\vdash\varphi. \quad \square$$

3.3.10 完全性定理 若 κ 是弱不可达基数且对所有 $\gamma<\kappa$，$\delta(\gamma^+,\lambda)<\kappa$，则 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(CD_{<\kappa}; DC_{<\kappa})$ 是完全的. 若 λ 还是正则基数，则只须假设对所有 $\gamma<\kappa$ 和所有 $\xi<\lambda$，$\gamma^\xi<\kappa$. 若 κ 是强不可达基数，则对所有 $\lambda\leqslant\kappa$，$\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(CD_{<\kappa}; DC_{<\kappa})$ 是完全的.

证明：若 $\lambda=\kappa$，则关于 κ,λ 的假设就简化为只假设 κ 是强不可达的. 在这种情况下，据 3.3.9，就有要证的结果. 对 $\lambda<\kappa$ 且 λ 是正则基数的情况，对所有 $\gamma<\kappa$，

$$\delta(\gamma^+,\lambda)=\bigcup_{\xi<\lambda}\gamma^\xi<\kappa \Leftrightarrow 对所有\ \xi<\lambda, \gamma^\xi<\kappa.$$

因此这种情况可以归约到本定理的第一种情况. 若此外 κ 还是强不可达基数且 $\lambda<\kappa$，则据 3.3.2，对所有 $\gamma<\kappa$，$\delta(\gamma^+,\lambda)\leqslant\gamma^\lambda<\kappa$，这又归约到第一种情况，因此剩下只须证，若对所有 $\gamma<\kappa$，$\delta(\gamma^+,\lambda)<\kappa$，则 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(CD_{<\kappa}; DC_{<\kappa})$ 是完全的.

假设 φ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的有效公式，γ 是 φ 的长度和 $\{\rho,\pi\}-\{\kappa\}$ 的长

度的最小基数上界．易见 $\gamma<\kappa$，且若 $\rho<\kappa$，则 $\rho\leqslant\gamma$；若 $\pi<\kappa$，则 $\pi\leqslant\gamma$．下令 $\mathscr{L}_1=\mathscr{L}_{\delta^+,\lambda,\rho_1,\pi_1}$ 是表述 φ 的诸代换特例的语言，其中 $\delta=\delta(\gamma^+,\lambda)$，且假设(3.32)成立．显然，$\varphi$ 是 $\mathscr{L}_1$-公式且每一 $\mathscr{L}_1$-公式是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$-公式．因为对所有 $\xi<\lambda$，$\delta^\xi=\delta$，所以根据 3.3.8，φ 在 $\mathscr{L}_1$ 表述的 $\mathbf{B}_{\delta^+\lambda\rho\pi}(\mathrm{CD}_{<\kappa};\mathrm{DC}_{<\kappa})$ 中可证．而这个形式证明也就是 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\mathrm{CD}_{<\kappa};\mathrm{DC}_{<\kappa})$ 中的形式证明．□

由上述定理易得下列推论，请读者自证．

3.3.11 完全性定理 若 κ 是弱不可达基数，则 $\mathbf{B}_\kappa(\mathrm{CD}_{<\kappa})$ 是完全的．对无穷基数 γ，$\mathbf{B}_{\gamma^+}(\mathrm{CD}_\gamma)$ 是完全的．尤其 $\mathbf{B}_{\omega_1}$ 是完全的．□

说明：因为 CD_ω 在基本系统 $\mathbf{B}_{\omega_1}$ 中是可证的，所以根据 3.3.8，$\mathbf{B}_{\omega_1\omega\rho\pi}(\varnothing;\mathrm{DC}_\omega)$ 是完全的．但我们还能进一步证明 $\mathbf{B}_{\omega_1\omega\rho\pi}$ 本身也是完全的．这个证明只依赖下列同态 h 的存在：

h 是从一给定的布尔代数到 $\mathfrak{B}_0$ 的同态使得 h 把一给定的非零元素映射到 1 且保持并和交的一可数聚合(参见 3.1.4).

我们还能选择这样的聚合使得每一并和交也有可数个项．因为 Lindenbaum-Tarski-代数对 γ 个并和交的聚合有类似的性质，所以这就向我们提示对 $\gamma>\omega$，$\mathbf{B}_{\gamma^+\omega\rho\pi}(\mathrm{CD}_\gamma)$ 也是完全的．但是下面我们给出的证明不能概括到上述情况，因为同态不是在 Lindenbaum-Tarski-代数 $\mathfrak{B}(\mathbf{B}_{\omega_1\omega\rho\pi})$ 上做的，而是在其子代数上做的．

3.3.12 完全性定理 $\mathbf{B}_{\omega_1\omega\rho\pi}$ 是完全的．

证明：不妨令 σ 是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega\rho\pi}$ 的任意有效句子，令 Y 是不在 σ 中出现的 $\kappa(\omega_1,\omega)=\omega$ 个变元的集合，如 3.3.3 构成项集 Term 和公式集 Δ．因为 ω 是正则的，所以 $\rho\leqslant\omega_1$．此外，$\pi\leqslant\omega_1$．所以 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega\rho\pi}$ 的函数和关系符号至多是 ω 元的．另外我们还知道 σ 的子公式集也是可数的，所以 $|\mathrm{Term}|=|\Delta|=\omega$．

构造 Lindenbaum-Tarski-代数 $\mathfrak{B}=\mathfrak{B}(\mathbf{B}_{\omega_1\omega\rho\pi})$．令 $\mathfrak{B}_1$ 是 $\mathfrak{B}$ 的个体域为 $B_1=\{\|\varphi\|:\mathrm{Fv}(\varphi)$ 是 Y 的有穷子集$\}$的子代数．因为 σ 是句子，据 1.3.2，σ 的子公式有 $<\omega$ 个自由变元，因此它的子公式

的代换特例也有$<\omega$个自由变元，所以Δ的公式只含有穷多个自由变元，而且这些公式所含的自由变元都在Y中．所以若$\varphi\in\Delta$，则$\|\varphi\|\in B_1$．显然，$\mathfrak{B}_1$不是ω-完全的，也不是$\mathfrak{B}$的ω-正则子代数．

下证：在$\mathfrak{B}_1$中，若$\forall X\varphi\in\Delta$，则相对$\mathfrak{B}_1$，

$$\|\forall X\varphi\| = \wedge\{\|\varphi(f\circ X)\| : f\in Y^X\}. \tag{3.33}$$

显然，在$\mathfrak{B}$中对所有$f\in Y^X$，有$\|\forall X\varphi\|\leqslant\|\varphi(f\circ X)\|$．为了看到(3.33)在$\mathfrak{B}_1$中成立，须注意：若$\|\psi\|\in B_1$且对所有$f\in Y^X$，$\|\psi\|\leqslant\|\varphi(f\circ X)\|$，则我们能选择单射$f$使$\mathrm{Ran}(f)$的元素不在$\psi$中出现．因为$\vdash\psi\to\varphi(f\circ X)$，所以$\vdash\psi\to\forall\mathrm{Ran}(f)\varphi(f\circ X)$．据2.2.12(7)，$\vdash\psi\to\forall X\varphi$，所以(3.33)在$\mathfrak{B}_1$中成立．

假设$\nvDash\sigma$，即$\|\sigma\|\neq\mathbf{1}$，因此$\|\neg\sigma\|\neq\mathbf{0}$，据3.1.4，令$h$是从$\mathfrak{B}_1$到$\mathfrak{B}_0$的同态使得$h$把$\|\neg\sigma\|$映射到$\mathbf{1}$且保持$\mathfrak{B}_1$中下列交和并的可数聚合：

(1) 对Δ中的量化式，形如(3.33)的交．

(2) 对Δ中的合取式$\bigwedge_{\xi<\delta}\varphi_\xi$，交$\wedge\{\|\varphi_\xi\| : \xi<\delta\}=\|\bigwedge_{\xi<\delta}\varphi_\xi\|$．

(**注意**：这些交在$\mathfrak{B}_1$中和在$\mathfrak{B}$中相同．)

(3) 如(3.29)和(3.30)，Term的项的并和Δ的原子公式的并．

(**注意**：这些并在$\mathfrak{B}_1$中总是$\mathbf{1}$)．

令$\Phi=\{\varphi : \|\varphi\|\in B_1$且$h(\|\varphi\|)=\mathbf{1}\}$．不难证明$\Phi$满足3.3.5(3)的①—⑥．因为$\neg\sigma\in\Phi$，所以$\neg\sigma$可满足，因此$\nvDash\sigma$．□

下面我们考虑当$\lambda=\omega$时，能归约到独立选择规则的情况．为了简化，我们使用下列记号：(参见2.1.9—2.1.10)

$$\mathrm{IC}_{<\gamma}=\{\mathrm{IC}_\xi : \xi<\gamma\},\quad \mathrm{DC}_{<\gamma}=\{\mathrm{DC}_\xi : \xi<\gamma\}.$$

3.3.13 完全性定理　令$\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$是无穷语言使得$\kappa$是强不可达基数，则$\mathbf{B}_{\kappa\omega\rho\pi}(\mathrm{CD}_{<\kappa};\mathrm{IC}_{<\kappa})$是完全的．

证明：不妨令σ是$\mathscr{L}_{\kappa\omega\rho\pi}$的有效句，因为$\kappa$是强不可达基数，所以对$2^\gamma<\kappa$，$\sigma$也是$\mathscr{L}_{\gamma^+\omega\rho\pi}$的句子．我们要从$\gamma^+$过渡到$\kappa$以便可以使用$\gamma$-分配律．令$Y$是不在$\sigma$中出现的$\eta(\gamma^+,\omega)=\gamma$个变元的集

合. 如 3.3.3 那样构造项集 Term 和公式集 Δ,把 Y 分成 ω 个两两不相交的集合 $Y_0,\cdots,Y_n,\cdots$,其中对每一 $n<\omega$, $|Y_n|=\gamma$. 构造 Lindenbaum-Tarski-代数 $\mathfrak{B}=\mathfrak{B}(\mathbf{B}_{\omega\omega p\pi}(\mathrm{CD}_{<\kappa};\mathrm{IC}_{<\kappa}))$. 令 $\mathfrak{B}_n$ 是 $\mathfrak{B}$ 的个体域为 $B_n=\{\|\varphi\|:\mathrm{Fv}(\varphi)\subseteq\bigcup_{i\leqslant n}Y_i\}$的子代数. 令 $\mathfrak{B}_\omega=\bigcup_{n<\omega}\mathfrak{B}_n$. 因为 Δ 中公式 φ 只含有穷多个自由变元,所以 $\|\varphi\|$ 在 $\mathfrak{B}_\omega$ 中.

显然,$\mathfrak{B}_n$ 和 $\mathfrak{B}$ 都是$\nearrow\kappa$-完全的且满足 γ-分配律. 若 $\delta<\kappa$ 且 $\mathrm{Fv}(\bigwedge_{\xi<\delta}\varphi_\xi)\subseteq\bigcup_{i\leqslant n}Y_i$,则在 $\mathfrak{B}_n$,$\mathfrak{B}_\omega$ 和 $\mathfrak{B}$ 中都有 $\|\bigwedge_{\xi<\delta}\varphi_\xi\|=\bigwedge_{\xi<\delta}\|\varphi_\xi\|$. 因此 $\mathfrak{B}_n$ 是 $\mathfrak{B}_\omega$ 和 $\mathfrak{B}$ 的$\nearrow\kappa$-子代数,但是,$\mathfrak{B}_\omega$ 不是 ω-完全的,也不是 $\mathfrak{B}$ 的 ω-正则子代数. 易见,对 $\|\forall X\varphi\|\in B_\omega$,

$$\|\forall X\varphi\|=\wedge\{\|\varphi(f\circ X)\|:f\in Y^X\}\in B_\omega. \tag{3.34}$$

给定自由变元在$\bigcup\{Y_i:i\leqslant n\}$中的任意公式 ψ 使得 $\|\psi\|\neq\mathbf{0}$ 和 B_n 的元素的聚合$\{\|\forall X_\beta\varphi_\beta\|:\beta<\gamma\}$,据 IC_γ 和类似 3.3.8 的证明中相应的论证,令 g_β是从 X_β 到 Y_{n+1}的单射使得对 $\beta\neq\alpha$,$X_\beta\cap X_\alpha=\varnothing$,则在 $\mathfrak{B}_{n+1}$中,从而在 $\mathfrak{B}_\omega$ 和 $\mathfrak{B}$ 中,有

$$\|\psi\|\wedge\bigwedge_{\beta<\gamma}\|\varphi_\beta(g_\beta\circ X_\beta)\to\forall X_\beta\varphi_\beta\|\neq\mathbf{0}.$$

假设 σ 在 $\mathbf{B}_{\omega\omega p\pi}(\mathrm{CD}_{<\kappa};\mathrm{IC}_{<\kappa})$中不可证,则 $\|\neg\sigma\|\neq\mathbf{0}$. 我们要证存在从 $\mathfrak{B}_\omega$ 到 $\mathfrak{B}_0$ 上的同态 h 使得 h 把 $\|\neg\sigma\|$ 映射到 $\mathbf{1}$ 且保持 $\mathfrak{B}_\omega$ 中下列 γ 个并和交的聚合:

(1) 对 Δ 中量化式产生的、形如(3.34)的交.

(2) 对 Δ 中合取式$\bigwedge_{\xi<\delta}\varphi_\xi$ 产生的并 $\|\bigwedge_{\xi<\delta}\varphi_\xi\|\vee\bigvee_{\xi<\delta}\|\neg\varphi_\xi\|=\mathbf{1}$.

(3) 如(3.29)和(3.30)所产生的 Term 的项的并和 Δ 的原子公式所产生的并(它们在 $\mathfrak{B}_\omega$ 中总是 $\mathbf{1}$).

注意:上述每一交和并至多有 γ 个项. 令 $\Phi=\{\varphi:h(\|\varphi\|)=\mathbf{1}\}$. 显然,$\Phi$ 包含$\neg\sigma$ 和$\{t\equiv t:t\in\mathrm{Term}\}$且满足 3.3.5(3)的①—⑥,所以 $\neg\sigma$ 是可满足的,因此$\nvDash\sigma$.

现在剩下的只是找一个满足上述条件的同态 h. 首先排列由自由变元在 Y_0 中的公式所产生的、所有形如上述(2)和(3)的并. 据代数的 γ-分配律,存在自由变元在 Y_0 中的公式 φ_0 使得 $\mathbf{0}\neq$

$\|\varphi_0\|\leqslant\|\neg\sigma\|$，且对上述聚合的每一并$\bigvee_{\beta<\gamma}\|\psi_\beta\|=1$，存在$\beta$使得$\|\varphi_0\|\leqslant\|\psi_\beta\|$．然后排列自由变元在$Y_0$中的量化式$\forall X_\beta\varphi_\beta$所产生的、形如(1)的所有交，然后对每一$\beta<\gamma$，选择单射$g_\beta:X_\beta\to Y_1$使得对$\beta\neq\alpha$，$X_\beta\cap X_\alpha=\varnothing$．令$\varphi_0'=\varphi_0\wedge\bigwedge_{\beta<\gamma}[\varphi_\beta(g_\beta\circ X_\beta)\to\forall X_\beta\varphi_\beta]$，则$\|\varphi_0'\|\neq\mathbf{0}$．然后，排列自由变元在$Y_0\cup Y_1$中的公式产生的、形如(2)和(3)的并．用$\gamma$-分配律找一个自由变元在$Y_0\cup Y_1$中的公式$\varphi_1'$使$\|\varphi_1'\|\neq\mathbf{0}$，且对上述聚合中每一并$\bigvee_{\beta<\gamma}\|\psi_\beta\|=\mathbf{1}$，存在$\beta$使得$\|\varphi_1\|\leqslant\|\psi_\beta\|\wedge\|\varphi_0'\|$．然后排列自由变元在$Y_0\cup Y_1$中的量化式$\forall X_\beta\varphi_\beta$所产生的、形如(1)的所有交．对每一$\beta<\gamma$，选择单射$g_\beta:X_\beta\to Y_2$使得对$\beta\neq\alpha$，$X_\beta\cap X_\alpha=\varnothing$．令

$$\varphi_1'=\varphi_1\wedge\bigwedge_{\beta<\gamma}[\varphi_\beta(g_\beta\circ X_\beta)\to\forall X_\beta\varphi_\beta],$$

则$\|\varphi_1'\|\neq\mathbf{0}$．施归纳继续这个过程，我们有$B_\omega$的非零元的序列$\|\varphi_0'\|\geqslant\|\varphi_1'\|\geqslant\cdots\geqslant\|\varphi_n'\|\geqslant\cdots$使得对形如(2)或(3)的每一并$\bigvee_{\beta<\gamma}\|\psi_\beta\|=\mathbf{1}$，存在$n,\beta$使得$\|\varphi_n'\|\leqslant\|\psi_\beta\|$且对形如(1)的每一交，存在$n$和$g\in Y^X$使得$\|\varphi_n'\|\leqslant\neg\|\varphi(g\circ X)\|\vee\|\forall X\varphi\|$．易见由一个包含$\{\|\varphi_n'\|:n<\omega\}$的极大理想确定的同态$h$保持(1)—(3)的所有并和交．□

练　习

3.3.14　把3.3.3和3.3.5的Y换成等幂的新个体常元集，证明这些结果仍成立．

3.3.15　对$\gamma>\omega$，证明$\mathbf{B}_{\gamma^+\omega p\pi}(\mathrm{CD}_\gamma)$是完全的．

3.3.16　对$\kappa>\omega_1$，证明$\mathbf{B}_{\kappa\omega p\pi}(\mathrm{CD}_{<\kappa})$是完全的．

3.3.17(J. Gregory [1971])　给定语言$\mathscr{L}_{\infty\omega}$，令Taut是$\mathscr{L}_{\infty\omega}$的所有重言式及其代换特例的聚合，$\Omega_I$是所有独立选择规则的聚合，证明$\mathbf{B}_{\infty\omega}(\mathrm{Taut};\Omega_I)$是完全的．

第 4 章　一致性质与完全性定理

本章引入一类特别重要的句子集的集合. 这类集合可以说是用语法性质来刻画语义性质. 我们之所以称它们为一致性质(consistency property),是因为我们能证明它们的每一元素有模型,而据 1.1.13,这也说明了它们的每一元素是一致的. 据 2.1.19,若一致性质 **S** 是相对演绎系统 **B** 构造起来的,则

*公式集 Φ 相对 **B**(语法)一致 $\Leftrightarrow$ Φ 是 **S** 中的元素.*

用一致性质来构造模型是无穷逻辑中运用得非常广泛的一种方法,它也是 Henkin-方法的一种概括. 由一致性质构造的模型存在定理,除了能得到完全性定理(*如本章所述*)之外,还能得到其它许多模型论结果,例如,内插定理、Barwise-紧致性定理等.

一致性质这个概念最早由 R. M. Smullyan 在其[1963]和[1965]中提出,他用此来解决 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$ 的一些逻辑问题. Keisler 在其[1971]讨论了一致性质与 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 的关系. 1972 年 J. Green 写了专门论述一致性质的博士论文(见其[1972]),把一致性质概括到 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$(其中 $\kappa>\omega_1$)的各种情况. Barwise 在其[1975]把一致性质概括到 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$. 他们都证明了一大批与之相关的重要成果.

在本章我们除了论述他们的结果之外,还把一致性质概括到 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$,并试图用此来证明有关 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的一些完全性定理.

为了节省篇幅,本章不再象上章一样分开讨论命题逻辑和谓词逻辑的完全性. 但是为了使读者逐渐熟悉用一致性质构造模型的方法,我们还是分别讨论由 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$, $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$, $\mathscr{L}_{\infty\omega}$ 和 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 表述的一致性质和与它们相关的演绎系统的完全性.

§1 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$-完全性定理

本节 $\varphi,\psi,\cdots$ 和 $\Phi,\Psi,\cdots$ 分别表示 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 的公式和公式集.

4.1.1 定义 任给语言 $\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}=\mathscr{L}_{\omega_1\omega}\cup C$，其中 C 是可数个新个体常元的集合，称 t 是 $\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$ 的**基本项** $\Leftrightarrow$ t 是个体常元符号或形如 $F(\vec{c}_n)$，其中 $\vec{c}_n\in C$，且 F 是 $\mathscr{L}$ 的 n 元函数符号.

4.1.2 定义 令 $\mathbf{S}$ 是 $\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$-句子集的集合，称 $\mathbf{S}$ 是($\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 相对 C 的)(ω_1,ω)-**一致性质** $\Leftrightarrow$ 对每一 $s\in\mathbf{S}$，$|s|<\omega_1$ 且下列条件皆成立：

(C1) $\varphi\in s \Leftrightarrow \neg\varphi\notin s$.

(C2) $\neg\varphi\in s \Rightarrow s\cup\{\varphi\neg\}\in\mathbf{S}$.

(C3) $\bigwedge\Phi\in s \Rightarrow \{s\cup\{\varphi\}:\varphi\in\Phi\}\subseteq\mathbf{S}$.

(C4) $\bigvee\Phi\in s \Rightarrow$ 对某个 $\varphi\in\Phi$，$s\cup\{\varphi\}\in\mathbf{S}$.

(C5) $\forall x\varphi(x)\in s \Rightarrow \{s\cup\{\varphi(x/c)\}:c\in C\}\subseteq\mathbf{S}$.

(C6) $\exists x\varphi(x)\in s \Rightarrow$ 对某个 $c\in C$，$s\cup\{\varphi(x/c)\}\in\mathbf{S}$.

(C7) 令 t 是基本项，且 $c,d\in C$，

　(1) $c\equiv d\in s \Rightarrow s\cup\{d\equiv c\}\in\mathbf{S}$.

　(2) $c\equiv t,\varphi(t)\in s \Rightarrow s\cup\{\varphi(t/c)\}\in\mathbf{S}$.

　(3) 对某个 $e\in C$，$s\cup\{e\equiv t\}\in\mathbf{S}$.

注意：若上述(C3)和(C4)中的可数合取和析取改成有穷合取和析取，则 4.1.2 的 (ω_1,ω)-一致性质就成为 Smullyan 在其[1965]提出的 (ω,ω)-一致性质. 用 (ω,ω)-一致性质可以方便地得出 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$-完全性定理和普通模型论的许多结果.

为了方便，我们引入如下记号：对任意语言 $\mathscr{L}$，任意常元集 C 和任意 $s\subseteq\mathrm{Form}(\mathscr{L}\cup C)$，我们用 $\mathrm{C}(s)$ 表示在 s 中出现的所有 $c\in C$ 的集合.

4.1.3 引理 令 $\mathbf{S}$ 是 (ω_1,ω)-一致性质，则

(1) $\mathbf{S}_1=\{s_1:s_1\subseteq s\in\mathbf{S}\}$是$(\omega_1,\omega)$-一致性质.

(2) $\mathbf{S}_2=\{s_1:s_1\subseteq s\in\mathbf{S}$ 且 $|s_1|<\omega\}$是(ω_1,ω)-一致性质.

(3) $\mathbf{S}_3=\{s\in\mathbf{S}:|C(s)|<\omega\}$是$(\omega_1,\omega)$-一致性质.

证明:(1)—(2)留读者做练习. 证(3):显然$\mathbf{S}_3\subseteq\mathbf{S}$. 任给$s\in\mathbf{S}_3$,则$s\in\mathbf{S}$且$|C(s)|<\omega$,所以据$\mathbf{S}$的性质只须证明,对任意$\sigma\in s$和任意$\varphi\in\mathrm{Sub}(\sigma)$,$|C(s\cup\{\varphi\})|<\omega$,而这是显然的. □

4.1.4 引理 令$\mathbf{S}$是(ω_1,ω)-一致性质,$s\subseteq s_1\in\mathbf{S}\Rightarrow s\in\mathbf{S}$,

(1) 若$s\in\mathbf{S}$且$\{\varphi,\varphi\to\psi\}\subseteq s$,则$s\cup\{\psi\}\in\mathbf{S}$.

(2) 若$s\in\mathbf{S}$, $c,d,e\in C$且$c\equiv d,d\equiv e\in s$,则$s\cup\{c\equiv e\}\in\mathbf{S}$.

(3) 若$s\in\mathbf{S}$且$c\in C$,则$s\cup\{c\equiv c\}\in\mathbf{S}$.

证明:证(1):设$s\in\mathbf{S}$且$\varphi,\varphi\to\psi\in s$. 因为$\varphi\to\psi$就是$\neg\varphi\vee\psi$,所以据$(\omega_1,\omega)$-一致性质的(C4),$s\cup\{\neg\varphi\}\in\mathbf{S}$或$s\cup\{\psi\}\in\mathbf{S}$. 而据(C1),第一种可能性被排除,所以$s\cup\{\psi\}\in\mathbf{S}$.

证(2):设$s\in\mathbf{S}$,$\{c,d,e\}\subseteq C$且$\{c\equiv d,d\equiv e\}\subseteq s$,据$(\omega_1,\omega)$-一致性质的(C7)(2),$s\cup\{c\equiv e\}\in\mathbf{S}$.

证(3):设$s\in\mathbf{S}$且$c\in C$,据(C7)(3),对某个$e\in s$,$s\cup\{e\equiv c\}\in\mathbf{S}$. 据(C7)的(1),$s\cup\{e\equiv c,c\equiv e\}\in\mathbf{S}$. 据上述(2),$s\cup\{e\equiv c,c\equiv e,c\equiv c\}\in\mathbf{S}$. 因为$s\subseteq s_1\in\mathbf{S}\Rightarrow s\in\mathbf{S}$,所以$s\cup\{c\equiv c\}\in\mathbf{S}$. □

4.1.5 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$-模型存在定理(M. Makkai,[1969a])

若$\mathbf{S}$是(ω_1,ω)-一致性质且$s_0\in\mathbf{S}$,则s_0有模型.

证明:据 4.1.3(1),不妨假设$\mathbf{S}$的元素的每一子集属于$\mathbf{S}$,且令Φ是$\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$的最小公式集使得下列条件同时满足:

(1) $s_0\subseteq\Phi$,

(2) Φ在子公式下封闭,

(3) $c\in C$且$\varphi(t)\in\Phi\Rightarrow\varphi(t/c)\in\Phi$,

(4) $\neg\varphi\in\Phi\Rightarrow\varphi\neg\in\Phi$,

(5) $c,d\in C\Rightarrow c\equiv d\in\Phi$.

因为s_0是可数的,所以Φ也是可数的. 令Σ是Φ中所有句子的集合:$\Sigma=\{\sigma_0,\sigma_1,\cdots\}$,令 Term$=\{t_0,t_1,\cdots\}$是$\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$的所有基本

项的集合. 我们来构造 S 的元素的下列⊆-链：

$$s_0\subseteq s_1\subseteq\cdots\subseteq s_n\subseteq\cdots.$$

$s_0\in\mathbf{S}$ 已给定. (归纳)假设我们已有 $s_n\in\mathbf{S}$,由此我们用(ω_1,ω)-一致性质的定义来构造 s_{n+1}使得：

(1) $s_n\subseteq s_{n+1}\in\mathbf{S}$,

(2) $s_n\cup\{\sigma_n\}\in\mathbf{S}\Rightarrow\sigma_n\in s_{n+1}$,

(3) $s_n\cup\{\sigma_n\}\in\mathbf{S}$ 且 $\sigma_n=\bigvee\Psi\Rightarrow$ 对某个 $\psi\in\Psi,\psi\in s_{n+1}$,

(4) $s_n\cup\{\sigma_n\}\in\mathbf{S}$ 且 $\sigma_n=\exists x\varphi(x)\Rightarrow$ 对某个 $c\in C,\varphi(x/c)\in s_{n+1}$,

(5) 对某个 $e\in C,e\equiv t_n\in s_{n+1}$.

下面我们来构造 s_0 的模型 $\mathfrak{A}$：令 $s_\omega=\bigcup\limits_{n<\omega}s_n$. 对所有 $c,d\in C$,令

$$c\sim d\Leftrightarrow c\equiv d\in s_\omega.$$

我们来证明～是 C 上的等价关系：

自返性：设 $c\in C$,据 Φ 和 Σ 的构造,$c\equiv c\in\Sigma$,因此存在 $n<\omega$,$c\equiv c$是 σ_n. 据 4.1.4(2),$s_n\cup\{\sigma_n\}\in\mathbf{S}$,所以 $\sigma_n\in s_{n+1}$,因此 $c\equiv c\in s_\omega$.

对称性：设 $c,d\in C$ 且 $c\equiv d\in s_\omega$. 因为 $d\equiv c\in\Sigma$,所以对某个 $n<\omega,d\equiv c$ 是 σ_n. 取自然数 $m\geq n$ 使得 $c\equiv d\in s_m$, 据(C7)(1),$s_m\cup\{d\equiv c\}\in\mathbf{S}$, 因为 $s_m\cup\{d\equiv c\}$的子集 $s_n\cup\{d\equiv c\}$也是 S 的元素,因此$d\equiv c\in s_{n+1}$,从而 $d\equiv c\in s_\omega$.

传递性：设 $c,d,e\in C$,且 $c\equiv d,d\equiv e\in s_\omega$. 因为 $c\equiv e\in\Sigma$,所以对某个 $n<\omega,c\equiv e$ 是 σ_n. 取自然数 $m\geq n$ 使得 $c\equiv d$, $d\equiv e\in s_m$,据 4.1.4(2),$s_m\cup\{c\equiv e\}\in\mathbf{S}$,所以 $s_n\cup\{c\equiv e\}\in\mathbf{S}$,从而 $c\equiv e\in s_{n+1}$,因此$c\equiv e\in s_\omega$.

令 $\mathbf{c}=\{d:d\sim c\},A=\{\mathbf{c}:c\in C\}$. 据(C7)(2),易证若 $c_1\sim d_1$, $\cdots,c_n\sim d_n$ 且 $\sigma(\vec{c}_n)\in s_\omega$,则 $\sigma(\vec{d}_n)\in s_\omega$,因此等价类与其代表元无关. 现在我们用下列方式解释 $\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$的个体常元、函数和关系符号,从而构造模型 $\mathfrak{A}$：

若 $d\in$ Term 是个体常元符号且 $c\in C$,则

$$d^{\mathfrak{A}}=\mathbf{c}(d\text{ 由 }\mathbf{c}\text{ 来解释})\Leftrightarrow c\equiv d\in s_\omega. \tag{4.1}$$

若 F 是 m 元函数符号且 $\vec{c}_m \in C$，则

$$F^{\mathfrak{A}}(\vec{\mathbf{c}}_m)=\mathbf{c} \Leftrightarrow F(\vec{c}_m)\equiv c \in s_\omega. \tag{4.2}$$

若 R 是 n 元函数符号且 $\vec{c}_n \in C$，则

$$\mathfrak{A} \models R(\vec{x}_n)[\vec{\mathbf{c}}_n] \Leftrightarrow R(\vec{c}_n)\in s_\omega. \tag{4.3}$$

显见等词规则(C7)保证 $\mathfrak{A}$ 是良定义的，而且

$$\varphi(t)\in s_\omega \text{ 且 } t^{\mathfrak{A}}=\mathbf{c} \Rightarrow \varphi(t/c)\in s_\omega.$$

因此(4.1)—(4.3)确定模型 $\mathfrak{A}$. 下施归纳于 σ 的复杂度来证：

$$\sigma \in s_\omega \Rightarrow \mathfrak{A}\models \sigma.$$

施归纳于项的复杂度，用(C1)和(C7)首先可以证明 s_ω 中的任意原子句或原子句的否定在 $\mathfrak{A}$ 中成立：

对 $\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$的项 t，令 $\mathbf{t}$ 是 t 在 $\mathfrak{A}$ 中的解释，设 $\sigma(\vec{t}_n)\in s_\omega$，其中 $\vec{t}_n \in \mathrm{Term}$. 若 σ 是原子句，则据(4.2)和(C7)且施归纳于项 $\vec{t}_n$ 中函数符号的个数，易证对 $i=1,\cdots,n$，若 $\mathbf{t}_i=\mathbf{c}_i$，则$\varphi(t_1/c_1,\cdots,t_n/c_n)\in s_\omega$. 据(4.1)—(4.3)，$\mathfrak{A}\models\sigma[\vec{\mathbf{t}}_n]$. 若 σ 形如$\neg\varphi(\vec{t}_n)$，其中 φ 是原子句，则$\neg\varphi(t_1/c_1,\cdots,t_n/c_n)\in s_\omega$，据(C1)，$\varphi(t_1/c_1,\cdots,t_n/c_n)\notin s_\omega$. 所以据归纳假设，$\mathfrak{A}\not\models\varphi[\vec{\mathbf{t}}_n]$，因此 $\mathfrak{A}\models\sigma[\vec{\mathbf{t}}_n]$.

最后用(C2)—(C6)且施归纳于句子的复杂度，易证 s_ω 的每一句子在 $\mathfrak{A}$ 中成立，因此 $\mathfrak{A}\models s_0$. □

说明：(Ⅰ) 在上述证明中的 $\mathfrak{A}$ 至多可数，且每一 $a\in A$ 是某个 $c\in C$ 的解释，即每一 $\mathbf{c}$ 是对 c 的解释，这样的模型也称为**典范**(canonical)**模型**.（Ⅱ）在上述证明中，只有在 σ 是原子句或原子句的否定的情况下才需要规则(C1)和(C7)，所以对稍弱一些的(ω_1,ω)-一致性质，上述模型存在定理仍成立.（Ⅲ）上述定理最早是 Makkai 在其[1969a]中给出的，更早非常接近的工作是 L. Henkin 在其[1963]，Smullyan 在其[1963]和[1965]所做的工作.

下列推论是上述模型存在定理的一个有用概括.

4.1.6 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$-扩张的模型存在定理 若 S 是$(\omega_1,\omega)$-一致性质，$\Sigma$ 是 $\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$的可数句子集. 设对所有 $s\in \mathrm{S}$ 和所有 $\sigma\in\Sigma$，$s\cup\{\sigma\}\in \mathrm{S}$，

则对所有 $s\in\mathbf{S}$，$s\cup\Sigma$ 有模型. □

证明留给读者作为练习.

4.1.7 推论 令 $\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$ 和 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 如前定义，$\mathbf{B}'_{\omega_1\omega}$ 是 $\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$ 表述的演绎系统，则

$$\mathbf{B}_{\omega_1\omega}\vdash\sigma\Leftrightarrow\mathbf{B}'_{\omega_1\omega}\vdash\sigma.\quad\square$$

证明参见 2.2.15.

4.1.8 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$-完全性引理 令 Σ 是 $\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$ 的有穷句子集且只有有穷多个 $c\in C$ 在 Σ 中出现，则

$$\Sigma \text{ 相对 } \mathbf{B}'_{\omega_1\omega} \text{ 一致} \Leftrightarrow \text{存在}(\omega_1,\omega)\text{-一致性质 } \mathbf{S} \text{ 使得 } \Sigma\in\mathbf{S}.$$

证明："$\Leftarrow$"：设 $\mathbf{S}$ 是 (ω_1,ω)-一致性质且 $\Sigma\in\mathbf{S}$，则据 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$-模型存在定理，$\bigwedge\Sigma$ 有模型，所以我们有 $\nvDash\neg\bigwedge\Sigma$，据后面的 4.4.1，$\mathbf{B}'_{\omega_1\omega}\nvdash\neg\bigwedge\Sigma$（后面我们省略 $\mathbf{B}_{\omega_1}$），因此 Σ 相对 $\mathbf{B}'_{\omega_1\omega}$ 一致.

"$\Rightarrow$"：首先证明若 $\mathbf{S}=\{s\subseteq\mathrm{Sent}(\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}):|s|<\omega,|C(s)|<\omega$ 且 s 相对 $\mathbf{B}'_{\omega_1\omega}$ 一致$\}$，则 $\mathbf{S}$ 是 (ω_1,ω)-一致性质. 令 $s\in\mathbf{S}$，我们来验证 s 满足 4.1.2 的(C1)—(C7). 为此只须证：对 $n=1,\cdots,7$，

$$\text{若 } s \text{ 不满足}(Cn)\text{，则 } s_0 \text{ 是公理集或 } s_0\subseteq s \text{ 使得} \vdash\bigwedge s\to\neg\bigwedge s_0. \tag{4.4}_n$$

因为若我们对每一 $n=1,\cdots,7$，都有$(4.4)_n$，则易得 $\vdash\neg\bigwedge s$（因为总有 $\vdash\bigwedge s\to\bigwedge s_0$），则 s 相对 $\mathbf{B}'_{\omega_1\omega}$ 不一致，而这与 $s\in\mathbf{S}$ 矛盾，所以 s 满足(Cn).

(C1)：设 $\{\varphi,\neg\varphi\}\subseteq s$，显然，$\mathbf{B}_{\omega_1}\vdash\bigwedge s\to\neg\bigwedge\{\varphi,\neg\varphi\}$.

(C2)：设 $\neg\varphi\in s$ 但 $s\cup\{\varphi\neg\}\notin\mathbf{S}$，则 $\vdash\bigwedge s\to\neg(\varphi\neg)$，据公理 2，有

$$\vdash\bigwedge s\to\neg\neg\varphi.$$

(C3)：设 $\bigwedge\Phi\in s$ 但存在 $\varphi\in\Phi$，$s\cup\{\varphi\}\notin\mathbf{S}$，则 $s\cup\{\varphi\}$ 只含有穷多个 $c\in C$. 所以据后者，$\vdash\bigwedge s\to\neg\varphi$，但因为 $\bigwedge\Phi\in s$，因此据合取公理，

$$\vdash\bigwedge s\to\neg\bigwedge\Phi.$$

(C4)：设 $\bigvee\Phi\in s$ 但对所有 $\varphi\in\Phi$，$s\cup\{\varphi\}\notin\mathbf{S}$，则对所有 $\varphi\in\Phi$，$\vdash\bigwedge s\to\neg\varphi$，据合取公理，$\vdash\bigwedge s\to\bigwedge\{\neg\varphi:\varphi\in\Phi\}$，即

$$\vdash \bigwedge s \to \neg \bigvee \Phi.$$

(C5)：假设$\forall x\varphi(x)\in s$但存在$c\in C$，$s\cup\{\varphi(x/c)\}\notin \mathbf{S}$，因为$\forall x\varphi(x)\in s$且$s$中只含有穷多个$c\in C$，所以只有有穷多个$c\in C$在$s\cup\{\varphi(x/c)\}$中出现，因此$\vdash \bigwedge s \to \neg\varphi(x/c)$，据公理4，我们有$\vdash \neg\varphi(x/c)\to\neg\forall x\varphi(x)$，因此$\vdash \bigwedge s\to\neg\forall x\varphi(x)$.

(C6)：假设$\exists x\varphi(x)\in s$但对所有$c\in C$，$s\cup\{\varphi(x/c)\}\notin\mathbf{S}$. 取一不在$s$中出现的个体常元符号$c\in C$，则$\vdash \bigwedge s\to\neg\varphi(x/c)$，令$y$是不在$s$中出现的变元，用$y$去置换上述形式证明序列中的$c$，根据2.2.15，易证$\vdash \bigwedge s\to\neg\varphi((x/c)/y)$，再据概括规则和2.2.14，有$\vdash \bigwedge s\to\forall x\neg\varphi(x)$. 因此据公理2，$\vdash \bigwedge s\to\neg\exists x\varphi(x)$.

(C7)：令t是基本项，$c,d\in C$，

(1) 假设$c\equiv d\in s$但$s\cup\{d\equiv c\}\notin\mathbf{S}$. 则$\vdash \bigwedge s\to\neg(d\equiv c)$，据公理6的(1)，$\vdash \bigwedge s\to\neg(c\equiv d)$.

(2) 假设$c\equiv t,\varphi(t)\in s$但$s\cup\{\varphi(t/c)\}\notin\mathbf{S}$. 则我们有$\vdash \bigwedge s\to\neg\varphi(t/c)$，据公理6(2)，$\vdash \bigwedge s\to\neg[c\equiv t\wedge\varphi(t)]$.

(3) 假设e是不在s,t中出现的常元且设$s\cup\{e\equiv t\}\notin\mathbf{S}$. 则$\vdash \bigwedge s\to\neg(e\equiv t)$. 用不在$s$中出现的变元$y$去置换上述形式证明中的$e$，有$\vdash \bigwedge s\to\neg(y\equiv t)$，据概括规则，$\vdash \bigwedge s\to\forall y\neg(y\equiv t)$，据公理4，$\vdash \bigwedge s\to\neg(t\equiv t)$，而$t\equiv t$是公理5.

综上所述，若Σ相对$\mathbf{B}'_{\omega_1\omega}$一致，则存在$(\omega_1,\omega)$-一致性质$\mathbf{S}$使得$\Sigma\in\mathbf{S}$. □

4.1.9 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$-完全性定理(Karp，[1964]) 若$\sigma$是句子，则

$$\mathbf{B}_{\omega_1\omega}\vdash\sigma \Leftrightarrow \models\sigma.$$

证明："⇒"：据4.4.1. "⇐"：设$\mathbf{B}_{\omega_1\omega}\nvdash\sigma$，据4.1.7，$\mathbf{B}'_{\omega_1\omega}\nvdash\sigma$. 因为$\{\neg\sigma\}$是$\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$的有穷句子集且其中出现的常元$c\in C$只有有穷多个，所以据4.1.8，$\{\neg\sigma\}$是某个$(\omega_1,\omega)$-一致性质的元素，据模型存在定理，$\{\neg\sigma\}$是可满足的，所以$\nvDash\sigma$. □

练 习

4.1.10 证明下列每一集合是(ω_1,ω)-一致性质，其中$\mathscr{P}_{\omega_1}(\mathrm{Sent}(\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}))$表示$\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$的所有可数句子集的集合：

(1) $\{s\in\mathscr{P}_{\omega_1}(\mathrm{Sent}(\mathscr{L}'_{\omega_1\omega})):s$ 有模型 $\mathfrak{A}$ 使得 $A=\{a_c:c\in C\}\}$.

(2) $\{s\in\mathscr{P}_{\omega_1}(\mathrm{Sent}(\mathscr{L}'_{\omega_1\omega})):s$ 有模型且 $|\mathrm{C}(s)|<\omega\}$.

(3) 任给非空模型类 $\mathscr{M}$，

$\{s\in\mathscr{P}_{\omega_1}(\mathrm{Sent}(\mathscr{L}'_{\omega_1\omega})):s$ 有 $\mathscr{M}$ 中的模型且 $|\mathrm{C}(s)|<\omega\}$.

(4) $\{s\in\mathscr{P}_{\omega_1}(\mathrm{Sent}(\mathscr{L}'_{\omega_1\omega})):s$ 有任意大幂的模型且 $|\mathrm{C}(s)|<\omega\}$.

4.1.11（(ω_1,ω)-一致性质的另一种定义） 令 $\mathscr{X}$ 是拓扑空间. 称 f 是$\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$**的拓扑解释** $\Leftrightarrow$ f 是从 $\mathrm{Sent}(\mathscr{L}'_{\omega_1\omega})$到 $\mathscr{X}$ 的所有开集的集合中的映射使得：

(T1) $f(\sigma)\cap f(\neg\sigma)=\varnothing$,

(T2) $f(\neg\sigma)\subseteq\overline{f(\sigma\neg)}$,

(T3) $f(\bigwedge\Sigma)\subseteq\bigcap\{\overline{f(\sigma)}:\sigma\in\Sigma\}$,

(T4) $f(\bigvee\Sigma)\subseteq\bigcup\{\overline{f(\sigma)}:\sigma\in\Sigma\}$,

(T5) $f(\forall x\varphi(x))\subseteq\bigcap\{\overline{f(\varphi(x/c))}:c\in C\}$,

(T6) $f(\exists x\varphi(x))\subseteq\bigcup\{\overline{f(\varphi(x/c))}:c\in C\}$,

(T7) 令 t 是基本项，$c,d\in C$，则

(1) $f(c\equiv d)\subseteq\overline{f(d\equiv c)}$,

(2) $f(c\equiv t)\cap f(\varphi(t))\subseteq\overline{f(\varphi(t/c))}$,

(3) $\bigcup\{\overline{f(e\equiv t)}:e\in C\}=\mathscr{X}$.

(1) 令 f 是 $\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$的拓扑解释，令 $\mathbf{S}(f)$是下列集合：

$\{s\subseteq\mathrm{Sent}(\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}):|s|\leqslant\omega$ 且 $\bigcap\{f(\sigma):\sigma\in s\}\neq\varnothing\}$.

证明 $\mathbf{S}(f)$是(ω_1,ω)-一致性质.

(2) 令 $\mathbf{S}$ 是(ω_1,ω)-一致性质，$\mathscr{X}$ 是拓扑空间，其中 $\mathbf{S}$ 是 $\mathscr{X}$ 的所有点的集合. 假设 $f_{\mathbf{S}}$ 是函数 $f_{\mathbf{S}}(\sigma)=\{s\in\mathbf{S}:\sigma\in s\}$. 证明 $f_{\mathbf{S}}$ 是$\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$的拓扑解释.

(3) 若 $\mathbf{S}$ 是(ω_1,ω)-一致性质，则 $\mathbf{S}(f_{\mathbf{S}})$是$(\omega_1,\omega)$-一致性质：

$$\mathbf{S}(f_{\mathbf{S}})=\{s_1: \text{对某个 } s\in\mathbf{S}, s_1\subseteq s\}.$$

4.1.12 证明 4.1.6.

4.1.13($\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$-无等词的模型存在定理) 设 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$没有函数和个体常元符号，$\mathbf{S}$ 是$\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$的可数句子集的集合且满足 4.1.2 所定义的$(\omega_1,\omega)$-一致性质的(C1)—(C6). 证明若 $\mathbf{S}$ 的每一元素都不出现等词符号，则 $\mathbf{S}$ 的每一元素有模型.

4.1.14 定义命题语言 $\mathscr{L}_{\omega_1}$的 ω_1-一致性质且用此证明 $\mathbf{B}_{\omega_1}$-完全性定理.

§2 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$-完全性定理

本节 $\varphi,\psi,\sigma,\cdots$和 $\Phi,\Psi,\Sigma,\cdots$分别表示 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$的公式和公式集.

由于§1 的结果，我们在本节假设 $\kappa>\omega_1$，除非另加说明. 本节考虑的语言 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$有下列限制：关系符号和函数符号都是有穷元的. 若 κ 是后继基数，则假设 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$有$<\kappa$ 个符号；若 κ 是极限基数，则我们假设 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$至多有 κ 个符号. 本节固定 $\mathscr{L}'_{\kappa\omega}=\mathscr{L}_{\kappa\omega}\cup C$，其中 C 是基数为 κ 的新个体常元集. 当 κ 是共尾度为 ω 的奇异基数时，即在 $\mathrm{cf}(C)=\omega$ 的情况下，我们能把 C 写作更小的集合的并：$C=\bigcup\limits_{n<\omega}C_n$.

称 t 是 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$相对个体常元集 C 的**基本项** $\Leftrightarrow$ t 是 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$的个体常元符号或 t 形如 $F(\vec{c}_n)$，其中 F 是 n 元函数符号且 $\vec{c}_n\in C$.

4.2.1 定义 1. 令 κ 是正则基数，$\mathbf{S}$ 是 $\mathscr{L}'_{\kappa\omega}$的句子集的集合，称 $\mathbf{S}$ 是(在 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$中相对 C 的)(κ,ω)-**一致性质** $\Leftrightarrow$ 对每一 $s\in\mathbf{S}$，$|s|<\kappa$ 且下列条件皆成立：

(C1) $\varphi\in s \Leftrightarrow \neg\varphi\notin s$.

(C2) $\{\neg\varphi:\varphi\in\Phi\}\subseteq s \Rightarrow s\cup\{\varphi\neg:\varphi\in\Phi\}\in\mathbf{S}$.

(C3) $\{\bigwedge\Phi_i:i\in I\}\subseteq s \Rightarrow s\cup\bigcup\{\Phi_i:i\in I\}\in\mathbf{S}$.

(C4) $\{\bigvee\Phi_i : i\in I\}\subseteq s \Rightarrow$ 存在 $f\in\prod_{i\in I}\Phi_i, s\cup\{f(i) : i\in I\}\in\mathbf{S}$.

(C5) 若$\{\forall x_i\varphi_i(x_i) : i\in I\}\subseteq s$ 且 $C_1\subseteq C, |C_1|<\kappa$,则

$$s\cup\{\varphi_i(x_i/c) : c\in C_1,\ i\in I\}\in\mathbf{S}.$$

(C6) 若$\{\exists x_i\varphi_i(x_i) : i\in I\}\subseteq s$,则对某个$\{c_i : i\in I\}\subseteq C$,

$$s\cup\{\varphi_i(x_i/c_i) : i\in I\}\in\mathbf{S}.$$

(C7) 假设 $|I|<\kappa$,令$\{t_i : i\in I\}$是 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$相对 C 的基本项集,$\{c_i, d_i : i\in I\}\subseteq C$,

(1) 若$\{c_i\equiv d_i : i\in I\}\subseteq s$,则 $s\cup\{d_i\equiv c_i : i\in I\}\in\mathbf{S}$.

(2) 若$\{\varphi_i(t_i),\ c_i\equiv t_i : i\in I\}\subseteq s$,则 $s\cup\{\varphi_i(t_i/c_i) : i\in I\}\in\mathbf{S}$.

(3) 对某个$\{e_i : i\in I\}\subseteq C, s\cup\{e_i\equiv t_i : i\in I\}\in\mathbf{S}$.

2. 令 κ 是共尾度为 ω 的奇异基数(即 $\kappa=\bigcup_{n<\omega}\kappa_n$,且每一 $\kappa_n<\kappa$);$C=\bigcup_{n<\omega}C_n$,且对每一 $n<\omega$, $|C_n|=\kappa_n$. 令 $\mathbf{S}$ 是 $\mathscr{L}^{\,\prime}_{\kappa\omega}$的句子集的集合,称 $\mathbf{S}$ 是(在 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$中相对 C 的)(κ,ω)-**一致性质** $\Leftrightarrow$ 对每一 $s\in\mathbf{S}$, $|s|<\kappa$,在 s 中出现的所有 $c\in C$ 属于某个 C_n 且下列条件皆成立:

(C1)—(C2)的表述同上述(C1)—(C2).

(C3) $\{\bigwedge\Phi_i : i\in I\}\subseteq s$ 且存在 $n<\omega$ 使得对所有 $i\in I$, $|\Phi_i|\leqslant\kappa_n$

$$\Rightarrow s\cup\bigcup\{\Phi_i : i\in I\}\in\mathbf{S}.$$

(C4) $\{\bigvee\Phi_i : i\in I\}\subseteq s$ 且存在 $n<\omega$ 使得对所有 $i\in I$, $|\Phi_i|\leqslant\kappa_n$

$$\Rightarrow \text{对某个 } f\in\prod_{i\in I}\Phi_i, s\cup\{f(i) : i\in I\}\in\mathbf{S}.$$

(C5) 若$\{\forall x_i\varphi_i(x_i) : i\in I\}\subseteq s$ 且 $n<\omega$,则

$$s\cup\{\varphi_i(x_i/c) : i\in I, c\in C_n\}\in\mathbf{S}.$$

(C6) 若$\{\exists x_i\varphi_i(x_i) : i\in I\}\subseteq s$,则存在 $n<\omega$ 和 $\{c_i : i\in I\}\subseteq C_n$ 使

$$s\cup\{\varphi_i(x_i/c_i) : i\in I\}\in\mathbf{S}.$$

(C7) 假设 $n<\omega$, 令$\{t_i : i\in I\}$是 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$相对 C_n 的基本项集,$\{c_i, d_i : i\in I\}\subseteq C_n$,

(1) 若$\{c_i\equiv d_i : i\in I\}\subseteq s$,则 $s\cup\{d_i\equiv c_i : i\in I\}\in\mathbf{S}$.

(2) 若$\{\varphi_i(t_i), c_i \equiv t_i : i \in I\} \subseteq s$，则 $s \cup \{\varphi_i(t_i/c_i) : i \in I\} \in \mathbf{S}$.

(3) 若$|I| < \kappa$，则对某个 $m < \omega$ 和某个$\{e_i : i \in I\} \subseteq C_m$，

$$s \cup \{e_i \equiv t_i : i \in I\} \in \mathbf{S}.$$

4.2.2 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$-模型存在定理(Green,[1972]) 若 $\mathbf{S}$ 是(κ,ω)-一致性质且 $s_0 \in \mathbf{S}$，则 s_0 有模型.

证明：从 s_0 出发，我们来构造 $\mathbf{S}$ 的元素的下列可数$\subseteq$-链：

$$s_0 \subseteq s_1 \subseteq \cdots \subseteq s_n \subseteq \cdots.$$

这个构造与 4.1.5 证明中的那个构造相比在本质上相同但在形式上有所不同，这是因为对(ω_1,ω)-一致性质，我们可以可数地排列所有在这个构造中所需的公式，而对(κ,ω)-一致性质的情况却不同. 但是，一旦我们对后者构造了这样的序列，剩下构造模型的过程就类似前者.

情况 1 κ 是正则基数：$s_0 \in \mathbf{S}$ 已给定. 假设我们已有 $s_n \in \mathbf{S}$，且令 C_n 是 C 在 s_n 中出现的常元集，Term_n 是在 $\mathscr{L}'_{\kappa\omega}$中相对 C 的、在 s_n 中出现的基本项集. 因为 κ 是正则基数，所以对每一 $n < \omega$，Term_n 和 C_n 的基数都小于 κ. 构造 $s_{n+1} = s_n^8$，其中 s_n^1—s_n^8 据(κ,ω)-一致性质的(C2)—(C7)分别构造如下：

$s_n^1 = s_n \cup \{\varphi\neg\!\!\rightarrow : \neg\!\!\rightarrow\varphi \in s_n\}$，

$s_n^2 = s_n^1 \cup \bigcup\{\Phi : \bigwedge \Phi \in s_n\}$，

$s_n^3 = s_n^2 \cup \{f(\Phi) : \bigvee \Phi \in s_n\}$，对一恰当的 $f \in \prod\{\Phi : \bigvee \Phi \in s_n\}$，

$s_n^4 = s_n^3 \cup \{\varphi(x_\varphi/c) : \forall x_\varphi\, \varphi(x_\varphi) \in s_n, c \in C_n\}$，

$s_n^5 = s_n^4 \cup \{\varphi(x_\varphi/c_\varphi) : \exists x_\varphi\, \varphi(x_\varphi) \in s_n\}$，

对一恰当的$\{c_\varphi : \exists x_\varphi\, \varphi(x_\varphi) \in s_n\} \subseteq C$，

$s_n^6 = s_n^5 \cup \{d \equiv c : c \equiv d \in s_n;\ c, d \in C_n\}$，

$s_n^7 = s_n^6 \cup \{\varphi(t/c) : \{\varphi(t), c \equiv t\} \subseteq s_n;\ c \in C_n;\ t \in \mathrm{Term}_n\}$，

$s_n^8 = s_n^7 \cup \{e_t \equiv t : t \in \mathrm{Term}_n\}$，对一恰当的$\{e_t : t \in \mathrm{Term}_n\} \subseteq C$.

下面构造模型的方法与 4.1.5 证明中相应部分大同小异：令 $s_\omega = \bigcup_{n<\omega} s_n$，$C_\omega = \bigcup_{n<\omega} C_n$. 对 $c, d \in C_\omega$，$c \sim d \Leftrightarrow c \equiv d \in s_\omega$. 我们来证明$\sim$

是 C_ω 上的等价关系．自返性：设 $c \in C_\omega$，则存在某个 $n<\omega$ 使得 $c \in C_n$，因为 $C_n \subseteq \text{Term}_n$，所以据 s_n^8 的构造，存在 $e_c \in C$ 使得 $e_c \equiv c \in s_n^8 = s_{n+1}$，因此 $\{c \equiv e_c, e_c \equiv c\} \subseteq s_{n+2}^6$，从而 $c \equiv c \in s_{n+2}^7$．对称性：设 $c, d \in C$ 且 $c \equiv d \in s_\omega$，则存在某个 $n<\omega$ 使得 $c \equiv d \in s_n = s_{n-1}^8$，因此 $d \equiv c \in s_n^6$．传递性：设 $c, d, e \in C_\omega$，且 $c \equiv d, d \equiv e \in s_\omega$，则存在某个 $n<\omega$ 使得 $c \equiv d, d \equiv e \in s_n$，所以 $c \equiv e \in s_n^7$．

对 $c \in C_\omega$，令 $\mathbf{c} = \{d : d \sim c\}$，令 $A = \{\mathbf{c} : c \in C\}$．我们用下列方式解释 $\mathscr{L}'_\omega$ 的关系、个体常元和函数符号，从而构造模型 $\mathfrak{A}$．固定 C_ω 中一元素 e(这是为了使个体常元总有解释，函数符号能得到封闭)．令 d 是任意个体常元，若 $d \in \bigcup_{n<\omega} \text{Term}_n$，则用任意 $\mathbf{c}$ 使得 $c \equiv d \in s_\omega$ 来解释 d；若 $d \notin \bigcup_{n<\omega} \text{Term}_n$，则用 $\mathbf{e}$ 来解释 d．令 F 是任意 m 元函数符号，若 $F(\vec{c}_m) \in \bigcup_{n<\omega} \text{Term}_n$，则定义 $F^{\mathfrak{A}}(\vec{\mathbf{c}}_m) = \mathbf{c} \Leftrightarrow F(\vec{c}_m) \equiv c \in s_\omega$．若 $F(\vec{c}_m) \notin \bigcup_{n<\omega} \text{Term}_n$，则定义 $F^{\mathfrak{A}}(\vec{\mathbf{c}}_m) = \mathbf{e}$．令 R 是任意 n 元函数符号且 $\vec{c}_n \in C$，令 $\mathfrak{A} \models R(\vec{x}_n)[\vec{\mathbf{c}}_n] \Leftrightarrow R(\vec{c}_n) \in s_\omega$．

若 $\sigma(\vec{c}_n)$ 是 s_ω 中的原子句且 $c_1 \sim d_1, \cdots, c_n \sim d_n$，则据 s_n^7 的构造，$\sigma(\vec{d}_n) \in s_\omega$，因此等词(据 s_n^6)、个体常元、函数和关系符号都是良定义的．下面我们来证明：$\sigma \in s_\omega \Rightarrow \mathfrak{A} \models \sigma$．

令 $\sigma \in s_\omega$，则存在 $n<\omega$，$\sigma \in s_n$．对 $\mathscr{L}'_\omega$ 的项 t，令 $\mathbf{t}$ 是 t 在 $\mathfrak{A}$ 中的解释，设 $\sigma(\vec{t}_n)$ 是原子句，其中 $\vec{t}_n \in \text{Term}_n$．施归纳于项 $\vec{t}_n$ 中出现的函数符号的个数，易证对 $i=1,2,\cdots,n$，若 $\mathbf{t}_i = \mathbf{c}_i$，则 $\varphi(t_1/c_1, \cdots, t_n/c_n) \in s_\omega$．因此 $\mathfrak{A} \models \sigma[\vec{\mathbf{t}}_n]$．若 σ 形如 $\neg\varphi(\vec{t}_n)$，其中 φ 是原子句，则 $\neg\varphi(t_1/c_1, \cdots, t_n/c_n) \in s_\omega$，据(C1)，$\varphi(t_1/c_1, \cdots, t_n/c_n) \notin s_\omega$．所以据归纳假设，$\mathfrak{A} \not\models \varphi[\vec{\mathbf{t}}_n]$，因此 $\mathfrak{A} \models \sigma[\vec{\mathbf{t}}_n]$．

若 $\sigma = \neg\varphi$，因为 $\sigma \in s_n$，所以据 s_{n+1} 的构造，$\varphi \neg \in s_{n+1}$．下面我们施归纳于 φ 的复杂度来证明 $\mathfrak{A} \models \neg\varphi$．

(1) 设 $\varphi = \neg\psi$，因为 $\varphi \neg \in s_{n+1}$，所以 $\psi \in s_{n+1}$，据归纳假设，$\mathfrak{A} \models \psi$，因此

$$\mathfrak{A} \models \neg\neg\psi.$$

(2) 设 $\varphi=\bigwedge\Phi$，因为 $\varphi\neg\in s_{n+1}$，所以 $\bigvee\{\neg\psi:\psi\in\Phi\}\in s_{n+1}$，因此对某个 $\psi\in\Phi$，$\neg\psi\in s_{n+2}$. 据归纳假设，对某个 $\psi\in\Phi$，$\mathfrak{A}\models\neg\psi$，因此

$$\mathfrak{A}\models\neg\bigwedge\Phi.$$

(3) 设 $\varphi=\bigvee\Phi$，因为 $\varphi\neg\in s_{n+1}$，所以 $\bigwedge\{\neg\psi:\psi\in\Phi\}\in s_{n+1}$，因此对所有 $\psi\in\Phi$，$\neg\psi\in s_{n+2}$. 据归纳假设，对所有 $\psi\in\Phi$，$\mathfrak{A}\models\neg\psi$，因此

$$\mathfrak{A}\models\neg\bigvee\Phi.$$

(4) 设 $\varphi=\forall x\psi(x)$，因为 $\varphi\neg\in s_{n+1}$，所以$\exists x\neg\psi(x)\in s_{n+1}$，因此对某个 $c\in C$，$\neg\psi(x/c)\in s_{n+2}$. 据归纳假设，对某个 $c\in C$，$\mathfrak{A}\models\neg\psi(x/c)$，因此

$$\mathfrak{A}\models\neg\forall x\psi(x).$$

(5) 设 $\varphi=\exists x\psi(x)$，因为 $\varphi\neg\in s_{n+1}$，所以$\forall x\neg\psi(x)\in s_{n+1}$，因此对所有 $c\in C_\omega$，$\neg\psi(x/c)\in s_\omega$. 据归纳假设，对所有 $c\in C_\omega$，$\mathfrak{A}\models\neg\psi(x/c)$. 但若 $\mathfrak{A}\not\models\neg\exists x\psi$，则对某个 $c\in C_\omega$，$\mathfrak{A}\models\psi(x/c)$，矛盾.

剩下的 4 种子情况（$\wedge$，$\vee$，$\forall$，$\exists$）的证明如同上述(2)—(5).

情况 2　κ 是共尾度为 ω 的奇异基数：令 F^m 是在 s_0 中出现的 m 元函数符号的集合，B 是在 s_0 中出现的 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$的个体常元集. 因为 F^m 和 B 的基数可以是 κ，所以我们可以把它们写作可数并 $\mathrm{F}^m=\bigcup_{n<\omega}\mathrm{F}^m_n$，$B=\bigcup_{n<\omega}B_n$，使得 $|\mathrm{F}^m_n|\leqslant\kappa_n$ 且 $|B_n|\leqslant\kappa_n$，其中 $\kappa=\bigcup_{n<\omega}\kappa_n$.

对每一 $n<\omega$，令

$$\mathrm{Term}_n=C_n\cup B_n\cup\{F(\vec{c}_m):F\in\mathrm{F}^m_n,\vec{c}_m\in C_n,m<\omega\}.$$

显然，$|\mathrm{Term}_n|<\kappa$. 现在令 $s_{n+1}=s_n^8$，其中 s_n^1—s_n^8 如情况 1，除了我们只考虑 s_n 中的合取 $\bigwedge\Sigma$ 和 $\bigvee\Sigma$ 使得 $|\Sigma|<\kappa_n$. 如同情况 1 那样构造 s_0 的模型 $\mathfrak{A}$. 其余的证明皆相似. □

说明：（Ⅰ）上述证明所使用的方法本质上还是 Henkin 的个体常元构造方法，Henkin 在 1949 年首先用此证明 Gödel-完全性定理.（Ⅱ）上述情况 1 构造的模型的基数$<\kappa$，且个体域中每一元素是对某个 $c\in C$ 的解释；情况 2 构造的模型的基数至多为 κ.

现在我们暂时离开本节主题，来考虑由(κ,ω)-一致性质和 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$模型存在定理得到的一些直接推论，它们对后面有关章节很

有用. 首先考虑 4.2.2 的一个很重要的推论，为此先证一引理：

4.2.3 引理 下列集合是(κ,ω)-一致性质：

$$\mathbf{S}=\{s\subseteq \mathrm{Sent}(\mathscr{L}'_{\kappa\omega}):|s|<\kappa \text{ 且 } s \text{ 有模型}\}.$$

证明：应该逐一验证 **S** 满足 4.2.1(1)和(2)所规定的(C1)—(C7)，但这是例行公事，所以我们在此只验证 κ 是正则基数时的(C5)和(C7)(3)作为举例，其它情况留给读者做练习.

(C5)：对任意 $s\in \mathbf{S}$，假设 $\{\forall x_i\varphi_i(x_i):i\in I\}\subseteq s$，$C_1\subseteq C$，$|C_1|<\kappa$，$|s|<\kappa$ 且 s 有模型 $\mathfrak{A}$. 则对 $\{\forall x_i\varphi_i(x_i):i\in I\}$ 的每一公式 $\forall x_i\varphi_i(x_i)$，有 $\mathfrak{A}\models\forall x_i\varphi_i(x_i)$，所以对所有 $a\in A$，$\mathfrak{A}\models\varphi_i(x_i)[a]$. 因为 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathscr{L}'_{\kappa\omega}$-结构，所以对每一 $c\in C_1$，存在 $a_c\in A$ 使得 $c^{\mathfrak{A}}=a_c$，因此对所有 $c\in C_1$，$\mathfrak{A}\models\varphi_i(x_i)[a_c]$，而这就意味着 $\mathfrak{A}\models\varphi_i(x_i/c)$，所以 $\varphi_i(x_i/c)\in s$，从而 $s\cup\{\varphi_i(x_i/c):c\in C_1,i\in I\}\in\mathbf{S}$.

(C7)(3)：设 $|I|<\kappa$ 且 $\{t_i:i\in I\}$ 是 $\mathscr{L}'_{\kappa\omega}$的基本项集. 对任意 $t_i\in\{t_i:i\in I\}$，若 t_i 是个体常元则显然. 若 t_i 是 $F_i(\vec{c}_m)$，因为函数对 A 封闭，故存在 $a_{e_i}\in A$ 使 $\mathfrak{A}\models F_i(\vec{c}_m)\equiv e_i$，因此 $F_i(\vec{c}_m)\equiv e_i\in s$，从而

$$s\cup\{e_i\equiv t_i:i\in I\}\in\mathbf{S}.\ \square$$

4.2.4 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$-向下-Löwenheim-Skolem-定理 设 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$-句子 σ 有模型 $\mathfrak{A}$，则 σ 有下列基数的模型 $\mathfrak{B}$：

(1) 若 κ 是正则基数且 $\kappa>\omega$，则 $|B|<\kappa$.

(2) 若 $\mathrm{cf}(\kappa)=\omega$，则 $|B|\leqslant\kappa$.

(3) 若 $\kappa=\lambda^+$ 且 $\mathrm{cf}(\lambda)=\omega$，则 $|B|\leqslant\lambda$.

证明：若 $\mathfrak{A}\models\sigma$，则据 4.2.3，$\{\sigma\}$是某个$(\kappa,\omega)$-一致性质的元素，相对(1)—(2)的条件，据 4.2.2 得到的模型 $\mathfrak{B}$ 就有我们希望的基数. 相对(3)的条件，据 1.2.15，存在 $\mathscr{L}_{\lambda\omega}$的句子 $\bar{\sigma}$ 使得 $\bar{\sigma}$ 逻辑等价 σ 且 $\bar{\sigma}$ 有基数$\leqslant\lambda$ 的模型 $\mathfrak{B}$. $\square$

说明：关于向下-Löwenheim-Skolem-定理的更一般全面的讨论请见后面的第 11 章 § 1.

4.2.5 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$-无等词的模型存在定理 假设 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$没有函数和个

体常元符号，S 是 $\mathscr{L}'_{\infty\omega}$的句子集 s 的集合使得 $|s|<\kappa$，等词符号不在 s 中出现且 S 满足 4.2.1 的(C1)—(C6). 若 $s_0\in \mathbf{S}$ 中不出现等词符号，则 s_0 有模型.

证明：令 $\kappa=\omega_1$，如 4.1.5 的证明那样构造序列 $s_n\in\mathbf{S}$，但只排列 Σ 中不出现≡的句子，且不把形如 $c\equiv t_n$ 的句子放入 s_{n+1}；令 $\kappa>\omega_1$，如 4.2.2 的证明那样构造序列 $s_n\in\mathbf{S}$，但只令 $s_{n+1}=s_n^5$.

为了构造 $\mathscr{L}'_{\infty\omega}$的模型，我们只需定义对 C 的常元和 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$的关系符号的解释. 选择 $e\in C-C_\omega$，令我们要定义的模型的个体域 $A=C_\omega\cup\{e\}$. 对每一 $c\in C-C_\omega$，我们用 e 来解释；对 $c\in C_\omega$，就用 c 自身来解释. 对任意 $\vec{a}_n\in A$ 和 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$的任意 n 元关系符号 R，令

$$\mathfrak{A}\models R[\vec{a}_n]\Leftrightarrow R(\vec{a}_n)\in s_\omega.$$

显然，要证明 R 是良定义的，只需验证当某个 $a_i(i=1,\cdots,n)$ 是 e 的情况. 但这时 a_i 不在 s_ω 中出现，所以 $R(\vec{a}_n)\notin s_\omega$. 若此外我们还有 $d\in C-C_\omega$，则因为 d 不在 s_ω 中出现，所以 $R(a_1,\cdots,a_i/d,\cdots,a_n)\notin s_\omega$. 因此这样构造的模型是良定义的. 象 4.1.5 和 4.2.2 那样，易证：

$$\sigma\in s_\omega\Rightarrow\mathfrak{A}\models\sigma.\ \Box$$

注意：如上构造的模型的个体域是 C 的子集而不是 C 的元素的等价类的集合.

若对 4.2.1 的(κ,ω)-一致性质稍加修改，我们就有如下定义的$(\kappa,\omega)_\omega$-一致性质和$(\kappa,\omega)_\omega$-模型存在定理. 为此我们还要增加一可数常元集给语言 $\mathscr{L}'_{\infty\omega}$，并且改善封闭条件：

允许一次处理有穷多个这样的常元.

4.2.6 定义 令 D 是不在 $\mathscr{L}_{\infty\omega}\cup C$ 中出现的可数常元集，令 $\mathscr{L}''_{\infty\omega}=\mathscr{L}_{\infty\omega}\cup C\cup D$.

1. 假设 κ 是无穷正则基数，$\kappa>\omega_1$ 且 S 是 $\mathscr{L}''_{\infty\omega}$的句子集的集合. 称 S 是(相对 C 和 D 的)$(\kappa,\omega)_\omega$-**一致性质** ⇔ 对每一 $s\in\mathbf{S}$，$|s|<\kappa$ 且下列条件皆成立：

(C1) $\varphi\in s\Leftrightarrow\neg\varphi\notin s$.

(C2) 若$\{\neg\varphi:\varphi\in\Phi\}\subseteq s$且有穷个$d\in D$出现在$\Phi$中，则

$$s\cup\{\varphi\neg:\varphi\in\Phi\}\in\mathbf{S}.$$

(C3) $\{\bigwedge\Phi_i:i\in I\}\subseteq s$且有穷个$d\in D$出现于$\bigcup\{\Phi_i:i\in I\}$

$$\Rightarrow s\cup\bigcup\{\Phi_i:i\in I\}\in\mathbf{S}.$$

(C4) $\{\bigvee\Phi_i:i\in I\}\subseteq s$且有穷个$d\in D$出现于$\bigcup\{\Phi_i:i\in I\}$

$$\Rightarrow \text{存在 } f\in\prod_{i\in I}\Phi_i, s\cup\{f(i):i\in I\}\in\mathbf{S}.$$

(C5) 若$\{\forall x_i\varphi_i(x_i):i\in I\}\subseteq s$，且有穷多个$d\in D$出现在$\{\varphi_i(x_i):i\in I\}$中且$C_1\subseteq C$，$|C_1|<\kappa$，则

$$s\cup\{\varphi_i(x_i/c):c\in C_1,i\in I\}\in\mathbf{S}.$$

(C6) 若$\{\exists x_i\varphi_i(x_i):i\in I\}\subseteq s$且有穷多个$d\in D$出现在$\{\varphi_i(x_i):i\in I\}$中，则对某个$\{c_i:i\in I\}\subseteq C$，$s\cup\{\varphi_i(x_i/c_i):i\in I\}\in\mathbf{S}$.

(C7) 令$|I|<\kappa$，$\{t_i:i\in I\}$是$\mathscr{L}''_{\infty}$相对C的基本项集使得只有穷多个$d\in D$在其中出现，$\{c_i,d_i:i\in I\}\subseteq C$，

(1) 若$\{c_i\equiv d_i:i\in I\}\subseteq s$，则$s\cup\{d_i\equiv c_i:i\in I\}\in\mathbf{S}$.

(2) 若$\{\varphi_i(t_i),c_i\equiv t_i:i\in I\}\subseteq s$且对每一$i\in I$，$\varphi_i(t_i)$中只有穷多个$d\in D$在其中出现，则$s\cup\{\varphi_i(t_i/c_i):i\in I\}\in\mathbf{S}$.

(3) 对某个$\{e_i:i\in I\}\subseteq C$，$s\cup\{e_i\equiv t_i:i\in I\}\in\mathbf{S}$.

2. 令κ是共尾度为ω的奇异基数，$\mathbf{S}$是$\mathscr{L}''_{\infty}$的句子集的集合，称$\mathbf{S}$是(在$\mathscr{L}_{\infty}$中相对C和D的)$(\kappa,\omega)_{\omega}$-**一致性质** $\Leftrightarrow$ 对每一$s\in\mathbf{S}$，$|s|<\kappa$，在s中出现的所有$c\in C$属于某个C_n且4.2.1的2. 的(C1)—(C7)皆成立，除了作如下修正：

(C2) 只有有穷多个$d\in D$在Φ中出现.

(C3)—(C4) 只有有穷多个$d\in D$在$\bigcup\{\Phi_i:i\in I\}$中出现.

(C5)—(C6) 只有有穷多个$d\in D$在$\{\varphi_i(x_i):i\in I\}$中出现.

(C7) 只有有穷多个$d\in D$在$\{t_i:i\in I\}$和$\{\varphi_i(t_i),c_i\equiv t_i:i\in I\}$中出现.

通过稍加修改4.2.2的证明，我们有下列定理.

4.2.7 适于$(\kappa,\omega)_\omega$-一致性质的模型存在定理(Green,[1972])
假设S是$(\kappa,\omega)_\omega$-一致性质且$s_0\in$ S使得s_0中的每一句子中只含有穷多个$d\in D$,则s_0有模型.

证明:情况1 κ是无穷正则基数:如4.2.2的证明那样构造序列$s_n\in$ S. 把D写作$\{d_n:n<\omega\}$. 对每一$n<\omega$,令$s_n'=\{\sigma\in s_n$:至多有$d_1,\cdots,d_n$在σ中出现$\}$. 令C_n是C的、在s_n'中出现的常元集,Term_n是在s_n'中出现的$\mathscr{L}'_{\kappa\omega}$的基本项集再加上$\{d_1,\cdots,d_n\}$. 现令$s_{n+1}=s_n^8$,其中$s_n^1$—$s_n^8$如4.2.2的证明那样规定,除了用$s_n'$置换$s_n$. 如4.2.2那样构造模型$\mathfrak{A}$,易证:$\sigma\in s_\omega\Rightarrow\mathfrak{A}\models\sigma$.

情况2 κ是共尾度为ω的奇异基数:本情况的证明本质上与情况1相同,除了s_n'和Term_n的定义作如下修正:

$s_n'=\{\sigma\in s_n$:至多有$d_1,\cdots,d_n$在σ中出现且若σ形如$\bigwedge\Phi$或$\bigvee\Phi$,则$|\Phi|<\kappa_n\}$.

令B_n和F_n^m如4.2.2证明的情况2所规定,令

$$\mathrm{Term}_n=C_n\cup B_n\cup\{F(\vec{c}_m):F\in\mathrm{F}_n^m,\vec{c}_m\in C_n,m<\omega\}\cup\{\vec{d}_n\}.$$

其余证明皆同前. □

说明:后面我们将用此模型存在定理讨论良序在某类语言中的不可定义性.

现在我们回过头来考虑$\mathscr{L}_{\kappa\omega}$-完全性定理.

4.2.8 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$-完全性引理 令$\mathscr{L}'_{\kappa\omega}$如前规定,$\mathbf{B}=\mathbf{B}'^{*}_{\kappa\omega}$是由$\mathscr{L}'_{\kappa\omega}$表述的、如2.1.12规定的系统. 设$\Sigma$是$\mathscr{L}'_{\kappa\omega}$的幂$<\kappa$的句子集且

(1) κ是正则基数,或

(2) κ是共尾度为ω的奇异基数,且在Σ中出现的C的所有个体常元出现在某个C_n中,

则 Σ相对$\mathbf{B}$一致$\Leftrightarrow$存在(κ,ω)-一致性质S使$\Sigma\in$ S.

证明:"$\Leftarrow$"如前所证. "$\Rightarrow$":首先证明若S是$\mathscr{L}'_{\kappa\omega}$的所有句子集$s$的集合使得$|s|<\kappa$且$s$相对$\mathbf{B}$一致,且(1) κ是正则基数,或(2) κ是共尾度为ω的奇异基数且在s中出现的C的所有个体常

元出现在某个 C_n 中，则 S 是(κ,ω)-一致性质.

情况 1　κ 是正则基数：令 s 是 S 的任意元素，我们来验证 s 满足 4.2.1(1)的(C1)—(C7)，为此只须证$(4.4)_n$.

(C1)：设 $\{\varphi,\neg\varphi\}\subseteq s$，则 $\mathbf{B}\vdash\bigwedge s\to\neg\bigwedge\{\varphi,\neg\varphi\}$（下省略 B）.

(C2)：设 $\{\neg\varphi:\varphi\in\Phi\}\subseteq s$ 但 $s\cup\{\varphi\neg:\varphi\in\Phi\}\notin\mathbf{S}$，因为 κ 是正则基数且 $|s|<\kappa$，所以 $|\Phi|<\kappa$，因此 $|s\cup\{\varphi\neg:\varphi\in\Phi\}|<\kappa$. 因为 $s\cup\{\varphi\neg:\varphi\in\Phi\}\notin\mathbf{S}$，所以 $\vdash\neg\bigwedge(s\cup\{\varphi\neg:\varphi\in\Phi\})$，因此我们有 $\vdash\bigwedge s\to\neg\bigwedge\{\varphi\neg:\varphi\in\Phi\}$. 据公理 2 和合取规则（后者是分配律规则 DR_7 的一个特例），易得 $\vdash\bigwedge s\to\neg\bigwedge\{\neg\varphi:\varphi\in\Phi\}$.

(C3)：设 $\{\bigwedge\Phi_i:i\in I\}\subseteq s$ 但 $s\cup\bigcup\{\Phi_i:i\in I\}\notin\mathbf{S}$，因为对 $i\in I$，$\bigwedge\Phi_i$ 是 $\mathscr{L}_\kappa$ 的句子，所以 $|\Phi_i|<\kappa$. 又因为 $|I|\leqslant|s|<\kappa$ 且 κ 是正则基数，所以 $|\bigcup\{\Phi_i:i\in I\}|<\kappa$，因此 $|s\cup\bigcup\{\Phi_i:i\in I\}|<\kappa$. 于是，$\vdash\bigwedge s\to\neg\bigwedge\bigcup\{\Phi_i:i\in I\}$，两次使用合取公理和导出的合取规则(2.2.1)，我们有 $\vdash\bigwedge\{\bigwedge\Phi_i:i\in I\}\to\bigwedge\bigcup\{\Phi_i:i\in I\}$，所以

$$\vdash\bigwedge s\to\neg\bigwedge\{\bigwedge\Phi_i:i\in I\}.$$

(C4)：设 $\{\bigvee\Phi_i:i\in I\}\subseteq s$ 但对所有 $f\in\prod_{i\in I}\Phi_i$，$s\cup\{f(i):i\in I\}\notin\mathbf{S}$，则显然 $|s\cup\{f(i):i\in I\}|<\kappa$，所以，对所有 $f\in\prod_{i\in I}\Phi_i$，我们有 $\vdash\bigwedge s\to\neg\bigwedge\{f(i):i\in I\}$，据 DR_7，$\vdash\bigwedge s\to\neg\bigwedge\{\bigvee\Phi_i:i\in I\}$.

(C5)：假设 $\{\forall x_i\varphi_i(x_i):i\in I\}\subseteq s$，$C_1\subseteq C$，$|C_1|<\kappa$，但 $s\cup\{\varphi_i(x_i/c):c\in C_1,i\in I\}\notin\mathbf{S}$. 因为 $|C_1|<\kappa$，$|s|<\kappa$ 且 κ 是正则基数，所以 $|s\cup\{\varphi_i(c):c\in C_1,i\in I\}|<\kappa$，因此据假设，

$$\vdash\bigwedge s\to\neg\bigwedge\{\bigwedge_{c\in C_1}\varphi_i(x_i/c):i\in I\}.$$

据公理 4 等，有

$$\vdash\bigwedge\{\forall x_i\varphi_i(x_i):i\in I\}\to\bigwedge\{\bigwedge_{c\in C_1}\varphi_i(x_i/c):i\in I\},$$

因此
$$\vdash\bigwedge s\to\neg\bigwedge\{\forall x_i\varphi_i(x_i):i\in I\}.$$

(C6)：假设 $\{\exists x_i\varphi_i(x_i):i\in I\}\subseteq s$ 且对所有 $\{c_i:i\in I\}\subseteq C$，

$s\cup\{\varphi_i(x_i/c_i):c\in C_1,i\in I\}\notin\mathbf{S}$. 令$\{d_i:i\in I\}\subseteq C$是不在$s$中出现的$|I|$个互不相同的个体常元的集合，则

$$\vdash\bigwedge s\to\neg\bigwedge\{\varphi_i(x_i/d_i):i\in I\}.$$

显然我们能找到$|I|$个不同的个体变元组成的集合$\{y_i:i\in I\}$使得诸y_i在$\bigwedge s\to\neg\bigwedge\{\varphi_i(x_i/d_i):i\in I\}$的形式证明中不出现，据2.2.15(2)，在这个形式证明中用诸y_i代换诸d_i，仍有

$$\vdash\bigwedge s\to\neg\bigwedge\{\varphi_i((x_i/d_i)/y_i):i\in I\},$$

据公理2，$\vdash\bigwedge s\to\bigvee\{\neg\varphi_i((x_i/d_i)/y_i):i\in I\}$，据析取概括规则，$\vdash\bigwedge s\to\bigvee_{i\in I}\forall y_i\neg\varphi_i(y_i)$，据约束变元变换律(2.2.14)和公理2，

$$\vdash\bigwedge s\to\neg\bigwedge_{i\in I}\exists x_i\varphi_i(x_i).$$

(C7)：令$|I|<\kappa$，$\{t_i:i\in I\}$是$\mathscr{L}'_{\infty}$-基本项集，$\{c_i,d_i:i\in I\}\subseteq C$，

(1) 设$\{c_i\equiv d_i:i\in I\}\subseteq s$但$s\cup\{d_i\equiv c_i:i\in I\}\notin\mathbf{S}$. 则我们有$\vdash\bigwedge s\to\neg\bigwedge_{i\in I}(d_i\equiv c_i)$，据公理6的(1)，$\vdash\bigwedge s\to\neg\bigwedge_{i\in I}(c_i\equiv d_i)$.

(2) 设$\{c_i\equiv t_i,\varphi_i(t_i):i\in I\}\subseteq s$但$s\cup\{\varphi_i(t_i/c_i):i\in I\}\notin\mathbf{S}$. 则$\vdash\bigwedge s\to\neg\bigwedge\{\varphi_i(t_i/c_i):i\in I\}$，据公理6的(2)，

$$\vdash\bigwedge s\to\neg\bigwedge\{c_i\equiv t_i\wedge\varphi_i(t_i):i\in I\}.$$

(3) 选择$\{e_i:i\in I\}\subseteq C$是不在$s$中出现的个体常元集且设$s\cup\{e_i\equiv t_i:i\in I\}\notin\mathbf{S}$. 则我们有$\vdash\bigwedge s\to\neg\bigwedge\{e_i\equiv t_i:i\in I\}$. 据公理2，$\vdash\bigwedge s\to\bigvee\{\neg(e_i\equiv t_i):i\in I\}$. 令$\{y_i:i\in I\}$是不在

$$\bigwedge s\to\bigvee\{\neg(e_i\equiv t_i):i\in I\}$$

的形式证明中出现的变元集，用诸y_i去置换该形式证明中的诸e_i，有$\vdash\bigwedge s\to\bigvee\{\neg(y_i\equiv t_i):i\in I\}$，据析取概括规则，

$$\vdash\bigwedge s\to\bigvee\{\forall y_i\neg(y_i\equiv t_i):i\in I\},$$

据公理4和2.2.7(3)(a)，

$$\vdash\bigwedge s\to\bigvee\{\neg(t_i\equiv t_i):i\in I\},$$

即$\vdash\bigwedge s\to\neg\bigwedge\{t_i\equiv t_i:i\in I\}$，而$\{t_i\equiv t_i:i\in I\}$是公理5的集合.

情况 2　κ 是共尾度为 ω 的奇异基数：本情况的验证类似情况 1，请读者自证．作为举例我们只验证(C4)：

(C4)：假设 $\{\bigvee\Phi_i : i\in I\}\subseteq s$ 且存在 $n<\omega$ 使得对所有 $i\in I$，$|\Phi_i|\leqslant\kappa_n$，但对所有 $f\in\prod_{i\in I}\Phi_i$，$s\cup\{f(i):i\in I\}\notin \mathbf{S}$．因为我们有 $|s\cup\{f(i):i\in I\}|<\kappa$，所以对所有 $f\in\prod_{i\in I}\Phi_i$，

$$\vdash \bigwedge s\rightarrow\neg\bigwedge\{f(i):i\in I\},$$

据规则 κ_n-DR$_7$，　$\vdash \bigwedge s\rightarrow\neg\bigwedge\{\bigvee\Phi_i : i\in I\}$.

综上所述，若 Σ 相对 $\mathbf{B}$ 一致，则存在(κ,ω)-一致性质 $\mathbf{S}$ 使得 $\Sigma\in\mathbf{S}$．□

4.2.9 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$-完全性定理(Karp，[1964])

(1) 若 σ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$的句子，则　$\mathbf{B}^*_{\kappa\omega}\vdash\sigma\Leftrightarrow\ \vDash\sigma$.

(2) 令 κ 是共尾度为 ω 的奇异基数，σ 是 $\mathscr{L}_{\kappa^+\omega}$的句子，$\mathscr{L}_{\kappa\omega}$的句子 $\bar{\sigma}$ 如 1.2.15 的证明所规定，则　$\mathbf{B}^*_{\kappa\omega}\vdash\bar{\sigma}\Leftrightarrow\mathbf{B}^*_{\kappa^+\omega}\vdash\sigma$.

证明：(1) 据后面的 4.4.1．有"$\Rightarrow$"．证"$\Leftarrow$"：设 $\mathbf{B}^*_{\kappa\omega}\nvdash\sigma$，据后面的 4.4.2，$\mathbf{B}'^*_{\kappa\omega}\nvdash\sigma$，则 $\neg\sigma$ 相对 $\mathbf{B}'^*_{\kappa\omega}$一致．若 κ 还是共尾度为 ω 的奇异基数，则显然$\{\neg\sigma\}$中的个体常元 $c\in C$ 在某个 C_n 中，据 4.2.8．在这两种情况下，$\{\neg\sigma\}$ 都是某个(κ,ω)-一致性质的元素，据模型存在定理，$\{\neg\sigma\}$有模型的，所以 $\nvDash\sigma$.

(2) 因为 κ^+ 是正则基数，所以据(1)，有 $\mathbf{B}^*_{\kappa\omega}\vdash\bar{\sigma}\Leftrightarrow\ \vDash\bar{\sigma}$，和 $\mathbf{B}^*_{\kappa^+\omega}\vdash\sigma\Leftrightarrow\ \vDash\sigma$，而据 1.2.15，有 $\vDash\bar{\sigma}\Leftrightarrow\ \vDash\sigma$，因此(2)成立．□

练　习

4.2.10　详细证明 4.2.8 的情况 2.

4.2.11　定义命题语言 $\mathscr{L}_\kappa$ 的 κ-一致性质并用此证明 $\mathbf{B}^*_\kappa=\mathbf{B}^*_{\kappa\omega}\cap\mathrm{Form}(\mathscr{L}_\kappa)$以及第 3 章 § 2 的其它系统的完全性定理.

§ 3　$\mathscr{L}_{\infty\omega}$-可数片段的完全性定理

本节的完全性定理和由此得到的紧致性定理由于 Barwise 的

[1967]，也出现在他的[1969b]. 在始元存在的情况下，最初注意到这些定理仍然成立是在 Barwise 的[1973]. 此外，定理 4.3.14 也在他的[1973]中被证明.

本节在 **KPU＋无穷公理**(参见第 0 章)中工作，且令 $\varphi,\psi,\sigma,\cdots$ 和 $\Phi,\Psi,\Sigma,\cdots$ 分别表示 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$ 的公式和公式集.

4.3.1 定义 令 C 是可数个新个体常元的集合，$\mathscr{L}_M$ 是 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$-片段(参见 2.1.13). 称 φ 是 $\mathscr{L}_M$ 的公式 ψ 相对 C 的**自由代换特例** $\Leftrightarrow$ φ 是用个体常元符号 $\vec{c}_n\in C$ 处处代换 ψ 中有穷个自由变元得到的公式，故 $\mathscr{L}_M(C)=\{\varphi:\varphi$ 是 $\psi\in\mathscr{L}_M$ 相对 C 的自由代换特例$\}$称为相对 $\mathscr{L}_M$ 和 C 的**自然片段**.

t 称为 $\mathscr{L}_M$(相对 C)的**基本项** $\Leftrightarrow$ $t\in C$ 或 t 形如 $F(\vec{c}_n)$，其中 F 是 $\mathscr{L}_M$ 的 n 元函数符号且 $\vec{c}_n\in C$.

4.3.2 定义 令 $\mathbf{S}$ 是 $\mathscr{L}_M(C)$ 的句子集的集合，我们称 $\mathbf{S}$ 是 $(\infty,\omega)_M$-**一致性质** $\Leftrightarrow$ 对每一 $s\in\mathbf{S}$，下列条件皆成立：

(C0)(平凡规则) $\varnothing\in\mathbf{S}$；若 $s\subseteq s_1\in\mathbf{S}$，则对每一 $\varphi\in s_1$，

$$s\cup\{\varphi\}\in\mathbf{S}.$$

(C1)—(C7)同于 4.1.2 的(C1)—(C7)，只是涉及的公式和句子都是 $\mathscr{L}_M(C)$ 的公式和句子.

4.3.3 引理 令 $\mathbf{S}$ 满足 4.3.2 的(C1)—(C7)，则存在最小的 $(\infty,\omega)_M$-一致性质 $\mathbf{S}_1\supseteq\mathbf{S}$.

证明：递归定义 f 如下：

$f(0)=\mathbf{S}\cup\{\varnothing\}$，

$$f(n+1)=f(n)\cup\{s\cup\{\varphi\}:s\in f(n)\text{且存在 }s_1\in f(n)\text{使得 }s\subseteq s_1\text{ 且 }\varphi\in s_1\}.$$

$$\mathbf{S}_1=\bigcup_{n<\omega}f(n).$$

显见 $\mathbf{S}_1$ 是 $(\infty,\omega)_M$-一致性质. 施归纳于 n，易证若 $\mathbf{S}\subseteq\mathbf{S}_2$ 且 $\mathbf{S}_2$ 是 $(\infty,\omega)_M$-一致性质，则 $f(n)\subseteq\mathbf{S}_2$. □

下面引理的证明类似 4.1.4 的证明.

4.3.4 引理 假设 $\mathbf{S}$ 是 $(\infty,\omega)_M$-一致性质，$s\in\mathbf{S}$，则

(1) 若 $\{\varphi,\varphi\rightarrow\psi\}\in s$，则 $s\cup\{\psi\}\in\mathbf{S}$.

(2) 若 $c,d,e\in C$ 且 $c\equiv d$，$d\equiv e\in s$，则 $s\cup\{c\equiv e\}\in\mathbf{S}$.

(3) 若 $c\in C$，则 $s\cup\{c\equiv c\}\in\mathbf{S}$. □

4.3.5 引理 令 Σ_0 是 $\mathscr{L}_M$ 的有效性质（参见 2.1.14），Σ 是 Σ_0 中公式的所有自由代换特例的集合. 定义 $\mathbf{S}=\{s:s$ 是 $\mathscr{L}_M(C)$ 的有穷句子集使得 $\mathscr{L}_M(C)$ 是相对 $\mathscr{L}_M$ 的自然片段且 $\neg\bigwedge s\notin\Sigma\}$，则

(1) Σ 是 $\mathscr{L}_M(C)$ 的有效性质.

(2) $\mathbf{S}$ 是 $\mathscr{L}_M(C)$ 的 $(\infty,\omega)_M$-一致性质.

(3) $\varphi\in\Sigma$ 且 $s\in\mathbf{S}\Rightarrow s\cup\{\varphi\}\in\mathbf{S}$.

证明：证(1)：只须证 Σ 包含 $\mathrm{B}_{\infty\omega}=\mathbf{B}_{\infty\lambda\rho\pi}\cap\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\infty\omega})$ 的公理 1—6 且在推理规则 1—3 下封闭. 作为举例，在此我们来验证公理 6(2)和合取规则：

验证公理 6(2)：考虑 $\mathscr{L}_M(C)$ 的下列公式：

$$v\equiv t\wedge\varphi(\vec{c}_n,v)\rightarrow\varphi(\vec{c}_n,v/t),\tag{4.5}$$

其中 t 也可以包含 $\vec{c}_n$. 但(4.5)是 $\mathscr{L}_M$ 的某个下列形式的公式的自由代换特例：

$$v\equiv t_1\wedge\varphi(\vec{u}_n,v)\rightarrow\varphi(\vec{u}_n,v/t_1),\tag{4.6}$$

其中 $t=t_1(u_1/c_1,\cdots,u_n/c_n)$. 因为公理 6(2)在 Σ_0 中，所以 $(4.6)\in\Sigma_0$，因此 $(4.5)\in\Sigma$.

验证合取规则：设 $\psi\rightarrow\bigwedge\Phi\in\mathscr{L}_M(C)$ 且对每一 $\varphi\in\Phi$，$\psi\rightarrow\varphi\in\Sigma$. 只须证 $\psi\rightarrow\bigwedge\Phi\in\Sigma$. 假设 $\psi\rightarrow\bigwedge\Phi$ 是 $\mathscr{L}_M$ 的某个公式的自由代换特例. 不妨假设 $\psi\rightarrow\bigwedge\Phi$ 具有下列形式：

$$\psi(v_1/c_1)\rightarrow\bigwedge\{\varphi(v_1/c_1):\varphi(v_1)\in\Phi_0\}.$$

因为 $\psi(c_1)\rightarrow\varphi(c_1)\in\Sigma$，所以它是形如 $\psi(v_\beta/c_1)\rightarrow\varphi(v_\beta/c_1)$ 的自由代换特例使得 $\psi(v_\beta)\rightarrow\varphi(v_\beta)\in\Sigma_0$. 对 Σ_0 运用公理 6(1)，推理规则 1 和规则 3，对每一 $\varphi(v_1)\in\Phi_0$，有 $\psi(v_1)\rightarrow\varphi(v_1)\in\Sigma_0$. 对 Σ_0 运用推理规则 2，$\psi(v_1)\rightarrow\bigwedge\{\varphi(v_1):\varphi(v_1)\in\Phi_0\}\in\Sigma_0$，因此 $\psi\rightarrow\bigwedge\Phi\in\Sigma$.

证(2)：验证S是$\mathscr{L}_M(C)$的$(\infty,\omega)_M$-一致性质繁而不难，只是验证(C6)需要在此提及：

设$\exists v\varphi(v)\in s\in \mathbf{S}$但对所有$c\in C$，$s\cup\{\varphi(v/c)\}\notin \mathbf{S}$. 因此对每一$c\in C$，$\bigwedge s\to\neg\varphi(v/c)\in\Sigma$. 特别对某个不在S中出现的$d\in C$，有$\bigwedge s\to\neg\varphi(v/d)\in\Sigma$. 因为$d$不在S中出现，所以$\bigwedge s\to\neg\varphi(v)$也是$\Sigma_0$中某个公式的自由代换特例，所以它也在$\Sigma$中. 因此据规则3，我们有$\bigwedge s\to\forall v\neg\varphi(v)\in\Sigma$，即据公理2，$\bigwedge s\to\neg\exists v\varphi(v)\in\Sigma$. 易见$\neg\bigwedge s\in\Sigma$，而这与$s\in\mathbf{S}$矛盾.

证(3)：假设$\varphi\in\Sigma$，$s\in\mathbf{S}$但$s\cup\{\varphi\}\notin\mathbf{S}$. 则$\neg(\bigwedge s\wedge\varphi)\in\Sigma$，所以根据公理1和规则1，$\varphi\to\neg\bigwedge s\in\Sigma$，所以据规则1，$\neg\bigwedge s\in\Sigma$，因此有$s\notin\mathbf{S}$，矛盾. □

下面我们要在KPU+无穷公理中证明$\mathscr{L}_{\infty\omega}$-可数片段的模型存在定理. 为了在上述较弱的元理论中做到这点，我们必须在与ZF系统中的概念等价的概念中，选择那些能避免使用幂集公理和选择公理的概念.

4.3.6 $\mathscr{L}_M$-模型存在定理 令$\mathscr{L}_M$是$\mathscr{L}_{\infty\omega}$-可数片段，S是$\mathscr{L}_M$的$(\infty,\omega)_M$-一致性质，对$s_0\in\mathbf{S}$，存在$\mathscr{L}_{\infty\omega}$-模型$\mathfrak{A}$使$\mathfrak{A}\models s_0$.

证明：因为$\mathscr{L}_M$可数，所以能分别枚举$\mathscr{L}_M$中的句子和项：

$$\sigma_0,\cdots,\sigma_n,\cdots,\quad n<\omega. \tag{4.7}$$

$$t_0,\cdots,t_n,\cdots,\quad n<\omega. \tag{4.8}$$

如下构造S的元素的$\subseteq$-链：$s_0\subseteq s_1\subseteq\cdots\subseteq s_n\subseteq\cdots$. $s_0\in\mathbf{S}$已给定. 假设我们已有$s_n\in\mathbf{S}$，由此我们用$(\infty,\omega)_M$-一致性质来构造s_{n+1}：

第一步，找到C在(4.8)中排列的第一个个体常元符号c使得$s_n\cup\{c\equiv t_n\}\in\mathbf{S}$且令$s_n^1=s_n\cup\{c\equiv t_n\}$.

第二步，若$s_n^1\cup\{\sigma_n\}\notin\mathbf{S}$，则令$s_{n+1}=s_n^1$；若$s_n^1\cup\{\sigma_n\}\in\mathbf{S}$，则令

$$s_n^2=s_n^1\cup\{\sigma_n\}.$$

下面我们分三种不同的子情况来讨论：

情况1：若σ_n不是形如$\exists v\varphi$或$\bigvee\Sigma$，则令$s_{n+1}=s_n^2$.

情况 2：若 σ_n 是 $\exists v\varphi$，则据(C6)，在(4.8)中找到排列在第一位的 $c\in C$ 使得 $s_n^2\cup\{\varphi(v/c)\}\in\mathbf{S}$，且令 $s_{n+1}=s_n^2\cup\{\varphi(v/c)\}$.

情况 3：若 σ_n 是 $\bigvee\Sigma$，则据(C4)，在(4.7)中找到排列在第一位的 $\varphi\in\Sigma$ 使得 $s_n^2\cup\{\varphi\}\in\mathbf{S}$，且令 $s_{n+1}=s_n^2\cup\{\varphi\}$.

令 $s_\omega=\bigcup_{n<\omega}s_n$. 下面的证明如同 4.1.5 证明的相应部分. □

说明：不可数片段 $\mathscr{L}_M$ 的模型存在定理请参见后面的有关章节，因为它需要 Skolem-语言.

4.3.7 $\mathscr{L}_M$-扩张的模型存在定理 令 $\mathscr{L}_M$ 和 $\mathbf{S}$ 如 4.3.6 所规定，若 Σ 是 $\mathscr{L}_M$ 的句子集使得

$$s\in\mathbf{S}\text{ 且 }\sigma\in\Sigma\Rightarrow s\cup\{\sigma\}\in\mathbf{S},$$

则对所有 $s\in\mathbf{S}$，$s\cup\Sigma$ 有模型. □

证明如同 4.1.6 的证明.

4.3.8 $\mathscr{L}_M$-弱完全性定理 令 $\mathscr{L}_M$ 是 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$ 的可数片段，则

$$\mathscr{L}_M\text{ 的句子 }\sigma\text{ 是有效的}\Leftrightarrow\sigma\text{ 是 }\mathscr{L}_M\text{ 的内定理}.$$

证明："⇐"：设 σ 是 $\mathscr{L}_M$ 的内定理(这里内定理的概念据 2.1.15)，$\mathfrak{A}$ 是 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$ 的任意结构，$\Phi_{\mathfrak{A}}=\{\varphi(\vec{v}_n)\in\mathscr{L}_M:\mathfrak{A}\models\forall\vec{v}_n\varphi\}$，据 2.1.22(1)，$\Phi_{\mathfrak{A}}$ 是 $\mathscr{L}_M$ 的有效性质，所以 $\sigma\in\Phi_{\mathfrak{A}}$，即 $\mathfrak{A}\models\sigma$，因此 $\models\sigma$.

"⇒"：设 σ 不是 $\mathscr{L}_M$ 的内定理，则存在 $\mathscr{L}_M$ 的有效性质 Θ 使得 $\sigma\notin\Theta$. 令 $\Sigma\supseteq\Theta$ 且 $\mathbf{S}$ 如 4.3.5 的假设所定义，据 4.3.5(2)，$\mathbf{S}$ 是 $(\infty,\omega)_M$-一致性质. 据 4.3.5(3)，$\{\neg\sigma\}\in\mathbf{S}$，所以据 4.3.6，$\{\neg\sigma\}$ 有模型，所以 $\not\models\sigma$. □

说明：之所以在上述定理中冠以"弱"字，是因为我们没有用 2.1.16 定义的证明概念，因此就没有与 $\mathscr{L}_M$ 相容的证明概念使得

$$\models\sigma\Leftrightarrow\exists P(P\text{ 是 }\sigma\text{ 的证明}).$$

到目前为止我们所证明的只能是用一个 Π_1-概念(即 σ 在 $\mathscr{L}_M$ 的每一有效性质中)去置换另一个 Π_1-概念($\models\sigma$). 若我们想要得到一个证明的 Δ_1-概念，就需要 2.1.16，2.1.17 以及下列定理(**注意**：虽然上面我们在 **KPU＋无穷公理**中工作，但下面的完全性定理和

紧致性定理不能在**KPU+无穷公理**中得到证明).

4.3.9 定理 令 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$ 的可容片段(见 2.1.17)且 σ 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的句子,则下列命题等价:

(1) $\exists P[P$ 是 σ 的 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$-证明$]$ (即 $P\in\mathfrak{M}$ 是 σ 的 $\mathscr{L}_M$-证明).

(2) $\exists P[P$ 是 σ 的 $\mathscr{L}_M$-证明$]$ (参见 2.1.16).

(3) σ 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的内定理,即 σ 在 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的每一有效性质中.

证明:(1) $\Rightarrow$ (2)显然成立.

(2) $\Rightarrow$ (3):令 Σ 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的任意有效性质,施归纳于证明 P 的传递闭包 TC(P),因为 Σ 包含公理 1—6 且在推理规则 1—3 下封闭,所以不难证明:

$$P\text{ 是 }\sigma\text{ 的 }\mathscr{L}_M\text{-证明}\Rightarrow\sigma\in\Sigma.$$

(3) $\Rightarrow$ (1):首先要证明集合

$$\Sigma=\{\varphi\in\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}:\exists P\in\mathfrak{M}(P\text{ 是 }\varphi\text{ 的 }\mathscr{L}_M\text{-证明})\}$$

是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的有效性质. 为此只须证 Σ 包含公理 1—6 且在推理规则 1—3 下封闭. Σ 包含公理 1—6 是显然的,所以我们来验证 Σ 在上述规则下封闭.

规则 1:设 $\varphi,\varphi\to\psi\in\Sigma$,则存在 $P_0,P_1\in\mathfrak{M}$ 使 $2^{nd}(P_0)=\varphi\to\psi$, $2^{nd}(P_1)=\varphi$. 令 $f(0)=P_0,f(1)=P_1$,则 $P=\langle f,\psi\rangle\in\mathfrak{M}$ 且 P 是 ψ 的 $\mathscr{L}_M$-证明,所以 $\psi\in\Sigma$.

规则 2:这里要用到第 0 章关于 **KPU** 的定理. 设 $\varphi\to\bigwedge\Psi\in\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 且对所有 $\psi\in\Psi,\varphi\to\psi$,因此对每一 $\psi\in\Psi$,存在 $P_\psi\in\mathfrak{M}$ 使得 P_ψ 是 $\varphi\to\psi$ 的 $\mathscr{L}_M$-证明. 据 $\mathfrak{M}$ 中成立的 Σ-强置换定理(0.2.9),我们有函数 $f\in\mathfrak{M}$,$\mathrm{Dom}(f)=\Psi$ 使得对每一 $\psi\in\Psi,f(\psi)\neq\varnothing$,且

$$P_\psi\in f(\psi)\Rightarrow P_\psi\text{ 是 }\varphi\to\psi\text{ 的 }\mathscr{L}_M\text{-证明}.$$

显然,$\langle f,\varphi\to\bigwedge\Psi\rangle\in\mathfrak{M}$ 且是 $\varphi\to\bigwedge\Psi$ 的 $\mathscr{L}_M$-证明,所以

$$\varphi\to\bigwedge\Psi\in\Sigma.$$

规则 3 的验证类似规则 1 的验证.

因为据(3),σ 在 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的所有有效性质中,所以 $\sigma\in\Sigma$. □

注意：一般地，我们不能在上述定理中增加下列(4)：

σ 在 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的每一有效性质 Σ 中使得 $\Sigma\in\mathfrak{M}$.

因为这个命题通常要比上述(3)弱得多.

4.3.10 推论 若 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是可容片段，则 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的内定理集是 $\mathfrak{M}$ 的 Σ_1-子集，而且这个 Σ_1-定义没有 $\mathfrak{M}$ 中的参数且独立于 $\mathfrak{M}$.

证明：这个 Σ_1-公式就是

$$\exists P(P\text{ 是 }\sigma\text{ 的证明}).\ \square$$

下面我们用 $\vdash\sigma$ 来表示 Σ_1-公式"$\exists P$(P 是 σ 的证明)"，把 4.3.8 和 4.3.9 结合起来，就有我们所需的结果：

4.3.11 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$-Barwise-完全性定理(Barwise，[1967]) 令 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$ 的可数可容片段，则对所有 $\varphi\in\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$，下列命题等价：

(1) $\models\varphi$.

(2) $\vdash\varphi$.

(3) $\mathfrak{M}$ 满足"$\vdash\varphi$". $\square$

注意：(Ⅰ) 据上述定理，$\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的有效句子集是 $\mathfrak{M}$ 上的 Σ_1. (Ⅱ) 上述 Barwise-完全性定理并没有说句子"$\models\varphi\Leftrightarrow\vdash\varphi$"在可数可容集 $\mathfrak{M}$ 中真. 因为句子"$\models\varphi\Leftrightarrow\vdash\varphi$"加上上述 Barwise-完全性定理蕴涵

$$\varphi\in\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}\text{ 且 }\varphi\text{ 有模型}\Rightarrow\varphi\text{ 有模型 }\mathfrak{A}\in\mathfrak{M},$$

而这对绝大多数 $\mathfrak{M}$ 是不成立的. 所以读者务必不要误解上述 Barwise-完全性定理的含义. (Ⅲ) 关于不可数可容片段的完全性定理我们将在后面章节讨论，因为证明它还需要其它知识和技巧.

Barwise-完全性定理有极其广泛地运用，下例定理就是一例.

4.3.12 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$-Barwise-紧致性定理(Barwise，[1967]) 令 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$ 的可数可容片段，Γ 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$-句子集使得 Γ 是 $\mathfrak{M}$ 上的 Σ_1. 若每一 $\Gamma_0\subseteq\Gamma$ 使得 $\Gamma_0\in\mathfrak{M}$ 有模型，则 Γ 有模型.

证明：令 $\mathscr{L}'_{\infty\omega}=\mathscr{L}_{\infty\omega}\cup C$ 使得 C 是可数新个体常元集且 $\mathscr{L}'_{\infty\omega}$ 仍是 $\mathfrak{M}$ 上的 Δ_1. 令 $\mathscr{L}_M(C)$ 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 相对 C 的扩张，则

$$\mathscr{L}_M(C)=\{s: s \text{ 是 } \mathscr{L}'_{\infty\omega}\text{的句子集}, s\in\mathfrak{M} \text{ 且只有有穷多个个体常元符号 } c\in C \text{ 在 } s \text{ 中出现}\}.$$

令 S 是 $\mathscr{L}_M(C)$ 的所有有穷句子集 s 的集合使得对所有 $\Gamma_0\subseteq\Gamma$，$\Gamma_0\in\mathfrak{M}$ 且 $\Gamma\cup s$ 有模型. 首先我们验证 S 是 $(\infty,\omega)_{\mathfrak{M}}$-一致性质. 但此验证如通常，只有(C4)的验证需要在此提及.

(C4)：设 $\bigvee\Psi\in s\in\mathbf{S}$ 且对每一 $\psi\in\Psi$，$s\cup\{\psi\}\notin\mathbf{S}$. 则对每一 $\psi\in\Psi$，存在 $\Gamma_0\subseteq\Gamma$ 使得

$$\Gamma_0\in\mathfrak{M} \text{ 且 } \Gamma_0\cup s\cup\{\psi\}\text{没有模型}.$$

令 $\theta(x)$ 是 Γ 在 $\mathfrak{M}$ 上的 Σ_1-定义，则据相对 $\mathscr{L}_M(C)$ 的完全性定理，下列 Σ-句子在 $\mathfrak{M}$ 中真：

$$\forall\psi\in\Psi\exists\Gamma_0[\forall\varphi\in\Gamma_0(\theta(\varphi))\wedge\text{“}\vdash\bigwedge(\Gamma_0\cup s)\rightarrow\neg\psi\text{”}]. \quad (4.9)$$

据 Σ-自返原则(参见第 0 章)，存在 $a\in\mathfrak{M}$ 使得(4.9)相对 a 成立，所以据 0.2.4，可以假设 a 是传递的. 据 Δ_0-分离公理，令 $\Gamma_2=\{\psi\in a:\theta(\psi)^{(a)}\}$，则据 0.2.4，$\Gamma_2\in\mathfrak{M}$ 且 $\Gamma_2\subseteq\Gamma$. 因为存在 $\Gamma_0\subseteq\Gamma_2$ 使得 $\vdash\bigwedge(\Gamma_0\cup s)\rightarrow\neg\psi$，所以对每一 $\psi\in\Psi$，$\vdash\bigwedge(\Gamma_2\cup s)\rightarrow\neg\psi$，因此 $\vdash\bigwedge(\Gamma_2\cup s)\rightarrow\neg\bigvee\Psi$，因为 $\bigvee\Psi\in s$，所以 $\vdash\bigwedge(\Gamma_2\cup s)\rightarrow\bigvee\Psi$，因此 $\vdash\neg\bigwedge(\Gamma_2\cup s)$，即 $\Gamma_2\cup s$ 没有模型，而这与 $s\in\mathbf{S}$ 矛盾.

易证若 $s\in\mathbf{S}$ 且 $\sigma\in\Gamma$，则 $s\cup\{\sigma\}\in\mathbf{S}$，因为 S 是 $(\infty,\omega)_{\mathfrak{M}}$-一致性质，所以据扩张的模型存在定理 4.3.7，Γ 有模型. □

把 Barwise-完全性定理与 Barwise-紧致性定理结合起来就得到下面扩张的完全性定理.

4.3.13 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$-扩张的完全性定理 令 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$ 的可数可容片段，Γ 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$-句子集使 Γ 是 $\mathfrak{M}$ 上的 Σ_1. 则集合 $\{\varphi\in\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}:\Gamma\vdash\varphi\}$ 是 $\mathfrak{M}$ 上的 Σ_1.

证明：若 σ 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的句子，则我们施 Barwise-紧致性定理于 $\Gamma\cup\{\neg\sigma\}$，有

$$\Gamma\vdash\sigma\Leftrightarrow\exists\Gamma_0\in\mathfrak{M}[\Gamma_0\subseteq\Gamma\wedge\text{“}\Gamma_0\vdash\sigma\text{”}].$$

所以 $\Gamma\vdash\sigma\Leftrightarrow$ 下列公式在 $\mathfrak{M}$ 中真：其中 $\theta(x)$ 定义 Γ，

$$\exists \Gamma_0[\forall \varphi \in \Gamma_0(\theta(\varphi)) \wedge \text{“} \vdash \bigwedge \Gamma_0 \to \sigma \text{”}]. \tag{4.10}$$

显然，(4.10)给出了“$\Gamma \vdash \sigma$”的 Σ-定义.

注意：这个定义只依赖 Γ 的定义公式 θ，而不依赖 $\mathfrak{M}$，而且在这个定义中出现的参数和在 θ 中出现的参数相同. □

上述 Barwise-紧致性定理的一个特例特别值得一提，因为它经常得到使用. 例如，当 $\mathfrak{A}$ 是递归饱和模型（此概念见下册有关章节）时，它可以用于 $\mathfrak{M} = \mathbf{HYP}_{\mathfrak{A}}$ 的情况.

4.3.14 定理 令 $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 是可数可容集使得 $o(\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}) = \omega$. 令 T, T_1 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的理论使得它们都是 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 上的 Σ_1 且每一 $\varphi \in T$ 是纯集（参见 0.7.2）.（因此 T 是有穷句子集.）若对所有有穷 $T_0 \subseteq T$，$T_0 \cup T_1$ 有模型，则 $T \cup T_1$ 有模型.

证明：若 $T \cup T_1$ 没有模型，则据 Barwise-紧致性定理，对某个 $\Psi \in \mathfrak{M}$，$\Psi \subseteq T \cup T_1$ 且 $\vdash \neg \bigwedge \Psi$. 用 θ_1 和 θ_2 分别表示 T 和 T_1 的 Σ_1-定义，则 $\forall x \in \Psi[\theta_1(x) \vee \theta_2(x)]$. 据 Σ-自返原则，存在 $a \in \mathfrak{M}$ 使得 $\forall x \in \Psi[\theta_1(x)^{(a)} \vee \theta_2(x)^{(a)}]$. 因此据 Δ_0-分离公理，构造

$$\Psi_1 = \{x \in \Psi : \theta_1(x)^{(a)}\}, \quad \Psi_2 = \{x \in \Psi : \theta_2(x)^{(a)}\}.$$

显然，$\Psi = \Psi_1 \cup \Psi_2$，$\Psi_1 \subseteq T$，$\Psi_2 \subseteq T_1$ 且 $\Psi_1 \cup \Psi_2$ 没有模型. 但 Ψ_1 是诸纯集的集合，所以它自身也是纯集. 因为 $o(\mathfrak{M}) = \omega$，所以 Ψ_1 也是有穷的，矛盾. □

现在出现一个问题：如果 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}} = \mathbf{HF}_{\mathfrak{A}}$，那么，在什么样的范围内，上述 Barwise-紧致性定理能给我们一个关于 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}} = \mathscr{L}_{\omega\omega}$ 的普通紧致性定理？换句话说，T 是 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 上的 Σ_1 这个要求倒底起什么作用？我们的回答是：假设 $\mathbf{HF}_{\mathfrak{A}}$ 是可数的（即 $\mathfrak{A}$ 是可数的），T 是 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$ 的任意理论，则 T 是 $(\mathfrak{A}; \mathbf{HF}_A, \in, T)$ 上的 Σ_1，而据 0.7.9，这个模型是可容集. 因此我们可以运用上述 Barwise-紧致性定理于这个可容集，从而得到 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$ 的普通紧致性定理.

关于 Barwise-紧致性问题，我们在后面专门用一章的篇幅全面系统地讨论之.

在 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$ 的范围内，我们还能定义其它类型的一致性质并证明适于它们的完全性定理. 由于篇幅限制，我们在下面不加证明地举两个 Karp 在其[1972]提到的结果.（对它们系统地研究请见 Green 的[1972]）.

令 $M=\bigcup_{n<\omega}M_n$ 是传递且初始递归封闭的集合. 我们也假设每一 M_n 是传递且初始递归封闭的集合，$M_n\subseteq M_{n+1}$ 且 M_{n+1} 有 $|M_n|$ 个元素不在 M_n 中出现. 令 $X\subseteq M$ 是非逻辑符号的初始递归集，C 是不在 X 中出现的个体常元的集合. 假设 $C=\bigcup_{n<\omega}C_n$，$C_n\subseteq M_n$，C_{n+1} 有 $|M_n|$ 个元素不在 C_n 中出现. 令 $\mathscr{L}_M(X)$ 是 $\mathscr{L}_{\infty\omega}(X)$ 的、其公式出现在 M 中的子语言.

4.3.15 定义 1. 令 $\mathbf{S}$ 是 $\bigcup_{n<\omega}\mathscr{L}_M(X\cup C_n)$ 的公式集的集合，称 $\mathbf{S}$ 是(相对 C 的)***M*-一致性质** $\Leftrightarrow$ 对每一 $s\in\mathbf{S}$，下列条件皆成立：

(C1) $\varphi\in s \Leftrightarrow \neg\varphi\notin s$.

(C2) 对 $n<\omega$，$\{\neg\varphi:\varphi\in\Phi\}\subseteq s\cap M_n \Rightarrow s\cup\{\varphi\neg:\varphi\in\Phi\}\in\mathbf{S}$.

(C3) 对 $n<\omega$，$\{\bigwedge\Phi_i:i\in I\}\subseteq s\cap M_n \Rightarrow s\cup\bigcup\{\Phi_i:i\in I\}\in\mathbf{S}$.

(C4) 对 $n<\omega$，$\{\bigvee\Phi_i:i\in I\}\subseteq s\cap M_n \Rightarrow$ 存在 $f\in\prod_{i\in I}\Phi_i$，

$$s\cup\{f(i):i\in I\}\in\mathbf{S}.$$

(C5) 对 $n<\omega$，若 $\{\forall x_i\varphi_i(x_i):i\in I\}\subseteq s\cap M_n$，则对所有 $m<\omega$，

$$s\cup\{\varphi_i(x_i/c):c\in C_m,i\in I\}\in\mathbf{S}.$$

(C6) 对 $n<\omega$，若 $\{\exists x_i\varphi_i(x_i):i\in I\}\subseteq s\cap M_n$，则对某个 $m<\omega$，某个 $f\in(C_m)^I$，　$s\cup\{\varphi_i(x_i/f(i)):i\in I\}\in\mathbf{S}$.

(C7) 对所有 $n<\omega$ 和 $i\in I$，$\varphi_i(v_i)$ 是 $\mathscr{L}_M(X\cup C_n)$ 的原子公式或原子公式的否定，t_i 是 X 中的个体常元或形如 $F(\vec{c}_k)$ 的公式，其中 $\vec{c}_k\in C_n$，$F\in X\cap M_n$ 是 k 元函数，

(1) $\{c_i\equiv d_i:i\in I\}\subseteq s\cap M_n \Rightarrow s\cup\{d_i\equiv c_i:i\in I\}\in\mathbf{S}$.

(2) $\{\varphi_i(t_i),c_i\equiv t_i:i\in I\}\subseteq s\cap M_n \Rightarrow s\cup\{\varphi_i(t_i/c_i):i\in I\}\in\mathbf{S}$.

(3) 对某个 $m<\omega$ 和 $f\in(C_m)^I$，$s\cup\{f(i)\equiv t_i:i\in I\}\in\mathbf{S}$.

2. 假设$\{\varphi_a(v_0):a\in M\}$是含有一个自由变元的公式集使得$\{\varphi_a(v_0):a\in M\}\subseteq\mathscr{L}_{M_n}(X)$. 称 S 是(相对 C 的)$(M,\langle\varphi_a(v_0):a\in M\rangle)$-**一致性质** $\Leftrightarrow$ S 是(相对 C 的)M-一致性质且 $s\in$ S 满足:

(C8) 对 $n<\omega$,存在 $f:C_n\to\omega$,

$$s\cup\{\bigvee_{a\in M_{f(c)}}\varphi_a(v_0/c):c\in C_n\}\in \mathbf{S}.$$

4.3.16 $\mathscr{L}_M$-模型存在定理 (1) 对 $\Sigma\subseteq\mathscr{L}_M(X)$,

Σ 有模型 $\Leftrightarrow$ Σ 是某个 M-一致性质的元素.

(2) 对 $\Sigma\subseteq\mathscr{L}_M(X)$,

$\Sigma\cup\{\forall v_0\bigvee_{a\in M}\varphi_a(v_0)\}$有模型

$\Leftrightarrow$ Σ 是某个$(M,\langle\varphi_a(v_0):a\in M\rangle)$-一致性质的元素. □

4.3.17 $\mathscr{L}_M$-完全性定理

(1) 令 $\Sigma\subseteq\mathscr{L}_M(X)$, $\varphi\in\mathscr{L}_M(X)$, $\mathbf{B}=\mathbf{B}(\mathrm{D}_M)$是 $\mathscr{L}_M(X)$表述的演绎系统,D_M 是在$\bigcup_{n<\omega}\mathscr{P}(M_n)$中成立的分配公理的集合,则

$$\Sigma\models\varphi\Leftrightarrow \mathbf{B};\Sigma\vdash\varphi.$$

(2) 令 $\Sigma\subseteq\mathscr{L}_M(X)$, $\varphi\in\mathscr{L}_M(X)$, $\mathbf{B}=\mathbf{B}(\mathrm{D}_M,\Theta)$是 $\mathscr{L}_M(X)$表述的演绎系统,D_M 如前规定,Θ 是下列集合:

$$\{\bigvee_{f:H(M_n)\to\omega}[\bigwedge_{c\in H(M_n)}(\bigvee_{a\in M_{f(c)}}\varphi_a(v_0/c))]:n<\omega\},$$

其中 $H(M_n)$是 M_n 中的 Henkin-个体常元集,则

$$\Sigma\cup\{\forall v_0\bigvee_{a\in M}\varphi_a(v_0)\}\models\varphi\Leftrightarrow \mathbf{B};\Sigma\vdash\varphi.\quad\square$$

说明:据上述定理(1),若 M 在幂集运算下封闭且每一 $M_n\in M$,则限制于 M 的有效公式集 Val 可以用包含 $\mathscr{P}$ 的 Σ_1-公式来表达,所以 Val 在 M 上是 Σ_2,但不是 M 上的 Σ_1.

练 习

4.3.18 用 4.3.6 证明:

$\mathscr{L}_M$ 是可数片段且 $\varphi\in\mathscr{L}_M$ 有模型 $\Rightarrow$ φ有可数模型.

4.3.19（**$\mathscr{L}_{\infty\omega}$-省略型定理**） 令 $\mathscr{L}_M$ 是 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$ 的可数片段，Σ 是 $\mathscr{L}_M$ 的句子集，对每一 $n<\omega$，$\Phi_n(\vec{v}_n)$ 是 $\mathscr{L}_M$ 的公式集使得其自由变元至多是 $\vec{v}_n$。假设 Σ 有模型，且对所有 $n<\omega$ 和 $\mathscr{L}_M$ 的所有公式 $\psi(\vec{v}_n)$，若 $\Sigma\cup\{\exists\vec{v}_n\psi\}$ 有模型，则存在 $\varphi(\vec{v}_n)\in\Phi_n$ 使 $\Sigma\cup\{\exists\vec{v}_n\psi\wedge\varphi\}$ 有模型。证明 $\Sigma\cup\{\bigwedge_{n<\omega}\forall\vec{v}_n\bigvee\Phi_n\}$ 有模型。

4.3.20 令 $\mathfrak{M}$，$\mathfrak{N}$ 是可容集使得 $\mathfrak{M}\in\mathfrak{N}$ 且"$\mathfrak{M}$ 是可数的"在 $\mathfrak{M}$ 中真。令 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是由 $\mathfrak{M}$ 给定的 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$ 的可容片段。证明：

$\mathfrak{N}\models$"φ 是有效的"$\Leftrightarrow\mathfrak{M}\models\exists P$（P 是 φ 的 $\mathscr{L}_M$-证明）。

因此若 $\varphi\in\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 有模型，则它有 $\mathfrak{N}$ 中的模型。

§4 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$-完全性定理

本节 $\varphi,\psi,\sigma,\cdots$ 和 $\Phi,\Psi,\Sigma,\cdots$ 分别表示 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的公式和公式集，$\mathfrak{A},\mathfrak{B},\cdots$ 表示 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的结构。

4.4.1 引理 相对任何语言 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$，

（1）基本系统 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的所有定理是有效式。

（2）公理模式 CD_γ，D_γ，D_γ^+，BH_γ，DBH_γ 在它们的定义各自规定的条件下是有效式。

（3）推理规则 DR_γ，κ_n-DR_γ，IC_γ，DC_γ 在它们的定义各自规定的条件下保持有效性。

证明：（1）的验证显然。

（2）CD_γ，D_γ 和 D_γ^+ 的验证如 3.2.7(2) 的证明。

考虑 BH_γ：令 $\gamma<\mathrm{cf}(\lambda)$，$\mathfrak{A}$ 是任意结构，任意 $f\in A^{\mathrm{Fv}(\theta)}$，其中 $\theta=\bigwedge_{\xi<\gamma}\exists X_\xi\varphi_\xi$。假设 $\mathfrak{A}\models\bigwedge_{\xi<\gamma}\exists X_\xi\varphi_\xi[f]$，因此对每一 $\xi<\gamma$，存在 $g_\xi\in A^{X_\xi}$ 使得 $\mathfrak{A}\models\varphi_\xi[f*g_\xi]$。令 $g=\bigcup_{\xi<\gamma}g_\xi$，因为对 $\xi,\zeta<\gamma$ 使得 $\xi\neq\zeta$，$X_\xi\cap X_\zeta=\varnothing$ 且对 $\zeta<\xi$，每一 $x\in X_\zeta$ 不在 φ_ξ 中自由出现，所以 g 是函数且 $\mathfrak{A}\models\bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_\xi[f*g]$。因为 $\gamma<\mathrm{cf}(\lambda)$，所以 $|\bigcup_{\xi<\gamma}X_\xi|<\lambda$，因此

$$\mathfrak{A}\models\exists\bigcup_{\xi<\gamma}X_\xi\bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_\xi[f].$$

考虑 DBH_γ：令 $\gamma<\mathrm{cf}(\lambda)$，$\mathfrak{A}$ 是结构且 $f\in A^{\mathrm{Fv}(\theta)}$，其中

$$\theta=\exists X_0\varphi_0\wedge[\bigwedge_{1\leqslant\xi<\gamma}\forall\bigcup_{\zeta<\xi}X_\zeta\exists X_\xi\varphi_\xi].$$

假设 $\mathfrak{A}\models\theta[f]$，则 $\mathfrak{A}\models\bigwedge_{1\leqslant\xi<\gamma}\forall\bigcup_{\zeta<\xi}X_\zeta\exists X_\xi\varphi_\xi[f]$，因此对所有 ξ 使得 $1\leqslant\xi<\gamma$，$\mathfrak{A}\models\forall\bigcup_{\zeta<\xi}X_\zeta\exists X_\xi\varphi_\xi[f]$，所以对所有 ξ 使得 $1\leqslant\xi<\gamma$，对所有 $g_\xi\in A^X$，其中 $X=\bigcup_{\zeta<\xi}X_\zeta$，$\mathfrak{A}\models\exists X_\xi\varphi_\xi[f*g_\xi]$，从而对所有 ξ 使得 $1\leqslant\xi<\gamma$，对所有 $g_\xi\in A^X$，存在 $g'_\xi\in A^{X_\xi}$，$\mathfrak{A}\models\varphi_\xi[(f*g_\xi)*g'_\xi]$. 令 $h_\xi=g_\xi\cup g'_\xi$，因为 $X_\xi\cap\bigcup_{\zeta<\xi}X_\zeta=\varnothing$，所以易证 h_ξ 是定义域为 $\bigcup_{\zeta\leqslant\xi}X_\zeta$ 的函数. 所以对所有 ξ 使得 $1\leqslant\xi<\gamma$，$\mathfrak{A}\models\varphi_\xi[f*h_\xi]$. 但因为 $\mathfrak{A}\models\exists X_0\varphi_0[f]$，所以存在 $h_0\in A^{X_0}$ 使得 $\mathfrak{A}\models\varphi_0[f*h_0]$. 因此，对所有 $\xi<\gamma$，$\mathfrak{A}\models\varphi_\xi[f*h_\xi]$. 令 $h=\bigcup_{\xi<\gamma}h_\xi$，易证 h 是定义域为 $\bigcup_{\xi<\gamma}X_\xi$ 的函数. 因为对 $\xi,\zeta<\gamma$ 使得 $\xi\neq\zeta$，$X_\xi\cap X_\zeta=\varnothing$ 且对 $\zeta<\xi$，每一 $x\in X_\xi$ 不在 φ_ζ 中自由出现，所以 $\mathfrak{A}\models\bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_\xi[f*h]$，因此 $\mathfrak{A}\models\exists\bigcup_{\xi<\gamma}X_\xi\bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_\xi[f]$.

(3) DR_γ 和 κ_n-DR_γ 的验证如 3.2.7(2)的证明，IC_γ 和 DC_γ 的验证留给读者作为练习. □

下面引理的证明如 2.2.15(2)的证明.

4.4.2 引理 令 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 是基本系统，$\mathscr{L}'_{\kappa\lambda\rho\pi}=\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}\cup C$，$C$ 是基数适当大(后面再作具体规定)的新个体常元集，σ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$-句子，则

$$\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Sigma;\Omega)\vdash\sigma\Leftrightarrow\mathbf{B}'_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Sigma;\Omega)\vdash\sigma.\ \square$$

令 $\mathscr{L}'_{\kappa\lambda\rho\pi}=\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}\cup C$，$C$ 是新个体常元集. 称 t 是 $\mathscr{L}'_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的**基本项** $\Leftrightarrow t$ 是个体常元符号或形如 $F(c_\xi:\xi<\zeta)$，其中 $\{c_\xi:\xi<\zeta\}\subseteq C$ 且 F 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的 ζ 元函数符号使得 $0<\zeta<\rho$.

4.4.3 定义 1. 令 κ 是无穷正则基数使得对所有 $\xi<\lambda$，$(\kappa^-)^\xi=\kappa^-$(其中 κ 是 κ^- 的后继基数)，$|C|=\kappa$，$\mathbf{S}$ 是 $\mathscr{L}'_{\kappa\lambda\rho\pi}=\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}\cup C$ 的句子集的集合. 称 $\mathbf{S}$ 是(在 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 中相对 C 的)$(\kappa,\lambda,\rho,\pi)$-**一致性质** $\Leftrightarrow$ 对每一 $s\in\mathbf{S}$，$|s|<\kappa$ 且下列条件皆成立：

(C1)—(C4)的表述如 4. 2. 1 的 1. 的相应部分.

(C5) 若$\{\forall X_i\varphi_i(x_i): i\in I\}\subseteq s$ 且对任意 $C_1\subseteq C$, $|C_1|<\kappa$,则

$$s\cup\{\mathrm{SF}_{f_i}(\varphi_i): f_i\in(C_1)^{X_i}, i\in I\}\in\mathbf{S}.$$

(C6) 若$\{\exists x_i\varphi_i: i\in I\}\subseteq s$,则对$\{f_i: f_i\in C^{X_i}, i\in I\}$中某个子集$\{f_i: i\in I\}$, $s\cup\{\mathrm{SF}_{f_i}(\varphi_i): i\in I\}\in\mathbf{S}$.

(C7)的(1)和(3)的表述如 4. 2. 1 的 1. 的相应部分.

(C7)(2) 若$\{\langle t_{i_\xi}: \xi<\eta\rangle: i\in I\}$是 $\mathscr{L}'_{\kappa\lambda\rho\pi}$的基本项的序列的集合,$\{\varphi_i(t_{i_\xi}: \xi<\eta): i\in I\}$是 $\mathscr{L}'_{\kappa\lambda\rho\pi}$的原子公式或原子公式的否定的集合. 对每一 $i\in I$, $\langle c_{i_\xi}: \xi<\eta\rangle$是与$\langle t_{i_\xi}: \xi<\eta\rangle$一一对应的 C 的个体常元的序列. 若$\{\varphi_i(t_{i_\xi}: \xi<\eta): i\in I\}\cup\{c_{i_\xi}\equiv t_{i_\xi}: \xi<\eta, i\in I\}\subseteq s$,则

$$s\cup\{\varphi_i(t_{i_\xi}/c_{i_\xi}: \xi<\eta): i\in I\}\in\mathbf{S}.$$

2. 令 κ 是共尾度为 ω 的奇异基数且对所有 $\xi<\lambda$, $\kappa_n^\xi=\kappa_n$; $\rho<\lambda$. C 是新个体常元集使得 $|C|=\kappa$ 且 $C=\bigcup_{n<\omega}C_n$, 其中每一 C_n 的基数为 κ_n, $\mathbf{S}$ 是 $\mathscr{L}'_{\kappa\lambda\rho\pi}$的句子集的集合. 称 $\mathbf{S}$ 是(在 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$中相对 C 的)$(\kappa,\lambda,\rho,\pi)$-**一致性质** $\Leftrightarrow$ 对每一 $s\in\mathbf{S}$, $|s|<\kappa$,在 s 中出现的所有 $c\in C$ 属于某个 C_n 且下列条件皆成立:

(C1)—(C4)的表述如 4. 2. 1 的 2. 的相应部分.

(C5) 若$\{\forall X_i\varphi_i(x_i): i\in I\}\subseteq s$ 且 $n<\omega$,则

$$s\cup\{\mathrm{SF}_{f_i}(\varphi_i): f_i\in(\mathrm{C}_n)^{X_i}, i\in I\}\in\mathbf{S}.$$

(C6) 若$\{\exists x_i\varphi_i: i\in I\}\subseteq s$,则存在 $n<\omega$ 和$\{f_i: f_i\in(\mathrm{C}_n)^{X_i}, i\in I\}$中某个子集$\{f_i: i\in I\}$, $s\cup\{\mathrm{SF}_{f_i}(\varphi_i): i\in I\}\in\mathbf{S}$.

(C7)的(1)和(3)的表述如 4. 2. 1 的 2. 的相应部分.

(C7)(2) 若$\{\langle t_{i_\xi}: \xi<\eta\rangle: i\in I\}$是 $\mathscr{L}'_{\kappa\lambda\rho\pi}$的基本项的序列的集合,$\{\varphi_i(t_{i_\xi}: \xi<\eta): i\in I\}$是 $\mathscr{L}'_{\kappa\lambda\rho\pi}$的原子公式或原子公式的否定的集合. 对每一 $i\in I$ 和某个 $n<\omega$, $\langle c_{i_\xi}: \xi<\eta\rangle$是与$\langle t_{i_\xi}: \xi<\eta\rangle$一一对应的 C_n 的个体常元的序列. 若$\{\varphi_i(t_{i_\xi}: \xi<\eta): i\in I\}\cup\{c_{i_\xi}\equiv t_{i_\xi}: \xi<\eta, i\in I\}$

$\subseteq s$，则 $\quad s\cup\{\varphi_i(t_{i_\xi}/c_{i_\xi}:\xi<\eta):i\in I\}\in \mathbf{S}.$

4.4.4 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$-模型存在定理

若 $\mathbf{S}$ 是 $(\kappa,\lambda,\rho,\pi)$-一致性质且 $s_0\in\mathbf{S}$，则 s_0 有模型.

证明：情况 1　κ 是正则基数，且对所有 $\xi<\lambda,(\kappa^-)^\xi=\kappa^-$；$s_0\in\mathbf{S}$ 已给定. 假设我们已有 $s_n\in\mathbf{S}$，且 C_n 是 C 在 s_n 中出现的常元集，Term_n 是在 s_n 出现的 $\mathscr{L}'_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的基本项集. 因为 κ 是正则基数，且 s_n 中每一句子所包含的 C 中的常元和 $\mathscr{L}'_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的基本项的个数皆 $<\kappa$，所以 Term_n 和 C_n 的基数都小于 κ. 构造 $s_{n+1}=s_n^8$，其中 s_n^1—s_n^8 据 $(\kappa,\lambda,\rho,\pi)$-一致性质的(C2)—(C7)分别构造如下：

s_n^1—s_n^3 的构造同 4.2.2 的 s_n^1—s_n^3，

$s_n^4=s_n^3\cup\{\mathrm{SF}_{f_\varphi}(\varphi):\forall X_\varphi\,\varphi\in s_n,f_\varphi\in(\mathrm{C}_n)^{X_\varphi}\}$，

其中 X_φ 是 Var 的一恰当的变元集，

$s_n^5=s_n^4\cup\{\mathrm{SF}_{f_\varphi}(\varphi):\exists X_\varphi\,\varphi(x_\varphi)\in s_n\}$，

对一恰当的函数集 $\{f_\varphi:f_\varphi\in(\mathrm{C}_n)^{X_\varphi}\}$，

$s_n^6=s_n^5\cup\{d\equiv c:c\equiv d\in s_n;\ c,d\in C_n\}$，

$s_n^7=s_n^6\cup\{\varphi(t_\xi/c_\xi:\xi<\eta):\{\varphi(t_\xi:\xi<\eta),c_\xi\equiv t_\xi(\text{对每一 }\xi<\eta)\}\subseteq s_n;\ \text{每一 }c_\xi\in C_n;\ t_\xi\in\mathrm{Term}_n;\ \varphi\text{ 是 }\mathscr{L}'_{\kappa\lambda\rho\pi}\text{ 的原子公式或原子公式的否定}\}$，

$s_n^8=s_n^7\cup\{e_t\equiv t:t\in\mathrm{Term}_n\}$，　对一恰当的 $\{e_t:t\in\mathrm{Term}_n\}\subseteq C$.

下面的证明类似 4.2.2 证明的相应部分，所以我们只说明不同之处，请读者对照之：

$(4)'$ 设 $\varphi=\forall X\psi$，因为 $\varphi\neg\in s_{n+1}$，所以 $\exists X\neg\psi\in s_{n+1}$，因此对某个 $f\in(\mathrm{C}_n)^X$，$\neg\mathrm{SF}_f(\psi)\in s_{n+2}$. 据归纳假设，$\mathfrak{A}\models\neg\mathrm{SF}_f(\psi)$，因此 $\mathfrak{A}\models\neg\forall X\psi$.

$(5)'$ 设 $\varphi=\exists X\psi$，因为 $\varphi\neg\in s_{n+1}$，所以 $\forall X\neg\psi\in s_{n+1}$，则对所有 $f\in(\mathrm{C}_\omega)^X$，$\neg\mathrm{SF}_f(\psi)\in s_\omega$. 据归纳假设，对所有 $f\in(\mathrm{C}_\omega)^X$，$\mathfrak{A}\models\neg\mathrm{SF}_f(\psi)$. 若 $\mathfrak{A}\not\models\neg\exists X\psi$，则对某个 $f\in(\mathrm{C}_\omega)^X$，$\mathfrak{A}\models\mathrm{SF}_f(\psi)$，矛盾.

情况 2　κ 是共尾度为 ω 的奇异基数(即 $\kappa=\bigcup_{n<\omega}\kappa_n$，其中每一

$\kappa_n<\kappa$)且对所有 $\xi<\lambda,\kappa_n^{\xi}=\kappa_n$；$\rho<\lambda$. C 是新个体常元集使得 $|C|=\kappa$ 且 $C=\bigcup_{n<\omega}C_n$，其中每一 C_n 的基数为 κ_n：

令 F^{ζ} 是在 s_0 中出现的 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的 ζ 元函数符号的集合，B 是在 s_0 中出现的 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的个体常元符号的集合. 因为 F^{ζ} 和 B 的基数可以是 κ，所以我们可以把它们写作可数并 $\mathrm{F}^{\zeta}=\bigcup_{n<\omega}\mathrm{F}_n^{\zeta}$；$B=\bigcup_{n<\omega}B_n$，使得

$$|\mathrm{F}^{\zeta}|\leqslant\kappa_n,\quad |B_n|\leqslant\kappa_n.$$

对每一 $n<\omega$，令 Term_n 是

$C_n\cup B_n\cup\{F(c_{\xi}:\xi<\zeta):F\in\mathrm{F}_n^{\zeta},\{c_{\xi}:\xi<\zeta\}\subseteq C_n,0<\zeta<\rho\}$.

因为 $|F_n^{\zeta}|\leqslant\kappa_n<\kappa$ 且 $|(C_n)^{\zeta}|=(\kappa_n)^{\zeta}=\kappa_n$，所以 $|\mathrm{Term}_n|<\kappa$. 现在令 $s_n=s_n^8$，其中 s_n^1—s_n^8 如情况 1，除了我们只考虑 s_n 中的合取 $\wedge\Sigma$ 和 $\vee\Sigma$ 使得 $|\Sigma|\leqslant\kappa_n$. 如同情况 1 那样构造 s_0 的模型 $\mathfrak{A}$，显然在这种情况下，$\mathfrak{A}$ 的基数至多为 κ. □

4.4.5 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$-完全性引理

(1) 令 $\mathscr{L}'_{\kappa\lambda\rho\pi}$如前规定，$\kappa$ 是无穷正则基数，对所有 $\xi<\lambda,(\kappa^-)^{\xi}=\kappa^-$，令 $\gamma<\kappa$ 且 Σ 是幂$<\kappa$ 的句子集，则

Σ 相对 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\mathrm{DR}_{\gamma};\mathrm{IC}_{\gamma})$ 一致

$\Leftrightarrow$ 存在$(\kappa,\lambda,\rho,\pi)$-一致性质 $\mathbf{S}$ 使得 $\Sigma\in\mathbf{S}$.

(2) 令 κ 是共尾度为 ω 的奇异基数(即 $\kappa=\bigcup_{n<\omega}\kappa_n$，其中每一 $\kappa_n<\kappa$)且对所有 $\xi<\lambda,\kappa_n^{\xi}=\kappa_n$；$\rho<\lambda$；$\gamma<\kappa$ 且 Σ 是幂$<\kappa$ 的句子集，则

Σ 相对 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\kappa_n\text{-}\mathrm{DR}_{\gamma};\mathrm{IC}_{\gamma})$ 一致

$\Leftrightarrow$ 存在$(\kappa,\lambda,\rho,\pi)$-一致性质 $\mathbf{S}$ 使得 $\Sigma\in\mathbf{S}$.

(3) 令 κ 是强极限基数，$\gamma<\kappa$，且 Σ 是幂$<\kappa$ 的句子集，则

Σ 相对 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\mathrm{D}_{\gamma}^{+};\mathrm{IC}_{\gamma})$ 一致

$\Leftrightarrow$ 存在$(\kappa,\lambda,\rho,\pi)$-一致性质 $\mathbf{S}$ 使得 $\Sigma\in\mathbf{S}$.

证明：(1) “$\Leftarrow$”如前所证. “$\Rightarrow$”：首先证明若 $\mathbf{S}$ 是 $\mathscr{L}'_{\kappa\lambda\rho\pi}$的所有句子集 s 的集合使得 $|s|<\kappa$ 且 s 相对 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\mathrm{DR}_{\gamma};\mathrm{IC}_{\gamma})$一致，则 $\mathbf{S}$ 是 $(\kappa,\lambda,\rho,\pi)$-一致性质.

令 s 是 $\mathbf{S}$ 的任意元素，对 $n=1,\cdots,7$，我们来验证$(4.4)_n$.

(C1)—(C4)的验证如 4.2.8 的相应部分.

(C5)：设$\{\forall X_i\varphi_i : i\in I\}\subseteq s$ 且对任意 $C_1\subseteq C$，$|C_1|<\kappa$ 但

$$s\cup\{\mathrm{SF}_{f_i}(\varphi_i) : f_i\in(C_1)^{X_i}, i\in I\}\notin\mathbf{S}.$$

因为$|C_1|<\kappa$，且$|X_i|<\lambda$，所以$|(C_1)^{X_i}|\leqslant(\kappa^-)^{|X_i|}=\kappa^-$，因此

$$|\{\mathrm{SF}_{f_i}(\varphi_i) : f_i\in(C_1)^{X_i}, i\in I\}|<\kappa.$$

据假设， $\vdash\bigwedge s\to\neg\bigwedge_{i\in I}\bigwedge\{\mathrm{SF}_{f_i}(\varphi_i) : f_i\in(C_1)^{X_i}\}.$

据公理 4， $\vdash\bigwedge s\to\neg\bigwedge_{i\in I}\forall X_i\varphi_i.$

(C6)：设$\{\exists X_i\varphi_i : i\in I\}\subseteq s$ 但对$\{f_i : f_i\in(C_1)^{X_i}, i\in I\}$中所有这样的子集$\{f_i : i\in I\}$，$s\cup\{\mathrm{SF}_{f_i}(\varphi_i) : i\in I\}\notin\mathbf{S}$. 我们能找到某个集合$\{g_i : i\in I\}$使得$\bigcup\{\mathrm{Ran}(g_i) : i\in I\}\subseteq C$ 是不在 s 中出现的$|I|$个不同的个体常元集的并(其中的常元都互不相同)，则

$$\vdash\bigwedge s\to\neg\bigwedge_{i\in I}\mathrm{SF}_{g_i}(\varphi_i).$$

显然，我们也能找到$|I|$个个体变元的集合$\{Y_i : i\in I\}$(其中的变元都互不相同)使得在$\bigwedge s\to\neg\bigwedge_{i\in I}\mathrm{SF}_{g_i}(\varphi_i)$的形式证明中$\bigcup\{Y_i : i\in I\}$中的元素都不出现，据 2.2.15(2)，

$$\vdash\bigwedge s\to\neg\bigwedge_{i\in I}\varphi_i(Y_i),$$

据公理 2，$\vdash\bigwedge s\to\bigvee_{i\in I}\neg\varphi_i(Y_i)$，据 IC_7，$\vdash\bigwedge s\to\bigvee_{i\in I}\forall Y_i\neg\varphi_i$，据 2.2.14 和公理 2， $\vdash\bigwedge s\to\neg\bigwedge_{i\in I}\exists X_i\varphi_i.$

(C7)：(1)和(3)的验证如同 4.2.8 证明的相应部分.

(C7)(2) 令$\{\langle t_{i_\xi} : \xi<\eta\rangle : i\in I\}$是 $\mathscr{L}'_{\kappa\lambda\mu}$的基本项的序列的集合，$\{\varphi_i(t_{i_\xi} : \xi<\eta) : i\in I\}$是 $\mathscr{L}'_{\kappa\lambda\mu}$的原子公式或原子公式的否定的集合. 对每一$i\in I$，$\langle c_{i_\xi} : \xi<\eta\rangle$是与$\langle t_{i_\xi} : \xi<\eta\rangle$一一对应的 C 的个体常元的序列. 假设$\{\varphi_i(t_{i_\xi} : \xi<\eta) : i\in I\}\cup\{c_{i_\xi}\equiv t_{i_\xi} : \xi<\eta, i\in I\}\subseteq s$ 但 $s\cup\{\varphi_i(t_{i_\xi}/c_{i_\xi} : \xi<\eta) : i\in I\}\notin\mathbf{S}$. 则我们有

$$\vdash \bigwedge s \to \neg \bigwedge_{i\in I} \varphi_i(t_{i_\xi}/c_{i_\xi}:\xi<\eta),$$

而据公理 6 的(2)，从前者易得，

$$\vdash \bigwedge s \to \neg [\bigwedge_{i\in I} \varphi_i(t_{i_\xi}:\xi<\eta) \wedge \bigwedge_{i\in I}(\bigwedge_{\xi<\eta}(c_{i_\xi}\equiv t_{i_\xi}))].$$

(2)的证明类似(1)，只是在验证(C4)时用 κ_n-DR$_\gamma$ 代替 DR$_\gamma$.

(3)的情况的证明也类似(1). 这里唯一不平凡的情况是如下对(C4)的验证：

设$\{\bigvee \Phi_i:i\in I\}\subseteq s$ 但对所有 $f\in \prod_{i\in I}\Phi_i$，$s\cup\{f(i):i\in I\}\notin \mathbf{S}$. 所以对所有 $f\in \prod_{i\in I}\Phi_i$，$\vdash \bigwedge s \to \neg \bigwedge_{i\in I} f(i)$. 因为 $|I|<\kappa$ 且 κ 是强极限基数，所以 $|\prod_{i\in I}\Phi_i|<\kappa$，因此

$$\vdash \bigwedge s \to \bigwedge\{\neg \bigwedge_{i\in I} f(i):\ f\in \prod_{i\in I}\Phi_i\}.$$

所以据 D_γ^+，我们有，

$$\vdash \bigwedge_{i\in I} \bigvee \Phi_i \to \bigvee\{\bigwedge_{i\in I} f(i):\ f\in \prod_{i\in I}\Phi_i\},$$

所以易得 $$\vdash \bigwedge s \to \neg \bigwedge_{i\in I} \bigvee \Phi_i.$$

综上所述，若 Σ 相对上述系统一致，则存在$(\kappa,\lambda,\rho,\pi)$-一致性质 $\mathbf{S}$ 使得 $\Sigma\in\mathbf{S}$. □

4.4.6 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$-完全性定理 (1) κ 是无穷正则基数使得对所有 $\xi<\lambda$，$(\kappa^-)^\xi=\kappa^-$，$\gamma<\kappa$，则 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\mathrm{DR}_\gamma;\mathrm{IC}_\gamma)$ 是完全的.

(2) 令 κ 是共尾度为 ω 的奇异基数且对所有 $\xi<\lambda$，$\kappa_n^\xi=\kappa_n$；$\rho<\lambda$；$\gamma<\kappa$，则 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\kappa_n\text{-DR}_\gamma;\mathrm{IC}_\gamma)$ 是完全的.

(3) 令 κ 是强极限基数，$\gamma<\kappa$，则 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\mathrm{D}_\gamma^+;\mathrm{IC}_\gamma)$ 是完全的.

证明：证明据 4.4.1，4.4.2，4.4.4 和 4.4.5. □

练　习

4.4.7　验证 4.4.1(3)的 IC$_\gamma$ 和 DC$_\gamma$ 的有效性.

4.4.8　用一致性质的方法证明第三章用代数方法证明的演绎系统的完全性.

第 5 章　独立性定理

本章讨论无穷逻辑的两种重要的独立性. 一种是演绎系统 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta;\Omega)$的公理和推理规则的独立性,我们称之为系统独立性. 第二种是$\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的理论的公理集的语义独立性,我们称之为理论(的语义)独立性.

本章§1讨论系统独立性,集中讨论分配公理、选择公理相对各种演绎系统$\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta;\Omega)$的独立性问题. 本节的主要成果由Karp在其[1962]做出,后来又在其[1964]得到进一步的阐述和概括. 在本节命题逻辑部分,Karp用布尔代数的有关结果直接得到分配公理(普通分配公理、Chang-分配公理)相对命题逻辑系统的独立性. 在谓词逻辑部分则引入一类特殊的泛结构,利用它的有关性质来得到选择公理相对谓词逻辑系统的独立性.

在§2我们主要讨论理论的语义独立性. 这一节的主要成果在$\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$的情况下,由J.-P. Caicedo在其[1981]做出. 我们在此平凡地引入γ-独立概念并把$\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$的结果概括到$\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的情况. 最后我们引入理论相对演绎系统的语法独立性概念并指出在某些条件下,理论的语义独立性概念和语法独立性概念重合.

§1　演绎系统$\mathrm{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta;\Omega)$的独立性

5.1.1 定义　令$\mathbf{B}_1=\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta;\Omega)$和$\mathbf{B}_2=\mathbf{B}'_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta_1;\Omega_1)$是两个演绎系统.

(1) 我们称 $\mathbf{B}_1 \doteq \mathbf{B}_2 \Leftrightarrow \mathbf{B}_1$ 和 $\mathbf{B}_2$ 的内定理相同.

(2) 称 $\mathbf{B}_1 \subseteq \mathbf{B}_2 \Leftrightarrow \mathbf{B}_1$ 的每一内定理是 $\mathbf{B}_2$ 的内定理.

(3) 称 $\mathbf{B}_1 \subset \mathbf{B}_2 \Leftrightarrow \mathbf{B}_1 \subseteq \mathbf{B}_2$ 但 $\mathbf{B}_1 \neq \mathbf{B}_2$.

下面我们首先考察命题逻辑诸系统的独立性.

一、命题逻辑的系统独立性

为了节省篇幅,我们不考虑基本系统 $\mathbf{B}_\kappa$ 的公理模式和推理规则的独立性,而只是考虑分配公理的独立性问题.

我们知道分配公理可以看作是布尔代数的分配律对无穷逻辑的移植. 它们的独立性直接来自布尔代数的下列相关结果:

5.1.2 引理(Karp,[1964]) (1) 每一 γ^+-可表示的布尔代数是 γ-可表示的. 若 γ 是无穷正则基数,则存在一 γ-可表示的完全布尔代数使之不是 γ^+-可表示的. (若 γ 是奇异基数,则是否存在这样的代数,甚至是否存在只是 γ^+-完全的代数,尚不可知.)

(2) 每一 ω-完全布尔代数是 ω-可表示的. 若 $\gamma = \bigcup\limits_{n<\omega} \gamma_n$,其中对每一 $n<\omega, 2^{\gamma_n}<\gamma$,则 γ-完全布尔代数 $\mathfrak{B}$ 是 γ-可表示的 $\Leftrightarrow$ 对所有 $n<\omega$, $\mathfrak{B}$ 是 γ_n-可表示的. (对所有其它无穷极限基数 γ,是否存在一个 $\nearrow\gamma$-可表示但不是 γ-可表示的 γ-完全布尔代数尚不可知.)

(3) 若 γ 是无穷正则基数,则存在一完全布尔代数对所有 $\delta<\gamma$ 满足 δ-分配律但不满足 γ-分配律.

(4) 若 γ 是奇异基数且对所有 $\delta<\gamma, 2^\delta<2^\gamma$,则存在对所有 δ 满足 δ-分配律但不满足 γ-分配律的 2^γ-完全布尔代数. (但在上述前提中,删去条件"对所有 $\delta<\gamma, 2^\delta<2^\gamma$",则是否存在这样的布尔代数尚不可知.)

(5) 每一满足 γ-分配律的 γ-完全布尔代数是 γ-可表示的. 对每一无穷正则基数 γ,存在一个不满足 γ-分配律但是 γ-可表示的完全布尔代数. (若 γ 是奇异基数,则是否存在这样的代数尚不可知,即使只要求该代数仅仅是 2^γ-完全的也是如此.)

(6) 每一 2^γ-可表示的布尔代数满足 γ-分配律. (是否存在满足 γ-分配律但不是 2^γ-可表示的 2^γ-完全布尔代数尚不可知.)

证明:证(1) 我们只证下列命题:

若 γ 是无穷正则基数,则存在一 γ-可表示的完全布尔代数使之不是 γ^+-可表示的.

令 γ 是无穷正则基数. 我们要用拓扑空间的正则开集来构造一 γ-可表示的完全布尔代数 $\mathfrak{B}_\gamma$ 使得 $\mathfrak{B}_\gamma$ 不满足下列不等式:

$$\bigwedge_{\alpha<\gamma^+}(\bigvee_{\beta<\gamma}x_{\alpha\beta})\leqslant\bigvee\{\bigvee_{\beta<\gamma}(x_{\alpha\beta}\wedge x_{\alpha_1\beta}):\alpha,\alpha_1<\gamma,\alpha\neq\alpha_1\}. \qquad (5.1)$$

因为(5.1)在 γ^+-集合域中成立,所以 $\mathfrak{B}_\gamma$ 不是 γ^+-可表示的.

把集合 $\mathscr{X}=\{f:\ f:\gamma^+\to\gamma$ 是单射$\}$看作拓扑空间的点集. 我们把空集$\varnothing$和下列集合作为 $\mathscr{X}$ 的开子集的拓扑基:

$$\mathbf{S}(g)=\{f:\ f\in\mathscr{X}\text{ 且 }f\upharpoonright\mathrm{Dom}(g)=g\},$$

其中 g 是从 γ 的一幂 $<\gamma$ 的子集到 γ^+ 中的单射. 若$\{\mathbf{S}(g_i):i\in I\}$是幂 $<\gamma$ 个非空基本集的聚合,则易证

$$\bigcap\{\mathbf{S}(g_i):i\in I\}\neq\varnothing\Leftrightarrow\bigcup\{g_i:i\in I\}\text{是一单射}.$$

因为 γ 是正则的,所以我们易得 $|\bigcup\{\mathrm{Dom}(g_i):i\in I\}|<\gamma$,因此 $\bigcap\{\mathbf{S}(g_i):i\in I\}$或是空的,或等于 $\mathbf{S}(g)$,其中 $g=\bigcup\{g_i:i\in I\}$. 易见这个基本开集的聚合在 $<\gamma$ 个元素的交下封闭. 因为

$$\bigcup\{g_i:i\in I\}\text{是单射}\Leftrightarrow\text{对每一 }i,j\in I,g_i\cup g_j\text{ 是单射},$$

所以我们有下列紧致性质:

若 C 是 $<\gamma$ 个非空基本开集的聚合使得没有一对元素有空交性质,则 $\bigcap C$ 是非空基本开集. (5.2)

因为

$$\mathscr{X}-\mathbf{S}(g)=\mathscr{X}-\bigcap\{\mathbf{S}(\{\langle\beta,\alpha\rangle\}):\langle\beta,\alpha\rangle\in g\}$$
$$=\bigcup\{\mathscr{X}-\mathbf{S}(\{\langle\beta,\alpha\rangle\}):\langle\beta,\alpha\rangle\in g\},$$

而对任意一对$\langle\beta,\alpha\rangle\in\gamma\times\gamma^+$,

$$\mathscr{X}-\mathbf{S}(\{\langle\beta,\alpha\rangle\})=\bigcup\{\mathbf{S}(\{\langle\beta,\alpha_1\rangle\}):\alpha,\alpha_1<\gamma^+\text{ 且 }\alpha\neq\alpha_1\},$$

所以基本集是开闭集.

令 $\mathfrak{B}_\gamma$ 是上述拓扑空间的正则开集组成的代数，则 B_γ 是由在下列无穷运算下封闭的 $b=\text{in cl } b$ 构成：

$$\neg b=\text{in }(\mathscr{X}-b),$$

$$\bigvee_\xi \mathbf{S}_\xi=\text{in cl}\bigcup_\xi \mathbf{S}_\xi,\quad \bigwedge_\xi \mathbf{S}_\xi=\text{in cl}\bigcap_\xi \mathbf{S}_\xi,$$

其零元是 $\varnothing$，单位元是 $\mathscr{X}$. 这样的代数总是完全的，证明这个结论的细节请见 R. Sikorski 的[1960]. 下证：

$$\delta<\gamma \text{ 且对 } \xi<\delta, \mathbf{S}_\xi\in B_\gamma \Rightarrow \bigcap\{\mathbf{S}_\xi:\xi<\delta\}=\wedge\{\mathbf{S}_\xi:\xi<\delta\}\in B_\gamma. \tag{5.3}$$

若 $\delta<\gamma$，则 δ 个无处稠密集(nowhere dense set)的并是无处稠密的. (5.4)

因为 δ 个开集的交仍是开集，所以它仍在 B_γ 中，因此(5.3)成立. 而据(5.2)的紧致性质，把经典 Baire-范畴(category)论证扩张到 δ 就易得(5.4). 下证：

$\mathfrak{B}_\gamma$ 既不是 γ^+-可表示的，也不满足 γ-分配律. (5.5)

证明：若 $\mathbf{S}(g)$ 是任意非空基本开集使得若 $\alpha\in\text{Ran}(g)$，则 $\mathbf{S}(g)\subseteq\mathbf{S}(\{\langle\beta,\alpha\rangle\})$，其中 $\beta=g^{-1}(\alpha)$. 设 $\mathbf{S}(g)$ 是非空基本开集使得 $\alpha\notin\text{Ran}(g)$，因为 $|\text{Dom}(g)|<\gamma$，所以能选择 $\beta\in\gamma-\text{Dom}(g)$. 对这样一个 β，$g\cup\{\langle\beta,\alpha\rangle\}$ 是单射，因而 $\mathbf{S}(g)\cap\mathbf{S}(\{\langle\beta,\alpha\rangle\})\neq\varnothing$. 因为每一非空开集与 $\bigcup\{\mathbf{S}(\{\langle\beta,\alpha\rangle\}):\beta<\gamma\}$ 相交，所以

$$\bigwedge_{\alpha<\gamma^+}\Big(\bigvee_{\beta<\gamma}\mathbf{S}(\{\langle\beta,\alpha\rangle\})\Big)=\mathscr{X}\in B_\gamma.$$

另一方面，对任意 $\beta<\gamma$，和 $\alpha,\alpha_1<\gamma^+$ 使得 $\alpha\neq\alpha_1$，有

$$\mathbf{S}(\{\langle\beta,\alpha\rangle\})\cap\mathbf{S}(\{\langle\beta,\alpha_1\rangle\})=\varnothing.$$

由于(5.1)不成立，所以 $\mathfrak{B}_\gamma$ 不是 γ^+-可表示的.

要证明 $\mathfrak{B}_\gamma$ 不满足 γ-分配律，只须证明它不满足 (γ,γ^+)-分配律，因为众所周知，一个满足 γ-分配律的 2^γ-完全布尔代数满足 $(\gamma,2^\gamma)$-分配律(见 Smith-Tarski[1957]或 R. Pierce[1958]). 对 $\beta<\gamma$，$\alpha<\gamma^+$，令 $\mathbf{S}_{\beta\alpha}=\mathbf{S}(\{\langle\beta,\alpha\rangle\})$，则对所有 $\beta<\gamma$，$\bigcup\{\mathbf{S}_{\beta\alpha}:\alpha<\gamma^+\}=\mathscr{X}$，因此所有这些并在 $\mathfrak{B}_\gamma$ 中是 $\mathscr{X}$. 另一方面，若 $h:\gamma\to\gamma^+$ 是映

射，则$\bigcap\{\mathbf{S}_{\beta,h(\beta)}:\beta<\gamma\}$或是空的，或是一单点．在这两种情况下，

$$\wedge\{\mathbf{S}_{\beta,h(\beta)}:\beta<\gamma\}=\varnothing.$$

所以(γ,γ^+)-分配律在$\mathfrak{B}_\gamma$中不满足．

最后我们来证明：

对所有$\delta<\gamma$和基数κ，$\mathfrak{B}_\gamma$是γ-可表示且满足(δ,κ)-分配律．

对γ-可表示性，我们要验证 3.2.29 的条件(3.20)：

任给$b\neq 0$和阵列$\langle b_{\alpha\beta}:\alpha,\beta<\gamma\rangle$使得对所有$\alpha<\gamma$，$\bigvee_{\beta<\gamma}b_{\alpha\beta}=1$，则存在选择集$C$使得$C\cup\{b\}$不包含互补对．

假设$\mathbf{S}\in B_\gamma$且$\langle \mathbf{S}_{\beta\alpha}:\alpha,\beta<\gamma\rangle$是$B_\gamma$的元素的阵列使得$\mathbf{S}\neq\varnothing$且对所有$\beta<\gamma$，$\vee\{\mathbf{S}_{\beta\alpha}:\alpha<\gamma\}=\mathscr{X}$．我们要证这个阵列有选择集$C$使得$C\cup\{\mathbf{S}\}$不包含互补对．

选择非空基本集$\mathbf{S}(g)\subseteq\mathbf{S}$．假设对$\beta<\gamma$，我们已对所有$\eta<\beta$，选择了$\alpha_\eta<\gamma$和基本集$\mathbf{S}(g_\eta)$使得

$$\varnothing\neq\mathbf{S}(g)\cap\bigcap\{\mathbf{S}(g_\xi):\xi\leqslant\eta\}\subseteq\mathbf{S}_{\eta,\alpha_\eta}.$$

下证：对β能选择我们所需的α_β和$\mathbf{S}(g_\beta)$．据(5.2)的紧致性质，$\mathbf{S}(g)\cap\bigcap\{\mathbf{S}(g_\xi):\xi<\beta\}$是非空基本开集．因为$\mathrm{cl}(\bigcup\{\mathbf{S}_{\beta\alpha}:\alpha<\gamma\})=\mathscr{X}$，所以存在$\alpha_\beta<\gamma$使得

$$\mathbf{S}(g)\cap\bigcap\{\mathbf{S}(g_\xi):\xi<\beta\}\cap\mathbf{S}_{\beta,\alpha_\beta}\neq\varnothing.$$

显见这个集合是开集，因此包含非空基本开集$\mathbf{S}(g_\beta)$，所以

$$\varnothing\neq\mathbf{S}(g)\cap\bigcap\{\mathbf{S}(g_\xi):\xi\leqslant\beta\}\subseteq\mathbf{S}_{\beta,\alpha_\beta}.$$

令$C=\{\mathbf{S}_{\beta,\alpha_\beta}:\beta<\gamma\}$．显然，序列$\langle\alpha_\beta:\beta<\gamma\rangle$已选出使得$C\cup\{\mathbf{S}\}$不能包含互补对．

最后我们来证明$\mathfrak{B}_\gamma$满足(δ,κ)-分配律．我们用 D. S. Scott 在其[1957]中的论证．这里只须证明：

若$\langle b_{\beta\alpha}:\beta<\delta,\alpha<\kappa\rangle$是$B_\gamma$的元素的阵列使得对所有$\beta<\delta$，并$\vee\{b_{\beta\alpha}:\alpha<\kappa\}=b\neq\varnothing$，则该阵列有选择集$C$使得$\wedge C\neq\varnothing$．

假设相反，对所有选择集C，交$\wedge C=\varnothing$．因为在$\mathfrak{B}_\gamma$中，$\wedge C=\bigcap C$，所以$\bigcap C=\varnothing$．据关于集合的(δ,κ)-分配律，

$$\bigcup\{\bigcap C: C\text{ 是选择集}\}=\bigcap_{\beta<\delta}(\bigcup_{\alpha<\kappa}b_{\beta\alpha})=\varnothing.$$

但对每一 $\beta<\delta, b-\bigcup_{\alpha<\kappa}b_{\beta\alpha}$是无处稠密的，因为每一横排$\langle b_{\beta\alpha}:\alpha<\gamma\rangle$的并都是 b. 所以据(5.4)，

$$\bigcup_{\beta<\delta}(b-\bigcup_{\alpha<\kappa}b_{\beta\alpha})=b-\bigcap_{\beta<\delta}(\bigcup_{\alpha<\kappa}b_{\beta\alpha})$$

是无处稠密的. 但这个集合就是 $b\neq\varnothing$且 $b\in B_\gamma$，这就与 $b=\text{in cl } b$ 矛盾. **注意**：我们在此没有用连续统假说.

证(2)：例 3.2.3 构造了一个 γ^+-语义一致但不可满足的 $\mathscr{L}_{\gamma^+}$ 的公式集. 这个例子提示了相应的代数. 若修改这个构造能证明：

存在一个 γ^+-语义一致但不可满足的 $\mathscr{L}_\gamma$-公式集

$\Rightarrow$ 存在$\nearrow\gamma$-可表示但不是 γ-可表示的完全布尔代数，

则(2)中未解决的问题至少对使上述集合存在的正则基数 γ 是能解决的.

证(3)：E. C. Smith 在其[1956]，Scott 在其[1957]给出下例：

令 γ 是无穷正则基数，则存在一完全布尔代数使得它是 γ-可表示的，且对所有 $\beta<\gamma$ 和所有基数 κ，满足(β,κ)-分配律但不满足 γ-分配律.

若我们假设广义连续统假说 $\gamma^+=2^\gamma$，则这些代数也不是 γ^+-分配的，因为 γ-分配律是一 γ^+-公式.

(4)—(6)的证明请读者补充. □

注意：上述引理(1)—(6)中关于布尔代数的完全性的假设是本质的，不能删去.

据 5.1.2，我们可以把分配公理的独立性总结如下：

5.1.3 定理(Karp，[1964])

(1) 若 $\gamma^+<\kappa$ 是无穷基数，且 γ 是正则基数，则

$$\mathbf{B}_\kappa(\mathrm{CD}_\gamma)\subset\mathbf{B}_\kappa(\mathrm{CD}_{\gamma^+});$$

这就说明了 CD_{γ^+}独立于 $\mathbf{B}_\kappa(\mathrm{CD}_\gamma)$. 若 γ 是奇异基数，则

$$\mathbf{B}_\kappa(\mathrm{CD}_\gamma)\subseteq\mathbf{B}_\kappa(\mathrm{CD}_{\gamma^+});$$

但是否有关系$\subset$还不清楚.

(2) 若 $\gamma<\kappa$ 是无穷极限基数,则

$$\gamma=\omega \Rightarrow \mathbf{B}_\kappa(\mathrm{CD}_\gamma)=\mathbf{B}_\kappa.$$

这说明这时的 CD_γ 不独立于 $\mathbf{B}_\kappa$.

若 $\gamma=\bigcup_{n<\omega}\gamma_n$,其中对每一 $n<\omega$, $2^{\gamma_n}<\kappa$,则

$$\mathbf{B}_\kappa(\{\mathrm{CD}_\delta:\delta<\gamma\})=\mathbf{B}_\kappa(\mathrm{CD}_\gamma).$$

对所有其它这样的 γ,

$$\mathbf{B}_\kappa(\{\mathrm{CD}_\delta:\delta<\gamma\})\subseteq\mathbf{B}_\kappa(\mathrm{CD}_\gamma);$$

但是否有关系$\subset$还不清楚.

(3) 若 $\gamma<\kappa$ 是无穷正则基数使得 $2^\gamma<\kappa$,则

$$\mathbf{B}_\kappa(\{\mathrm{D}_\delta:\delta<\gamma\})\subset \mathbf{B}_\kappa(\mathrm{D}_\gamma).$$

(4) 若 $\gamma<\kappa$ 是奇异基数使得 $2^\gamma<\kappa$,则

$$\mathbf{B}_\kappa(\{\mathrm{D}_\delta:\delta<\gamma\})\subseteq\mathbf{B}_\kappa(\mathrm{D}_\gamma);$$

但是否有关系$\subset$还不清楚.

若对所有 $\delta<\gamma$,还有 $2^\delta<2^\gamma$,则

$$\mathbf{B}_\kappa(\{\mathrm{D}_\delta:\delta<\gamma\})\subset \mathbf{B}_\kappa(\mathrm{D}_\gamma).$$

(5) 若 $\gamma<\kappa$ 是无穷基数使得 $2^\gamma<\kappa$,则

$$\mathbf{B}_\kappa(\mathrm{CD}_\gamma)\subseteq\mathbf{B}_\kappa(\mathrm{D}_\gamma).$$

若 $\gamma<\kappa$ 还是正则基数,则

$$\mathbf{B}_\kappa(\mathrm{CD}_\gamma)\subset \mathbf{B}_\kappa(\mathrm{D}_\gamma);$$

当 γ 是奇异基数时,是否有关系$\subset$还不清楚.

(6) 若 $\gamma<\kappa$ 是无穷基数使得 $2^\gamma<\kappa$,则

$$\mathbf{B}_\kappa(\mathrm{D}_\gamma)\subseteq\mathbf{B}_\kappa(\mathrm{CD}_{2^\gamma});$$

但是否有关系$\subset$还不清楚. □

说明:上述(4)的第 2 个结论是 Gregory 在其[1971]提到的.

据上述定理的各种独立性,我们可以相应地证明某些系统的不完全性,下面就是其中的一个:

5.1.4 推论(GCH) 令 $\kappa>\omega_1$ 是弱不可达基数,φ 是 $\mathscr{L}_\kappa$ 的有效式,则 $\mathbf{B}_\kappa(\varphi)$是不完全的.

证明:因为 $\kappa>\omega_1$ 是弱不可达基数,所以存在无穷正则基数 $\gamma<\kappa$ 使得 φ 是 $\mathscr{L}_\gamma$ 的公式. 令 $PR(\varphi)=\{p_\xi:\xi<\delta\}$ 是 φ 的所有初始命题符号的集合使得 $PR(\varphi)$ 可以用序数 $\delta<\gamma$ 来指标. 对 $PR(\varphi)$ 的每一真值赋值 f,令 $\theta_f=\bigwedge_{\xi<\delta}f'(p_\xi)$,其中若 $f(p_\xi)=1$,则 $f'(p_\xi)=p_\xi$;若 $f(p_\xi)=0$,则 $f'(p_\xi)=\neg p_\xi$. 令 $\mathscr{L}_\kappa(PR(\varphi))$ 是由 $PR(\varphi)$ 作为初始命题符号集构成的语言,Δ 是下列公式集

$\{\psi:\psi$ 是 $\mathscr{L}_\kappa(PR(\varphi))$ 的公式,且 f 满足 $\psi\Rightarrow \mathbf{B}_\kappa\vdash\theta_f\to\psi$;

f 满足 $\neg\psi\Rightarrow \mathbf{B}_\kappa\vdash\theta_f\to\neg\psi\}$.

据 3.2.16 的证明的前半部分,我们有 $\Delta=\mathrm{Form}(\mathscr{L}_\kappa(PR(\varphi)))$. 因此对所有 $PR(\varphi)$ 的真值赋值 $\{f_\eta:\eta<2^\delta\}$,有 $\mathbf{B}_\kappa\vdash\theta_{f_\eta}\to\varphi$. 因为 $2^\delta<\kappa$,所以据合取规则和 2.2.7(3)(c),

$$\mathbf{B}_\kappa\vdash\bigvee_{\eta<2^\delta}\theta_{f_\eta}\to\varphi.$$

显然,阵列 $\langle f'_\eta(p_\xi):\xi<\delta,\eta<2^\delta\rangle$ 的每一选择集对某个 $\xi<\delta$,包含 p_ξ 和 $\neg p_\xi$. 因为 **GCH** 存在,所以 $\delta<\gamma\Rightarrow 2^\delta\leqslant\gamma$. 据 3.2.11,$\bigvee_{\eta<2^\delta}\theta_{f_\eta}$ 是 CD_γ 的演绎后承,因此我们有 $\mathbf{B}_\kappa(CD_\gamma)\vdash\varphi$,从而 $\mathbf{B}_\kappa(\varphi)\subseteq\mathbf{B}_\kappa(CD_\gamma)$. 据 5.1.3(1),$\mathbf{B}_\kappa(\varphi)\subset\mathbf{B}_\kappa(CD_{\gamma^+})$. 据 3.2.7(2),$CD_{\gamma^+}$ 是有效式,所以存在 CD_{γ^+} 的特例 ψ 使得 $\mathbf{B}_\kappa(\varphi)\nvdash\psi$ 但 $\mathbf{B}_\kappa(\varphi)\models\psi$. 因此 $\mathbf{B}_\kappa(\varphi)$ 是不完全的. □

注意:当 $\kappa>\omega$ 时,只有当 $\kappa=\gamma^+$,其中 $\gamma=\bigcup_{n<\omega}\gamma_n$ 且对每一 $n<\omega$,$2^{\gamma_n}\leqslant\gamma$ 时,我们才能通过增加单个公理(而不是公理模式)找到一个完全的命题演算系统. 所以上述推论告诉我们,当 $\mathbf{B}_\kappa(\varphi)\subset\mathbf{B}_\kappa(CD_{\gamma^+})$ 且 $\kappa>\omega_1$ 是弱不可达时,不可能找到一个完全的命题逻辑系统 $\mathbf{B}_\kappa(\varphi)$.

二、谓词逻辑的系统独立性

本节我们要引入一类特殊的结构——泛结构(general struc-

ture)，并用它们所具有的特殊性质来考查选择公理模式 BH_γ，DBH_γ 和析取概括规则 IC_γ，DC_γ 的独立性问题.

5.1.5 定义 令 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 是带有个体变元 Var 的语言，称 $\mathfrak{G}\mathfrak{A}=\langle A,H,\mathbf{G}\rangle$ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的**泛结构** $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{A}=\langle A,H\rangle$ 是 1.1.6 定义的普通结构，赋值映射集 $\mathbf{G}$ 是 A^{Var} 的非空子集且满足：

(1) 若 $g,h\in\mathbf{G}$，$X\subseteq\mathrm{Var}$，$|X|<\lambda$ 且 $f\in A^X$，则

$$g*f\in\mathbf{G}\Rightarrow h*f\in\mathbf{G}.$$

(2) 若 $g\in\mathbf{G}$，$X\subseteq\mathrm{Var}$，$|X|<\lambda$ 且 $f\in(\mathrm{Ran}(g))^X$，则

$$g*f\in\mathbf{G}.$$

泛结构 $\mathfrak{G}\mathfrak{A}$ 对原子公式和 $\neg$，$\wedge$ 的可满足关系与 $\mathfrak{A}$ 的相同，对量词 $\exists$ 的可满足关系定义如下：

$$\mathfrak{G}\mathfrak{A}\models\exists X\varphi[g]\Leftrightarrow \text{存在 } f\in A^X \text{ 使得 } g*f\in\mathbf{G} \text{ 且 } \mathfrak{G}\mathfrak{A}\models\varphi[g*f].$$

5.1.6 引理

在所有的泛结构中成立的公式都在普通结构中成立.

证明：令 φ 是在所有的泛结构中成立的公式，且令 $\mathfrak{A}$ 是任给的普通结构，则容易验证 $\mathfrak{G}\mathfrak{A}=\langle\mathfrak{A},A^{\mathrm{Var}}\rangle$ 是泛结构. 施归纳易证，对所有公式 φ 和所有赋值函数 $f\in A^{\mathrm{Var}}$，

$$\mathfrak{A}\models\varphi[f]\Leftrightarrow\mathfrak{G}\mathfrak{A}\models\varphi[f]. \quad \square$$

5.1.7 引理 令 $\mathfrak{G}\mathfrak{A}$ 是泛结构，且 $g,h\in\mathbf{G}$ 在 $\mathrm{Fv}(\varphi)$ 上相同，则

$$\mathfrak{G}\mathfrak{A}\models\varphi[g]\Leftrightarrow\mathfrak{G}\mathfrak{A}\models\varphi[h].$$

证明：令 $\Sigma=\{\varphi$：对所有 $g,h\in\mathbf{G}$ 使得 $g\upharpoonright\mathrm{Fv}(\varphi)=h\upharpoonright\mathrm{Fv}(\varphi)$，$\mathfrak{G}\mathfrak{A}\models\varphi[g]\Leftrightarrow\mathfrak{G}\mathfrak{A}\models\varphi[h]\}$. 因为原子公式中出现的所有变元都是自由变元，所以所有的原子公式在 Σ 中. 假设对所有 $\xi<\gamma<\kappa$，φ_0，$\cdots$，φ_ξ，$\cdots\in\Sigma$，则易证 $\neg\varphi_0\in\Sigma$，$\bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_\xi\in\Sigma$（对于后者是因为 $\mathrm{Fv}(\bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_\xi)=\bigcup_{\xi<\gamma}\mathrm{Fv}(\varphi_\xi)$）.

最后设 $\varphi\in\Sigma$ 且对所有 $g,h\in\mathbf{G}$，$g\upharpoonright\mathrm{Fv}(\exists X\varphi)=h\upharpoonright\mathrm{Fv}(\exists X\varphi)$，其中 $X\subseteq\mathrm{Var}$ 且 $|X|<\lambda$. 据泛结构的可满足关系，

$$\mathfrak{G}\mathfrak{A}\models\exists X\varphi[g]\Leftrightarrow \text{存在 } f\in A^X \text{ 使得 } g*f\in\mathbf{G}，\mathfrak{G}\mathfrak{A}\models\varphi[g*f]. \tag{5.6}$$

因为 $\mathrm{Fv}(\varphi)\subseteq\mathrm{Fv}(\exists X\varphi)\cup X$，所以据 $g\restriction\mathrm{Fv}(\exists X\varphi)=h\restriction\mathrm{Fv}(\exists X\varphi)$，有 $(g*f)\restriction\mathrm{Fv}(\varphi)=(h*f)\restriction\mathrm{Fv}(\varphi)$，因此据 5.1.5(1) 和归纳假设，

$$\mathfrak{G}\mathfrak{A}\models\varphi[g*f]\Leftrightarrow\mathfrak{G}\mathfrak{A}\models\varphi[h*f]. \tag{5.7}$$

据(5.6)，(5.7)和泛结构的可满足关系，有

$$\mathfrak{G}\mathfrak{A}\models\exists X\varphi[g]\Leftrightarrow\mathfrak{G}\mathfrak{A}\models\exists X\varphi[h],$$

所以 $\exists X\varphi\in\Sigma$. □

令 $\mathbf{B}=\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta;\Omega)$ 是任一演绎系统，称 $\mathbf{B}$ 的推理规则 R 在某个模型 $\mathfrak{A}$（或 $\mathfrak{G}\mathfrak{A}$）中**保持成立性质** ⇔ 从该系统的内定理根据 R 得到的内定理在 $\mathfrak{A}$（或 $\mathfrak{G}\mathfrak{A}$）中成立.

5.1.8 定理 任给 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 和 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的泛结构 $\mathfrak{G}\mathfrak{A}$，则 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\mathrm{CD}_{<\kappa})$ 的公理在 $\mathfrak{G}\mathfrak{A}$ 中成立，其推理规则在 $\mathfrak{G}\mathfrak{A}$ 中保持成立性质.

证明：若 φ 是 $\mathscr{L}_{\kappa}$-公式，$\mathfrak{G}\mathfrak{A}$ 是泛结构，$g\in\mathbf{G}$，则对 φ 在 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 中的代换特例 $\mathrm{S}_f(\varphi)$，其中 f 是从 φ 的所有初始命题符号的集合的一子集到 $\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi})$ 的映射，存在一对 φ 的所有初始命题符号 p_ξ 赋值的真值赋值 h 使得 $h(p_\xi)=1\Leftrightarrow\mathfrak{G}\mathfrak{A}\models f(p_\xi)[g]$. 施归纳于 φ 的复杂度，易证 h 对所有 $\mathscr{L}_{\kappa}$-公式的自然扩张 $h^*(\varphi)=1\Leftrightarrow\mathfrak{G}\mathfrak{A}\models\mathrm{S}_f\varphi[g]$. 因此若 φ 是 $\mathbf{B}_{\kappa}(\mathrm{CD}_{<\kappa})$ 的命题公理，则 φ 是有效式，因此 $\mathrm{S}_f(\varphi)$ 在 $\mathfrak{G}\mathfrak{A}$ 中成立. 作为举例下证量词公理 4 在 $\mathfrak{G}\mathfrak{A}$ 中成立.

设对任意 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的公式 $\forall X\varphi$，我们有 $\mathfrak{G}\mathfrak{A}\models\forall X\varphi[g]$. 令 $f:X\to\mathrm{Term}(\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi})$，其中 φ 中没有 $x\in X$ 的自由出现在约束 $f(x)$ 中的某个变元的量词的辖域中. 因为 $g\in\mathbf{G}$，所以 $g\circ f\in\mathrm{Ran}(g)^X$，据 $\mathfrak{G}\mathfrak{A}$ 的定义 5.1.5(2)，$g*(g\circ f)\in\mathbf{G}$. 因为 $g\circ f\in A^X$，所以据 $\mathfrak{G}\mathfrak{A}$ 关于 $\forall$ 的可满足关系，$\mathfrak{G}\mathfrak{A}\models\varphi[g*(g\circ f)]$，因此 $\mathfrak{G}\mathfrak{A}\models\mathrm{SF}_f(\varphi)[g]$.

此外易证其它公理（包括等词公理）在 $\mathfrak{G}\mathfrak{A}$ 中成立，且 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的推理规则在 $\mathfrak{G}\mathfrak{A}$ 中保持成立性质. □

5.1.9 定理 令 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\omega\omega}$ 有可数个互不相同的一元谓词符号 $\{Q_n:n<\omega\}$，则下列公式 bh_ω：

$$\bigwedge_{n<\omega}\exists xQ_n(x)\to\exists\{x_n:n<\omega\}\bigwedge_{n<\omega}Q_n(x_n)$$

在所有的普通结构中成立，但不在所有的泛结构中成立.

证明：因为公式 bh_ω 是公理模式 BH_γ 的特例，所以据4.4.1(2)，bh_ω 在所有的普通结构中成立. 考虑 $\mathfrak{G}\mathfrak{A}=\langle\omega,H,\mathbf{G}\rangle$，其中 $\mathbf{G}=\{g:g\in\omega^{\mathrm{Var}}$ 且 $\mathrm{Ran}(g)$ 是有穷的$\}$，$H(Q_n)$是$\{n\}$的特征函数：

$$\mathfrak{G}\mathfrak{A}\models Q_n(x)[i]\Leftrightarrow n=i.$$

先验证 $\mathfrak{G}\mathfrak{A}$ 是泛结构. 设 $g,h\in\mathbf{G}$，$X\subseteq\mathrm{Var}$，$|X|<\lambda$，$f\in\omega^X$ 且 $g*f\in\mathbf{G}$. 显然：$h*f\in\omega^X$ 且 $\mathrm{Ran}(h*f)$是有穷的. 因此满足 5.1.5(1). 设 $g\in\mathbf{G}$，X 的规定如上且 $f\in(\mathrm{Ran}(g))^X$. 因为$\mathrm{Ran}(g)$有穷，所以 $g*f$ 的值域有穷且 $g*f\in\omega^{\mathrm{Var}}$，所以满足 5.1.5(2).

任给 $g\in\mathbf{G}$，对所有 $n<\omega$，显然有 $\mathfrak{G}\mathfrak{A}\models\exists xQ_n(x)[g]$，但因为在 $\mathbf{G}$ 中的所有赋值 g 的值域皆有穷，所以总存在 $n+1$ 使得 g 不能把它赋于 x_{n+1}，所以

$$\mathfrak{G}\mathfrak{A}\not\models\exists\{x_n:n<\omega\}\bigwedge_{n<\omega}Q_n(x_n)[g].$$

因此 $\mathfrak{G}\mathfrak{A}$ 中所有赋值 g 都不满足 bh_ω. □

下面是我们要得到的第一个结果：

5.1.10 定理 令 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$有可数多个互不相同的一元谓词符号$\{Q_n:n<\omega\}$，则 bh_ω 相对所有的普通结构是有效式但在$\mathbf{B}_{\kappa\lambda}(\mathrm{CD}_{<\kappa})$中不可证，因而 BH_ω 独立于 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda}(\mathrm{CD}_{<\kappa})$.

证明：据 5.1.8，$\mathbf{B}_{\kappa\lambda}(\mathrm{CD}_{<\kappa})$中任一内定理在所有的泛结构中成立. 假设 bh_ω 在 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda}(\mathrm{CD}_{<\kappa})$中可证，则 bh_ω 也在所有泛结构中成立，与 5.1.9 矛盾. bh_ω 相对普通结构的有效性据 4.4.1(2). □

注意：5.1.10 也说明了当 $\lambda>\omega$ 时 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\mathrm{CD}_{<\kappa})$是不完全的.

5.1.11 引理 令 $\mathfrak{G}\mathfrak{A}$ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的泛结构且满足：

若 $g\in\mathbf{G}$，且对所有 $\xi<\gamma$，$g*f_\xi\in\mathbf{G}$，其中 $f_\xi\in A^{X_\xi}$，诸 X_ξ 两两不相交且幂$<\lambda$，则 $g*f\in\mathbf{G}$，其中 $X=\bigcup_{\xi<\gamma}X_\xi$，$f=\bigcup_{\xi<\gamma}f_\xi$. (5.8)$_\gamma$

则 BDH_γ 在 $\mathfrak{A}$ 中成立.

证明：令

$$\varphi=\exists X_0\varphi_0\wedge\bigwedge_{1\leqslant\xi<\gamma}\forall\bigcup_{\zeta<\xi}X_\zeta\exists X_\xi\varphi_\xi\to\exists\bigcup_{\xi<\gamma}X_\xi\bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_\xi,$$

其中诸 X_ξ 两两不相交且对 $\zeta<\xi$，X_ξ 中没有变元在 φ_ζ 中自由出现. 任给 $g\in\mathbf{G}$，假设 g 满足 φ 的前件. 我们要施超穷归纳来定义 $f_\xi\in A^{X_\xi}$，使得 $g*f_\xi\in\mathbf{G}$，且 $\mathfrak{GA}\models\varphi_\xi[g_\xi]$，其中据 $(5.8)_\gamma$，$g_\xi\in\mathbf{G}$ 且对 $\zeta\leqslant\xi$，g_ξ 在 X_ζ 上是 f_ζ，在别处是 g（即 $g_\xi=g*\bigcup_{\zeta\leqslant\xi}f_\zeta$）. 假设对所有 $\zeta<\xi$，我们已定义了这样的 f_ζ. 令 h_ξ 对 $\zeta<\xi$ 在 X_ζ 上是 f_ζ，在别处是 g（即 $h_\xi=g*\bigcup_{\zeta<\xi}f_\zeta$）. 则据 $(5.8)_\gamma$，$h_\xi\in\mathbf{G}$. 若 $\mathfrak{GA}\models\varphi_\xi[h_\xi]$，则令 f_ξ 在 X_ξ 上是 g，这样，

$$
\begin{aligned}
g_\xi&=g*\bigcup_{\zeta\leqslant\xi}f_\zeta=g*(\bigcup_{\zeta<\xi}f_\zeta\cup(g\upharpoonright X_\xi))\\
&=g*\bigcup_{\zeta<\xi}f_\zeta=h_\xi,
\end{aligned}
$$

因此 $\mathfrak{GA}\models\varphi_\xi[g_\xi]$. 若 $\mathfrak{GA}\not\models\varphi_\xi[h_\xi]$，则因为 $\mathfrak{GA}$ 满足 φ 的前件，所以 $\mathfrak{GA}\models\forall\bigcup_{\zeta<\xi}X_\zeta\exists X_\xi\varphi_\xi[g]$. 据可满足关系，对所有 $\zeta<\xi$ 和所有 $f_\zeta\in A^{X_\zeta}$，$\mathfrak{GA}\models\exists X_\xi\varphi_\xi[g*\bigcup_{\zeta<\xi}f_\zeta]$，即 $\mathfrak{GA}\models\exists X_\xi\varphi_\xi[h_\zeta]$. 我们可以选择 $f_\xi\in A^{X_\xi}$ 使得 $\mathfrak{GA}\models\varphi_\xi[g_\xi]$，其中 $g_\xi=h_\xi*f_\xi$. 因为 $g\in\mathbf{G}$，所以据 5.1.5(2)，我们仍有 $g*f_\xi\in\mathbf{G}$.

最后考虑赋值函数 g_γ. 据 $(5.8)_\gamma$，$g_\gamma\in\mathbf{G}$ 且 g_γ 对所有 $\xi<\gamma$ 在 X_ξ 上是 f_ξ，在别处是 g（即 $g_\gamma=g*\bigcup_{\xi<\gamma}f_\xi$）. 因为据前面的假设条件，当 $\xi<\gamma$ 时，g_γ 和 g_ξ 在 $\mathrm{Fv}(\varphi_\xi)$ 上相同，所以据 5.1.7，$\mathfrak{GA}\models\varphi_\xi[g_\gamma]$，因此对所有 $\xi<\gamma$，$\mathfrak{GA}\models\varphi_\xi[g*\bigcup_{\xi<\gamma}f_\xi]$，从而 $\mathfrak{GA}\models\bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_\xi[g*\bigcup_{\xi<\gamma}f_\xi]$. 据可满足关系，有

$$\mathfrak{GA}\models\exists\bigcup_{\xi<\gamma}X_\xi\bigwedge_{\xi<\gamma}\varphi_\xi[g].\ \square$$

5.1.12 定理 设 γ 是正则基数，$\omega\leqslant\gamma<\lambda$ 且 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\mu\pi}$ 包含一元谓词符号集 $\{Q_\xi:\xi<\gamma\}$，则 bh_γ：

$$\bigwedge_{\xi<\gamma}\exists xQ_\xi(x)\to\exists\{x_\xi:\xi<\gamma\}\bigwedge_{\xi<\gamma}Q_\xi(x_\xi)$$

在 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\mu\pi}(\mathrm{CD}_{<\kappa},\mathrm{DBH}_{<\gamma})$ 中不可证，因而 BH_γ 独立于该系统.

证明：考虑泛结构 $\mathfrak{GA}=\langle\gamma,H,\mathbf{G}\rangle$，其中若 $\xi=\zeta$，则 $\mathfrak{GA}\models Q_\xi(x)[\zeta]$，否则 $\mathfrak{GA}\not\models Q_\xi(x)[\zeta]$，且 $\mathbf{G}=\{g:g\in\gamma^{\mathrm{Var}},|\mathrm{Ran}(g)|<$

$\gamma\}$. 因为 γ 是正则的，所以对所有 $\delta<\gamma$，$\mathfrak{GA}$ 是满足(5.8)$_\delta$ 的泛结构. 据 5.1.11 和 5.1.8，$\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\mathrm{CD}_{<\kappa},\mathrm{DBH}_{<\gamma})$ 的所有内定理在 $\mathfrak{GA}$ 中成立. 但类似 5.1.9 的证明能验证 bh_γ 在 $\mathfrak{GA}$ 中假，因此 bh_γ 在 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\mathrm{CD}_{<\kappa},\mathrm{DBH}_{<\gamma})$ 中不可证. □

令 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 有一个二元谓词符号 Q，令 dbh_ω 是下列公式：

$$\forall x\exists yQ(x,y)\to\exists\{x_n:n<\omega\}\bigwedge_{n<\omega}Q(x_n,x_{n+1}).$$

下面我们来证明 dbh_ω 相对 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\mathrm{CD}_{<\kappa},\mathrm{IC}_{<\kappa})$ 是独立的，其中 $\mathrm{IC}_{<\kappa}=\{\mathrm{IC}_\gamma:\gamma<\kappa\}$. 为此我们引入下列记号.

对子集 $W\subseteq\kappa$，令 $\mathscr{P}_\omega(W)=\bigcup\limits_{n<\omega}W^n$，即 $\mathscr{P}_\omega(W)$ 是 W 的元素的所有有穷序列的集合.

我们称符号序列 E_1 是符号序列 E 的一个**毗连部分** $\Leftrightarrow$ 存在两个符号序列 E_0 和 E_2 使得 $E=E_0{}^\frown E_1{}^\frown E_2$. 若 $E=E_1{}^\frown E_2$，则称 E_1 是 E 的**初始部分**，记作 $E_1\preccurlyeq E$. 显然 $\preccurlyeq$ 是偏序关系. 对 $E\in\mathscr{P}_\omega(\kappa)$，令 $\mathrm{I}(E)=\{E_1:E_1\preccurlyeq E\}$，则 $\mathrm{I}(E)$ 有穷且被 $\preccurlyeq$ 线序. 对 $D\subseteq\mathscr{P}_\omega(\kappa)$，令 $\mathrm{I}(D)=\bigcup\{\mathrm{I}(E):E\in D\}$，则 $\mathrm{I}(\bigcup\limits_\xi D_\xi)=\bigcup\limits_\xi\mathrm{I}(D_\xi)$.

对 $\lambda>\omega$，令 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$ 是只有一个二元谓词符号 Q 作为非逻辑符号的语言. 考虑 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$ 的泛结构 $\mathfrak{GA}=\langle\mathscr{P}_\omega(\kappa),\prec,\mathbf{G}\rangle$，其中序 $\prec$ 是对 Q 的解释($E_1\prec E\Leftrightarrow E_1\preccurlyeq E$ 且 $E\neq E_1$)，

$\mathbf{G}=\{g$: $g\in[\mathscr{P}_\omega(\kappa)]^{\mathrm{Var}}$ 使得 $\mathrm{I}(\mathrm{Ran}(g))$ 不包含无穷 $\prec$-链

(即 $\mathrm{I}(\mathrm{Ran}(g))$ 的元素不可能用 $\prec$ 组成一个无穷链)$\}$.

假设 $g,h\in\mathbf{G}$，$Y\subseteq\mathrm{Var}$，$|Y|<\lambda$，$f\in[\mathscr{P}_\omega(\kappa)]^Y$ 且 $g*f\in\mathbf{G}$. 因为 $\mathrm{I}(\mathrm{Ran}(f\restriction Y))$ 和 $\mathrm{I}(\mathrm{Ran}(h))$ 都不包含无穷 $\prec$-链，所以

$$\begin{aligned}\mathrm{I}(\mathrm{Ran}(h*f))&\subseteq\mathrm{I}(\mathrm{Ran}(f\restriction Y)\cup\mathrm{Ran}(h))\\&=\mathrm{I}(\mathrm{Ran}(f\restriction Y))\cup\mathrm{I}(\mathrm{Ran}(h))\end{aligned}$$

也不包含无穷 $\prec$-链，因此 $h*f\in\mathbf{G}$，这样 5.1.5(1)对 $\mathbf{G}$ 成立. 若 $g\in\mathbf{G}$ 且 $f\in\mathrm{Ran}(g)^Y$，则 $\mathrm{I}(\mathrm{Ran}(g*f))\subseteq\mathrm{I}(\mathrm{Ran}(g))$ 不包含无穷 $\prec$-链，所以 $g*f\in\mathbf{G}$，因此 5.1.5(2)对 $\mathbf{G}$ 也成立，证得 $\mathfrak{GA}$ 是泛结构.

5.1.13 引理 dbh_ω 在上述 $\mathfrak{GA}=\langle\mathscr{P}_\omega(\kappa),\prec,\mathbf{G}\rangle$ 中不成立.

证明：任给 $g\in\mathbf{G}, f\in\mathscr{P}_\omega(\kappa)^{\{x\}}$，令 $h=\{\langle y, f(x)^\frown\langle 0\rangle\rangle\}$（**注意**：$f(x)^\frown\langle 0\rangle$表示在符号序列$f(x)$后面增加符号0），则 $h\in\mathbf{G}$. 因为 $\mathfrak{GA}$ 是泛结构，所以据 5.1.5(2)，$g*f\in\mathbf{G}$ 且 $(g*f)*h\in\mathbf{G}$. 因为 $\prec=Q^{\mathfrak{GA}}$，所以我们有 $\mathfrak{GA}\models Q(x,y)[(g*f)*h]$，因此

$$\mathfrak{GA}\models\forall x\exists yQ(x,y).$$

但由于对每一 $g\in\mathbf{G}$，$\mathrm{I}(\mathrm{Ran}(g))$不包含无穷$\prec$-链，所以 $\mathbf{G}$ 中没有一个赋值函数满足 $\bigwedge_{n<\omega}Q(x_n,x_{n+1})$，因此 $\mathfrak{GA}\not\models\mathrm{dbh}_\omega$. □

据 5.1.8，$\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\mathrm{CD}_{<\kappa})$中的公理都在任意泛结构中成立且推理规则在 $\mathfrak{GA}$ 中保持成立性质，因此我们下证，当 $\gamma<\kappa$ 时，IC_γ 在 $\mathfrak{GA}=\langle\mathscr{P}_\omega(\kappa),\prec,\mathbf{G}\rangle$中保持成立性质，从而使 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\mathrm{CD}_{<\kappa},\mathrm{IC}_{<\kappa})$的所有内定理在 $\mathfrak{GA}$ 中成立，这样易得 DBH_ω 独立于该系统.

为此先要证明几个引理.

我们称从$\langle\mathscr{P}_\omega(\kappa),\preccurlyeq\rangle$的一子结构到$\langle\mathscr{P}_\omega(\kappa),\preccurlyeq\rangle$的同构 h 是**保距同构**(distance-preserving) $\Leftrightarrow$ 对所有 $E\in\mathrm{Dom}(h)$，$\mathrm{Dom}(E)=\mathrm{Dom}(h(E))$（这里把$E$，$h(E)$看作是序列，下同）. 我们需要 $\mathscr{P}_\omega(\omega)$上的保距同构 h 是希望公式 φ 在赋值 g 下的值在 h 下保持不变. 这样，若 $g\in\mathbf{G}$，且 $\mathfrak{GA}\not\models\bigvee_{\xi<\gamma}\forall X_\xi\varphi_\xi[g]$使得在$\xi\neq\zeta$时有 $X_\xi\cap X_\zeta=X_\xi\cap\mathrm{Fv}(\varphi_\zeta)=\varnothing$，则 X_ξ 上的函数 f_ξ，使得 $g*f_\xi\in\mathbf{G}$ 且 $\mathfrak{GA}\not\models\varphi_\xi[f_\xi]$，能根据保距同构用下列方式变形为函数 f'_ξ：$\mathrm{Ran}(g)$的必要的元素保持固定，且 $\mathrm{I}(\bigcup\{\mathrm{Ran}(f'_\xi):\xi<\gamma\})$不包含无穷$\prec$-链.

因此 $g*f'\in\mathbf{G}$ 且 $\mathfrak{GA}\not\models\bigvee_{\xi<\gamma}\varphi_\xi[g*f']$，其中

$$\mathrm{Dom}(f')={}^\frown\langle X_\xi:\xi<\gamma\rangle,\quad f'=\bigcup_{\xi<\gamma}f'_\xi,$$

从而使 IC_γ 在 $\mathfrak{GA}$ 中保持成立性质.

5.1.14 引理 若 h 是从$\langle\mathscr{P}_\omega(\kappa),\preccurlyeq\rangle$的一子结构到$\langle\mathscr{P}_\omega(\kappa),\preccurlyeq\rangle$的保距同构使得 $\mathrm{I}(E)\subseteq\mathrm{Dom}(h)$，则对所有 $m\leqslant\mathrm{Dom}(E)$，$h(E\restriction m)=h(E)\restriction m$. 因此若 $\mathrm{Dom}(h)=\mathscr{P}_\omega(\kappa)$，则

$E\in\mathrm{Ran}(h)\Rightarrow\mathrm{I}(E)\subseteq\mathrm{Ran}(h)$，且

$$\mathrm{I}(D)\subseteq \mathrm{Dom}(h) \Rightarrow \mathrm{I}(\mathrm{Ran}(h\restriction D))=\mathrm{Ran}(h\restriction \mathrm{I}(D)).$$

证明:因为 E 只含一个长度为 m 的初始部分(其它的初始部分的长度不是小于 m 就是大于 m)且 h 是保距同构,所以 $h(E)$ 只含一个长度为 m 的初始部分且

$$h(E\restriction m)\preccurlyeq h(E),\quad m=\mathrm{Dom}(h(E\restriction m)).$$

因此 $h(E\restriction m)$ 就是 $h(E)$ 的、长度为 m 的初始部分,而 $h(E)\restriction m$ 也是长度为 m 的初始部分,这样,我们有 $h(E\restriction m)=h(E)\restriction m$. 因为 $\mathrm{Dom}(h)=\mathscr{P}_\omega(\kappa)$ 且 $E\in \mathrm{Ran}(h)$,所以 E 是有穷序列,显然,$\mathrm{I}(E)$ 的元素皆有穷,因此 $\mathrm{I}(E)\subseteq \mathrm{Ran}(h)$.

因为 $\mathrm{I}(D)\subseteq \mathrm{Dom}(h)$ 且 $\mathrm{Ran}(h\restriction D)\subseteq \mathscr{P}_\omega(\kappa)$,所以

$$\mathrm{I}(\mathrm{Ran}(h\restriction D))=\bigcup\{\mathrm{I}(h(E));E\in D\}.$$

若任意 $x\in \mathrm{I}(\mathrm{Ran}(h\restriction D))$,则存在某个 $E\in D$,x 是 $h(E)$ 的某个初始部分,显然,$x\in \mathrm{Ran}(h\restriction \mathrm{I}(D))$. 反之,若 $x\in \mathrm{Ran}(h\restriction \mathrm{I}(D))=\{h(E');E'\in \mathrm{I}(D)\}$,则 x 是某个 $E\in D$ 的 $h(E)$ 的初始部分,所以对这个 E, $x\in \mathrm{I}(h(E))$,因此

$$x\in \bigcup\{\mathrm{I}(h(E));E\in D\}=\mathrm{I}(\mathrm{Ran}(h\restriction D)).\ \square$$

5.1.15 引理 若 h 是 $\langle\mathscr{P}_\omega(\kappa),\preccurlyeq\rangle$ 上的保距自同构,且 $\mathbf{G}$ 如前定义,则

$$g\in \mathbf{G} \Rightarrow h\circ g\in \mathbf{G}.$$

证明:显然,$h\circ g\in \mathscr{P}_\omega(\kappa)$,所以只须证 $\mathrm{I}(\mathrm{Ran}(h\circ g))$ 不包含无穷 $\prec$-链. 假设 $g\in \mathbf{G}$,据 $\mathbf{G}$ 的构造,$g\in[\mathscr{P}_\omega(\kappa)]^{\mathrm{Var}}$ 且 $\mathrm{I}(\mathrm{Ran}(g))$ 不包含无穷 $\prec$-链,所以据 5.1.14,

$$\mathrm{I}(\mathrm{Ran}(h\circ g))=\mathrm{I}(\mathrm{Ran}(h\restriction \mathrm{Ran}(g)))=\mathrm{Ran}(h\restriction \mathrm{I}(\mathrm{Ran}(g))).$$

因为 h 是保距同构,所以 $\mathrm{Ran}(h\restriction \mathrm{I}(\mathrm{Ran}(g)))$ 也不包含无穷 $\prec$-链,因此

$$h\circ g\in \mathbf{G}.\ \square$$

5.1.16 引理 设 $D\subseteq \mathscr{P}_\omega(\kappa)$,$h$ 是从 $\langle\mathscr{P}_\omega(\kappa),\preccurlyeq\rangle$ 的一子结构到 $\langle\mathscr{P}_\omega(\kappa),\preccurlyeq\rangle$ 的保距同构使得 $\mathrm{I}(D)\subseteq \mathrm{Dom}(h)$,且存在一幂为 κ 的集合 $W\subseteq\kappa$ 不包含 $\mathrm{Ran}(h\restriction D)$ 的元素的坐标(coordinate). 对每一 $E\in \mathscr{P}_\omega(\kappa)$,令 $R(E)=\bigcup(\mathrm{I}(E)\cap \mathrm{I}(D))$(即 $R(E)$ 是 E 在 $\mathrm{I}(D)$

中最大初始部分)．则对任意单射 $f\in W^{\kappa}$，具有下列值的函数 h_f：

$$h_f(E)=h(\mathrm{R}(E))^\frown f\circ(E-\mathrm{R}(E))$$

是 $\mathscr{P}_\omega(\kappa)$ 上的保距同构使得 $h_f\upharpoonright \mathrm{I}(D)=h\upharpoonright \mathrm{I}(D)$．而且 $\mathrm{Ran}(h_f)$ 中任意元素唯一地表示为形如 $H^\frown F$ 的序列，其中

$$H\in \mathrm{Ran}(h\upharpoonright \mathrm{I}(D)),\quad F\in\mathscr{P}_\omega(W).$$

对 $\mathrm{Ran}(h_f)$ 中的两个这样的元素 $H^\frown F$ 和 $H_1{}^\frown F_1$，

$$H^\frown F\leqslant H_1{}^\frown F_1\Rightarrow (H\prec H_1 \text{ 且 } F=\varnothing)\text{ 或}(H=H_1 \text{ 且 } F\leqslant F_1).$$

证明：我们先来证明本引理最后一个结论．假设 $H,H_1\in \mathrm{Ran}(h\upharpoonright \mathrm{I}(D))$，$F,F_1\in\mathscr{P}_\omega(W)$ 且 $H^\frown F\leqslant H_1{}^\frown F_1$．若 $H=H_1$，则据左毗连，$F\leqslant F_1$．若 $H\prec H_1$，则 $F(0)$ 最多是 H_1 的一坐标，但因为 γ 不含 $\mathrm{Ran}(h\upharpoonright D)$ 的元素的坐标，所以 $F\neq\varnothing$ 是不可能的．因此

$$H\prec H_1\Rightarrow F=\varnothing.$$

若 $H_1\prec H$，则 $F_1(0)$ 最多是 H 中一坐标，同理可证 $F_1=\varnothing$．因此 $H^\frown F\leqslant H_1{}^\frown F_1$ 不成立．因为 H 和 H_1 中的一个是另一个的初始部分，所以只有这些情况是可能的，因此当 $H=H_1$ 时，有 $F\leqslant F_1$；当 $H\neq H_1$ 时，就有 $H\prec H_1$ 和 $F=\varnothing$，所以 $\mathrm{Ran}(h_f)$ 的元素表达成 $H^\frown F$ 这样的序列是唯一的．

下证 h_f 是保距同构：因为 h 是保距的，所以

$$\begin{aligned}\mathrm{Dom}(h_f(E))&=\mathrm{Dom}(h(\mathrm{R}(E)))+\mathrm{Dom}(f\circ(E-\mathrm{R}(E)))\\&=\mathrm{Dom}(\mathrm{R}(E))+\mathrm{Dom}(E-\mathrm{R}(E))\\&=\mathrm{Dom}(E),\end{aligned}$$

因此 h_f 是保距的．假设 $E_0\leqslant E_1$．若 $E_0\in \mathrm{I}(D)$，则 $E_0\leqslant \mathrm{R}(E_1)$，$E_0-\mathrm{R}(E_0)=\varnothing$，所以 $h_f(E_0)=h(E_0)\leqslant h(\mathrm{R}(E_1))\leqslant h_f(E_1)$ 且 $h_f\upharpoonright \mathrm{I}(D)=h\upharpoonright \mathrm{I}(D)$．若 $E_0\notin \mathrm{I}(D)$，则 $\mathrm{R}(E_0)=\mathrm{R}(E_1)=\varnothing$，所以 $E_0-\mathrm{R}(E_0)\leqslant E_1-\mathrm{R}(E_1)$，因此

$$\begin{aligned}h_f(E_0)&=h(\mathrm{R}(E_0))^\frown(f\circ(E_0-\mathrm{R}(E_0)))\\&\leqslant h(\mathrm{R}(E_1))^\frown(f\circ(E_1-\mathrm{R}(E_1)))\\&=h_f(E_1).\end{aligned}$$

反之，假设 $h_f(E_0)\leqslant h_f(E_1)$，则正如我们上面所证，

$$h(\mathrm{R}(E_0))=h(\mathrm{R}(E_1)),\quad f\circ(E_0-\mathrm{R}(E_0))\leqslant f\circ(E_1-\mathrm{R}(E_1)),$$

或者

$$h(\mathrm{R}(E_0))\prec h(\mathrm{R}(E_1)),\quad f\circ(E_0-\mathrm{R}(E_0))=\varnothing.$$

在第一种情况下，$\mathrm{R}(E_0)=\mathrm{R}(E_1)$ 且 $E_0-\mathrm{R}(E_0)\leqslant E_1-\mathrm{R}(E_1)$，因此 $E_0\leqslant E_1$. 在第二种情况下，$\mathrm{R}(E_0)\prec\mathrm{R}(E_1)$ 且 $E_0=\mathrm{R}(E_0)$. 在此情况下，仍有 $E_0\leqslant E_1$. 因此 h_f 是同构使得 $h_f\restriction\mathrm{I}(D)=h\restriction\mathrm{I}(D)$. □

5.1.17 引理 令 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$ 是只含二元谓词 Q 作为非逻辑符号的语言，h 是 $\langle\mathscr{P}_\omega(\kappa),\leqslant\rangle$ 上的保距自同构，$\mathfrak{G}\mathfrak{A}=\langle\mathscr{P}_\omega(\kappa),\prec,\mathbf{G}\rangle$，其中 $\prec=Q^{\mathfrak{G}\mathfrak{A}}$，则对所有 $g\in\mathbf{G}$ 和 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$ 的所有公式 φ，

$$\mathfrak{G}\mathfrak{A}\models\varphi[g]\Leftrightarrow\mathfrak{G}\mathfrak{A}\models\varphi[h\circ g].$$

证明：令 $\Sigma=\{\varphi$：对所有 $g\in\mathbf{G}$ 和保距同构 h，$\mathfrak{G}\mathfrak{A}\models\varphi[g]\Leftrightarrow\mathfrak{G}\mathfrak{A}\models\varphi[h\circ g]\}$. 因为 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$ 只有一个非逻辑符号 Q，所以 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$ 的原子公式形如 $x\equiv y$ 或 $Q(x,y)$，显然它们在 Σ 中. 易证 Σ 在否定和合取运算下封闭. 假设 $\varphi=\exists X\psi$ 使得 $\psi\in\Sigma$. 若 $\mathfrak{G}\mathfrak{A}\models\exists X\psi[g]$，则存在函数 $f\in\mathscr{P}_\omega(\kappa)^X$ 使得 $g*f\in\mathbf{G}$ 且 $\mathfrak{G}\mathfrak{A}\models\psi[g*f]$，据归纳假设，

$$\mathfrak{G}\mathfrak{A}\models\psi[h\circ(g*f)].$$

因为 $h\circ(g*f)=(h\circ g)*(h\circ f)$，$h\circ f\in\mathscr{P}_\omega(\kappa)^X$，$g*f\in\mathbf{G}$ 且 h 是保距同构，所以 $h\circ(g*f)\in\mathscr{P}_\omega(\kappa)^{\mathrm{Var}}$ 且 $\mathrm{I}(\mathrm{Ran}(h\circ(g*f)))$ 不包含无穷 $\prec$-链，所以 $h\circ(g*f)=(h\circ g)*(h\circ f)\in\mathbf{G}$，因此据 $\mathfrak{G}\mathfrak{A}$ 的可满足关系，

$$\mathfrak{G}\mathfrak{A}\models\exists X\psi[h\circ g].$$

反之，设 $\mathfrak{G}\mathfrak{A}\models\exists X\psi[h\circ g]$，则存在 $f\in\mathscr{P}_\omega(\kappa)^X$ 使 $(h\circ g)*f\in\mathbf{G}$ 且 $\mathfrak{G}\mathfrak{A}\models\psi[(h\circ g)*f]$. 下令 $D=\mathrm{Ran}((h\circ g)\restriction\mathrm{Fv}(\varphi))$. 因为 $\mathrm{Dom}(h)=\mathscr{P}_\omega(\kappa)$，所以对任意

$$E\in D=\mathrm{Ran}((h\circ g)\restriction\mathrm{Fv}(\varphi))\subseteq\mathrm{Ran}(h),$$

据 5.1.14，$\mathrm{I}(E)\subseteq\mathrm{Ran}(h)$，因此 $\mathrm{I}(D)\subseteq\mathrm{Ran}(h)$，从而 $\mathrm{I}(D)\subseteq\mathrm{Ran}(h)=\mathrm{Dom}(h^{-1})$. 因为 $\mathrm{Ran}(h^{-1}\restriction D)=\mathrm{Ran}(g\restriction\mathrm{Fv}(\varphi))$ 的幂 $<\kappa$，所以存在 κ 的幂为 κ 的子集不包含 $\mathrm{Ran}(h^{-1}\restriction D)$ 的元素的坐标. 因此我们可以把 h^{-1} 作为既定的同构，然后用 5.1.16，得到 $\langle\mathscr{P}_\omega(\kappa),\leqslant\rangle$ 上的保距自同构 h^* 使其在 $\mathrm{I}(D)$ 上与 h^{-1} 相同. 据归

纳假设，$\mathfrak{GA}\models\psi[h^*\circ((h\circ g)*f))]$. 因为

$$h^*\circ((h\circ g)*f)=(h^*\circ(h\circ g))*(h^*\circ f),$$

且 h^* 在 $\mathrm{I}(D)$ 上与 h^{-1} 相同，所以在 $\mathrm{Fv}(\varphi)=\mathrm{Fv}(\psi)-X$ 上，

$$h^*\circ(h\circ g)=g,$$

因此在 $\mathrm{Fv}(\psi)$ 上 $h^*\circ((h\circ g)*f)$ 与 $g*(h^*\circ f)$ 相同. 据 5.1.7，$\mathfrak{GA}\models\psi[g*(h^*\circ f)]$. 显然，$h^*\circ f\in\mathscr{P}_\omega(\kappa)$. 因为 h^* 是保距同构，所以 $g*(h^*\circ f)\in\mathscr{P}_\omega(\kappa)^{\mathrm{Var}}$ 且 $\mathrm{I}(\mathrm{Ran}(g*(h^*\circ f)))$ 不包含无穷 $\prec$-链，因此 $g*(h^*\circ f)\in\mathbf{G}$，从而 $\mathfrak{GA}\models\exists X\psi[g]$. □

5.1.18 定理 对 $\gamma<\kappa$，IC_γ 在 $\mathfrak{GA}=\langle\mathscr{P}_\omega(\kappa),\prec,\mathbf{G}\rangle$ 中保持成立性质，从而使 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\omega\kappa}(\mathrm{CD}_{<\kappa},\mathrm{IC}_{<\kappa})$ 的所有内定理在 $\mathfrak{GA}$ 中成立.

证明：假设 $g\in\mathbf{G}$ 且 $\mathfrak{GA}\not\models\varphi[g]$，其中 φ 形如 $\bigvee_{\xi<\gamma}\forall X_\xi\varphi_\xi$，其中对 $\xi\neq\zeta$，$X_\xi\cap X_\zeta=X_\xi\cap\mathrm{Fv}(\varphi_\zeta)=\varnothing$. 我们来证明存在 $g_1\in\mathbf{G}$ 使得 $\mathfrak{GA}\not\models\bigvee_{\xi<\gamma}\varphi_\xi[g_1]$：对每一 $\xi<\gamma$，令 f_ξ 是从 X_ξ 到 $\mathscr{P}_\omega(\kappa)$ 的函数使得 $g*f_\xi\in\mathbf{G}$ 且 $\mathfrak{GA}\not\models\varphi_\xi[g*f_\xi]$. 令 $D=\mathrm{Ran}(g\restriction\mathrm{Fv}(\varphi))$，则 $|D|<\kappa$. 令 $W\subseteq\kappa$ 有幂为 κ 且不包含 $\mathrm{I}(D)$ 的元素的任意坐标. 把 W 划分成集合 W_ξ，$\xi<\gamma$，其中诸 W_ξ 两两不相交且每一 $|W_\xi|=\kappa$. 我们把恒等函数看作是给定的同构，据 5.1.16，得到保距同构 h_ξ，$\xi<\gamma$，使得 h_ξ 在 $\mathrm{I}(D)$ 上是恒等函数且 $\mathrm{Ran}(h_\xi)$ 的每一元素有形如 $H_\xi{}^\frown F_\xi$ 的唯一表达，其中 $H_\xi\in\mathrm{I}(D)$（本应 $H_\xi\in\mathrm{Ran}(h\restriction\mathrm{I}(D))$，但因为 h 是恒等函数），$F_\xi\in\mathscr{P}_\omega(W_\xi)$. 令 $g_1=g*f_1$，其中

$$\mathrm{Dom}(f_1)={}^\frown\langle X_\xi:\xi<\gamma\rangle,\quad f_1=\bigcup\{h_\xi\circ f_\xi:\xi<\gamma\}.$$

我们来证明 $g_1\in\mathbf{G}$：显然，$g_1\in\mathscr{P}_\omega(\kappa)^{\mathrm{Var}}$，且

$$\mathrm{I}(\mathrm{Ran}(g_1))\subseteq\bigcup\{\mathrm{I}(\mathrm{Ran}(h_\xi\circ f_\xi)):\xi<\gamma\}\cup\mathrm{I}(\mathrm{Ran}(g)).$$

因为 $g\in\mathbf{G}$，所以 $\mathrm{I}(\mathrm{Ran}(g))$ 不包含无穷 $\prec$-链. 又由于 $g*f_\xi\in\mathbf{G}$，所以 $\mathrm{I}(\mathrm{Ran}(g*f_\xi))$ 不包含无穷 $\prec$-链，因此 $\mathrm{I}(\mathrm{Ran}(h_\xi\circ f_\xi))$ 也不包含无穷 $\prec$-链. 假设 $\mathrm{I}(\mathrm{Ran}(g_1))$ 包含一个无穷 $\prec$-链，则存在不同的 $\xi_0,\cdots,\xi_n,\cdots$ 和序列 $H_{\xi_n}{}^\frown F_{\xi_n}$ 使得

$$H_{\xi_0}{}^\frown F_{\xi_0} \prec \cdots \prec H_{\xi_n}{}^\frown F_{\xi_n} \prec \cdots,$$

其中 $H_{\xi_n} \in \mathrm{I}(D)$，$F_{\xi_n} \in \mathscr{P}_\omega(W_{\xi_n})$．但那些 W_{ξ_n} 是两两不相交的且不包含 I(D)的元素的坐标．对任意 $H_{\xi_n}{}^\frown F_{\xi_n} \prec H_{\xi_m}{}^\frown F_{\xi_m}$，若 $H_{\xi_n} = H_{\xi_m}$，则 $F_{\xi_n} \prec F_{\xi_m}$．因为 δ_{ξ_n} 和 δ_{ξ_m} 两两不相交，所以 $F_{\xi_n} = \varnothing$．若 $H_{\xi_n} \prec H_{\xi_m}$ 或 $H_{\xi_m} \prec H_{\xi_n}$，则据 5.1.16 相应的证明，所有的 $F_{\xi_n} = \varnothing$．由此 I(D) 包含一个无穷 $\prec$-链，这与 $g \in \mathbf{G}$ 矛盾，因此 g_1 不包含无穷 $\prec$-链，所以 $g_1 \in \mathbf{G}$．据 5.1.17，对所有 $\xi < \gamma$，

$$\mathfrak{GA} \nvDash \varphi_\xi[h_\xi \circ (g * f_\xi)] \Leftrightarrow \mathfrak{GA} \nvDash \varphi_\xi[g * f_\xi].$$

显然，$h_\xi \circ (g * f_\xi)$ 在 $\mathrm{Fv}(\varphi_\xi)$ 上与 g_1 相同，所以对所有 $\xi < \gamma$，$\mathfrak{GA} \nvDash \varphi_\xi[g_1]$，因此

$$\mathfrak{GA} \nvDash \bigvee_{\xi<\gamma} \varphi_\xi[g_1].\ \square$$

5.1.19 定理 令 $\lambda > \omega$，$\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$ 有一个二元谓词符号 Q，则 dbh_ω 是有效式但在 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda}(\mathrm{CD}_{<\kappa}, \mathrm{IC}_{<\kappa})$ 中不可证，从而使 DBH_ω 独立于 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda}(\mathrm{CD}_{<\kappa}, \mathrm{IC}_{<\kappa})$．

证明：据 5.1.18 和 5.1.13．□

下面我们来证明 5.1.19 的更一般形式：若 δ 是正则基数使得 $\omega \leqslant \delta < \lambda$，则下列 dbh_δ 在 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda}(\mathrm{CD}_{<\kappa} \cup \mathrm{DBH}_{<\delta}; \mathrm{IC}_{<\kappa})$ 中不可证：

$$\begin{aligned}\forall x_0 \exists x_1 Q(x_0, x_1) \wedge \bigwedge_{1<\xi<\delta} \forall \{x_\zeta : \zeta < \xi\} \exists x_\xi \psi_\xi \\ \rightarrow \exists \{x_\xi : \xi < \gamma\} \bigwedge_{0<\xi<\delta} \Big[\bigwedge_{\zeta<\xi} Q(x_\zeta, x_\xi)\Big],\end{aligned}$$

其中 $$\psi_\xi = \bigwedge_{0<\eta<\xi} \Big[\bigwedge_{\zeta<\eta} Q(x_\zeta, x_\eta)\Big] \rightarrow \bigwedge_{0<\eta\leqslant\xi} \Big[\bigwedge_{\zeta<\eta} Q(x_\zeta, x_\eta)\Big].$$

据约定，诸 x_ξ，$\xi < \delta$，都互不相同，所以 dbh_δ 是 DBH_δ 的特例．要证明上述更一般的形式，我们必须对前面给出的构造进行下列修改．

对 $W \subseteq \kappa$，令 $\mathscr{P}_\delta(W) = \bigcup \{W^\tau : \tau < \delta\}$．则对 $E \in \mathscr{P}_\delta(\kappa)$，I(E) 的幂 $<\delta$ 且由 $\preccurlyeq$ 良序．若 $D \subseteq \mathscr{P}_\omega(\kappa)$ 被 $\preccurlyeq$ 线序且有幂 $<\delta$，则 $\bigcup D$ 是 $\mathscr{P}_\delta(\kappa)$ 的一个元素．因为 $\mathrm{Dom}(\bigcup D) = \bigcup \{\mathrm{Dom}(E) : E \in D\}$，所以据 δ 的正则性，其幂 $<\delta$．考虑 $\mathfrak{GA}_\delta = \langle \mathscr{P}_\delta(\kappa), \prec, \mathbf{G}_\delta \rangle$，其中 $\mathbf{G}_\delta$ 是下列集合：

$$\{g : g \in \mathscr{P}_\delta(\kappa)^{\mathrm{Var}} \text{ 使 } \mathrm{I}(\mathrm{Ran}(g)) \text{ 不含长度为 } \delta \text{ 的} \prec\text{-链}\}.$$

类似 5.1.13 前关于 $\delta=\omega$ 时的论证可以证明 $\mathfrak{GA}_\delta$ 是泛结构.

5.1.20 引理 令 $\eta<\delta$，则 DBH_η 在 $\mathfrak{GA}_\delta$ 中成立，但 dbh_δ 在 $\mathfrak{GA}_\delta$ 中不成立.

证明：我们要用 5.1.11 来证 DBH_η 在 $\mathfrak{GA}_\delta$ 中成立. 为此只须证明 $(5.8)_\eta$ 对 $\mathfrak{GA}_\delta$ 成立：假设 $g\in \mathbf{G}_\delta$，且对所有 $\xi<\eta, g*f_\xi\in \mathbf{G}_\delta$，其中 $f_\xi\in \mathscr{P}_\delta(\kappa)^{X_\xi}$，且诸 X_ξ 两两不相交. 则对每一 $\xi<\eta$，

$$\mathrm{I}(\mathrm{Ran}(g*f_\xi))\subseteq \mathrm{I}(\mathrm{Ran}(f_\xi))\cup \mathrm{I}(\mathrm{Ran}(g))$$

不包含长度为 δ 的 $\prec$-链. 因为 δ 是正则基数，所以

$$\mathrm{I}(\mathrm{Ran}(g*f))\subseteq \bigcup\{\mathrm{I}(\mathrm{Ran}(f_\xi)):\xi<\eta\}\cup \mathrm{I}(\mathrm{Ran}(g))$$

不包含长度为 δ 的 $\prec$-链，其中 $\mathrm{Dom}(f)=X=\bigcup_{\xi<\delta}X_\xi$ 且 $f=\bigcup_{\xi<\delta}f_\delta$. 因此 $(5.8)_\eta$ 对 $\mathfrak{GA}_\delta$ 成立，从而使 DBH_η 在 $\mathfrak{GA}_\delta$ 中成立.

考虑 dbh_δ：显然，$\forall x_0\exists x_1 Q(x_0,x_1)$ 在 $\mathfrak{GA}_\delta$ 中成立. 若对 $1<\xi<\delta$，$g\in \mathbf{G}_\delta$，$X_\xi=\{x_\zeta:\zeta<\xi\}$ 且 $g*(f\upharpoonright X_\xi)\in \mathbf{G}_\delta$，则 $g*(f\upharpoonright X_\xi)$ 满足 ψ_ξ 的前件 $\bigwedge_{0<\eta<\xi}[\bigwedge_{\zeta<\eta}Q(x_\zeta,x_\eta)]$ 蕴涵对每一 η 使得 $0<\eta<\xi$ 和每一 $\zeta<\eta$，$f(x_\zeta)\prec f(x_\eta)$. 令 $E=\bigcup\{f(x_\eta):\eta<\xi\}$，则 $E\in \mathscr{P}_\delta(\kappa)$ 且 $(g*(f\upharpoonright X_\xi))*f_1\in \mathbf{G}_\delta$ 使 $f_1:\{x_\xi\}\to E^\frown\langle 0\rangle$. 因为 $(g*(f\upharpoonright X_\xi))*f_1$ 赋于 x_ξ 的 $\mathscr{P}_\delta(\kappa)$ 的元素比赋于 x_ζ（其中 $\zeta<\xi$）的 $\mathscr{P}_\delta(\kappa)$ 的元素的尾部都多一个 0，所以赋于诸 x_ζ 的元素都是赋于 x_ξ 的元素的真初始部分，因此 $f(X_\zeta)\prec f_1(x_\xi)$，从而 $(g*(f\upharpoonright X_\xi))*f_1$ 满足

$$[\bigwedge_{0<\eta<\xi}(\bigwedge_{\zeta<\eta}Q(x_\zeta,x_\eta))]\wedge[\bigwedge_{\zeta<\xi}Q(x_\zeta,x_\xi)],$$

即满足 ψ_ξ 的后件 $\bigwedge_{0<\eta\leq\xi}(\bigwedge_{\zeta<\eta}Q(x_\zeta,x_\eta))$，这就证明了 ψ_ξ 在 $\mathfrak{GA}_\delta$ 中成立. 但是，$\mathbf{G}_\delta$ 中任何赋值都不满足 $\bigwedge_{0<\xi<\delta}[\bigwedge_{\zeta<\xi}Q(x_\zeta,x_\xi)]$，因为否则赋值于 x_ξ 的诸元素构成一个长度为 δ 的 $\prec$-链，这与假设矛盾，所以 dbh_δ 在 $\mathfrak{GA}_\delta$ 中不成立. □

据 5.1.8，要证明 dbh_δ 在 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda}(CD_{<\kappa},DBH_{<\delta};IC_{<\kappa})$ 中不可证，只须证 IC_γ 在 $\mathfrak{GA}_\delta$ 中保持成立性质. 这个证明与前面关于 $\delta=\omega$ 的证明类似，所以我们下面只说明它们的不同之处.

5.1.21 引理 引理 5.1.14—5.1.15 对 $\mathfrak{G}\mathfrak{A}_\delta$ 成立.

证明:这里的证明与 5.1.14—5.1.15 的证明类似. 细节留给读者做练习. □

为了从 $\delta=\omega$ 扩张到任意 $\delta<\lambda$,我们必须对 5.1.16 进行修改. 这里的困难是 $\bigcup(\mathrm{I}(E)\cap\mathrm{I}(D))$ 不必是 $\mathrm{I}(D)$ 的元素. 因此我们要用 D 的所有幂 $<\delta$ 的子集构成的 $\prec$-链的并的集合代替原来的 $\mathrm{I}(D)$:

对 $D\subseteq\mathscr{P}_\delta(\kappa)$,令

$$\mathrm{Un}_\delta(D)=\{\bigcup C: C\subseteq D, |C|<\delta \text{ 且 } C \text{ 是}\prec\text{-链}\}.$$

因为 δ 是正则基数,所以 $\mathrm{Un}_\delta(D)\subseteq\mathscr{P}_\delta(\kappa)$. 因为

$$\mathrm{Dom}(\bigcup\{E_\xi:\xi<\delta_1\})=\bigcup\{\mathrm{Dom}(E_\xi):\xi<\delta_1\},$$

所以 $E\prec\bigcup\{E_\xi:\xi<\delta_1\}$ 蕴涵对某个 $\xi<\delta_1$, $E\prec E_\xi$,因此 $\mathrm{I}(\mathrm{Un}_\delta(D))\subseteq\mathrm{Un}_\delta(\mathrm{I}(D))$. **注意**:$\bigcup\{E_\xi:\xi<\delta_1\}$ 的每一坐标是某个 E_ξ 的坐标.

5.1.22 引理 假设 h 是从 $\langle\mathscr{P}_\delta(\kappa),\preccurlyeq\rangle$ 的一个子结构到 $\langle\mathscr{P}_\delta(\kappa),\preccurlyeq\rangle$ 的保距同构且 D 是 $\mathrm{Dom}(h)$ 中元素构成的长度 $<\delta$ 的 $\prec$-链使得 $\bigcup D\in\mathrm{Dom}(h)$,则 $h(\bigcup D)=\bigcup\{h(E):E\in D\}$. 因此

$$\mathrm{Dom}(h)=\mathscr{P}_\delta(\kappa) \text{ 且 } D\subseteq\mathrm{Ran}(h)\Rightarrow\mathrm{Un}_\delta(D)\subseteq\mathrm{Ran}(h).$$

证明:因为 h 是保序的,所以对所有 $E\in D$, $h(E)\preccurlyeq h(\bigcup D)$,因此 $\bigcup\{h(E):E\in D\}\preccurlyeq h(\bigcup D)$. 因为

$$\begin{aligned}\mathrm{Dom}(h(\bigcup D))&=\mathrm{Dom}(\bigcup D)=\bigcup\{\mathrm{Dom}(E):E\in D\}\\&=\bigcup\{\mathrm{Dom}(h(E)):E\in D\}\\&=\mathrm{Dom}(\bigcup\{h(E):E\in D\}).\end{aligned}$$

所以,
$$h(\bigcup D)=\bigcup\{h(E):E\in D\}.$$

假设 $\mathrm{Dom}(h)=\mathscr{P}_\delta(\kappa)$ 且 $D\subseteq\mathrm{Ran}(h)$,若 $\bigcup C\in\mathrm{Un}_\delta(D)$,则 C 是 D 的 $<\delta$ 个元素的 $\prec$-链. 因为 $D\subseteq\mathrm{Ran}(h)$ 且 $C\subseteq D$,所以 $C\subseteq\mathrm{Ran}(h)$,因此 $\bigcup C\in\mathrm{Ran}(h)$. □

5.1.23 引理 若 h 是从 $\langle\mathscr{P}_\delta(\kappa),\preccurlyeq\rangle$ 的一个子结构到 $\langle\mathscr{P}_\delta(\kappa),\preccurlyeq\rangle$ 的保距同构使得 $\mathrm{Un}_\delta(\mathrm{I}(D))\subseteq\mathrm{Dom}(h)$ 且存在集合 W

$\subseteq\kappa$ 使得 W 的幂为 κ 且 W 不包含 $\mathrm{Ran}(h\restriction D)$的元素的坐标. 对每一 $E\in\mathscr{P}_\delta(\kappa)$，令 $\mathrm{R}_\delta(E)=\bigcup(\mathrm{I}(E)\cap\mathrm{I}(D))$，则对任意单射 $f\in W^\kappa$，下列函数 $h_{\delta,f}$：

$$h_{\delta,f}(E)=h(\mathrm{R}_\delta(E))^\frown f\circ(E-\mathrm{R}_\delta(E))$$

是$\langle\mathscr{P}_\delta(\kappa),\preccurlyeq\rangle$上的保距自同构使得

$$h_{\delta,f}\restriction\mathrm{Un}_\delta(\mathrm{I}(D))=f\restriction\mathrm{Un}_\delta(\mathrm{I}(D)).$$

而且在 $\mathrm{Ran}(h_{\delta,f})$中的任何序列唯一地表示为形如 $H^\frown F$ 的序列，其中 $H\in\mathrm{Ran}(h\restriction\mathrm{Un}_\delta(\mathrm{I}(D)))$且 $F\in\mathscr{P}_\delta(W)$. 对这样的序列，有

$$H^\frown F\preccurlyeq H_1{}^\frown F_1\Rightarrow(H\prec H_1\text{ 且 }F=\varnothing)\text{ 或 }(H=H_1\text{ 且 }F\preccurlyeq F_1).$$

证明：若 $h(\bigcup D_1)\in\mathrm{Ran}(h\restriction\mathrm{Un}_\delta(\mathrm{I}(D)))$，则

$$\bigcup D_1\in\mathrm{Un}_\delta(\mathrm{I}(D)),$$

所以 $\bigcup D_1$ 是 $\mathrm{I}(D)$的某个$<\delta$个元素的$\prec$-链 D_1 的并. 据 5.1.22，

$$h(\bigcup D_1)=\bigcup\{h(E_1):E_1\in D_1\}.$$

因为 $D_1\subseteq\mathrm{I}(D)$，所以 $\mathrm{Ran}(h\restriction\mathrm{Un}_\delta(\mathrm{I}(D)))$的元素的每一坐标是$\{h(E):E\in D\}=\mathrm{Ran}(h\restriction D)$的元素的坐标. 因此 5.1.16 的证明的第一部分可以原封不动地在此通过.

对证明的第二部分，需要验证若 $E_0\preccurlyeq E_1$，则

$$E_0\in\mathrm{Un}_\delta(\mathrm{I}(D))\Rightarrow E_0\preccurlyeq\mathrm{R}_\delta(E_1);$$

$$E_0\notin\mathrm{Un}_\delta(\mathrm{I}(D))\Rightarrow\mathrm{R}_\delta(E_0)=\mathrm{R}_\delta(E_1).$$

在第一种情况下，E_0 是 $\mathrm{I}(E_1)\cap\mathrm{I}(D)$的一个子集的并，因此 $E_0\preccurlyeq\mathrm{R}_\delta(E_1)$. 在第二种情况下，我们有 $\mathrm{R}_\delta(E_0)\preccurlyeq\mathrm{R}_\delta(E_1)$. 设 $\mathrm{R}_\delta(E_0)\prec\mathrm{R}_\delta(E_1)$，则根据 5.1.22 前面的说明，对某个 $E_2\in\mathrm{I}(E_1)\cap\mathrm{I}(D)$，$\mathrm{R}_\delta(E_0)\prec E_2$. 因此 E_0,E_2 中的一个是另一个的初始部分，但因为 $E_2\in\mathrm{I}(D)$，所以

$$E_0\preccurlyeq E_2\Rightarrow E_0\in\mathrm{Un}_\delta(\mathrm{I}(D)),\quad E_2\prec E_0\Rightarrow E_2\preccurlyeq\mathrm{R}_\delta(E_0).$$

但这两种情况皆不可能，因为第一种情况与 $E_0\notin\mathrm{Un}_\delta(\mathrm{I}(D))$矛盾，第二种情况与 $\mathrm{R}_\delta(E_0)\prec E_2$ 矛盾，故 $\mathrm{R}_\delta(E_0)\prec\mathrm{R}_\delta(E_1)$不成立，因此

$$\mathrm{R}_\delta(E_0)=\mathrm{R}_\delta(E_1).$$

本证明的其余部分如同 5.1.16 证明的相应部分. □

5.1.24 引理 令 h 是 $\langle\mathscr{P}_\delta(\kappa),\preccurlyeq\rangle$ 上的保距自同构，$\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$规定如前，$\mathfrak{GA}_\delta=\langle\mathscr{P}_\delta(\kappa),\prec,\mathbf{G}_\delta\rangle$，其中$\prec$是 $\mathfrak{GA}_\delta$ 对 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$的 Q 的解释，则对所有 $g\in\mathbf{G}_\delta$ 和 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$的所有公式 φ，

$$\mathfrak{GA}_\delta\models\varphi[g]\Leftrightarrow\mathfrak{GA}_\delta\models\varphi[h\circ g].$$

证明：我们用 5.1.23 代替 5.1.16，则 5.1.17 的证明仍有效. 5.1.22 用于保证

$$\mathrm{Un}_\delta(\mathrm{I}(D))\subseteq\mathrm{Ran}(h)=\mathrm{Dom}(h^{-1}).\ \square$$

5.1.25 定理 对 $\gamma<\kappa$，IC_γ 在 $\mathfrak{GA}_\delta$ 中保持成立性质，从而使 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\mathrm{CD}_{<\kappa};\mathrm{IC}_{<\kappa})$的所有内定理在 $\mathfrak{GA}_\delta$ 中成立.

证明：根据 5.1.18，只须证若 $\mathrm{I}(D)$不包含长度为 δ 的$\prec$-链，则 $\mathrm{Un}_\delta(\mathrm{I}(D))$也不包含长度为 δ 的$\prec$-链.

假设 $\mathrm{Un}_\delta(\mathrm{I}(D))$包含长度为 δ 的$\prec$-链$\langle H_\xi:\xi<\delta\rangle$使得对 $\zeta<\zeta_1<\delta$，$H_\zeta\prec H_{\zeta_1}$. 因此每一 H_ξ 可以表示为 $H_\xi=\bigcup D_\xi$，其中 D_ξ 是 $\mathrm{I}(D)$的$<\delta$ 个元素的非空$\prec$-链. 我们要证明 $\mathrm{I}(D)$中存在长度为 δ 的$\prec$-链. 为此要施超穷归纳，对每一非极限序数 $\xi<\delta$，选择 D_ξ 的一个元素 E_ξ 使得对 $\zeta<\zeta_1\leqslant\xi$，$E_\zeta\prec E_{\zeta_1}$. 令 E_1 是 D_1 的任意元素. 对所有非极限序数 $\eta<\xi$，据归纳假设，已选择 $E_\eta\in D_\eta$ 使得对 $\zeta<\zeta_1\leqslant\eta$，$E_\zeta\prec E_{\zeta_1}$（因为 $\bigcup D_\xi\prec D_{\xi_1}$）. 考虑 H_ξ，其中 ξ 是非极限序数. 若 $\xi-1$ 也是非极限序数，则 $E_{\xi-1}\preccurlyeq H_{\xi-1}\prec H_\xi=\bigcup D_\xi$ 蕴涵存在 D_ξ 的一元素把 $E_{\xi-1}$作为其真初始部分. 则我们可以选择这样一个元素作为 E_ξ. 若 $\xi-1$ 是极限序数，则对所有非极限序数 $\eta<\xi$，$H_\eta\prec H_{\xi-1}$. 所以对所有非极限序数 $\eta<\xi$，$E_\eta\prec H_{\xi-1}$，因此

$$H=\bigcup\{E_\eta:\eta<\xi\}\preccurlyeq H_{\xi-1}\prec H_\xi.$$

这样 D_ξ 中有一元素使得 H 作为其真初始部分. 因此可以选择这样的元素 E_η 作为 E_ξ. 这样 $\mathrm{I}(D)$中有长度为 δ 的$\prec$-链使得对 $\zeta<\zeta_1<\delta$，

$$H_\zeta\prec H_{\zeta_1}.\ \square$$

5.1.26 定理 令 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$含二元谓词符号 Q，$\lambda>\omega$ 且 $\omega<\delta<\lambda$ 使

δ是正则基数，则 dbh_ω 是有效式但在$\mathbf{B}_{\kappa\lambda}(CD_{<\kappa},DBH_{<\delta};IC_{<\kappa})$中不可证，从而使 DBH_δ 独立于 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda}(CD_{<\kappa},DBH_{<\delta};IC_{<\kappa})$.

证明：据 5.1.20 和 5.1.25. □

下面我们把已证的结果和未解决的问题整理汇总如下：

(1) 当 $\lambda=\omega$ 时，$\mathbf{B}_{\omega_1\omega\rho\pi}$是完全的，但对 $\kappa>\omega_1$，$\mathbf{B}_{\kappa\omega\rho\pi}(CD_{<\kappa})$的完全性还未解决，然而这并不意味量词规则和量词公理的独立性没有解决. 例如据 5.1.10，

$$\mathbf{B}_{\kappa\omega\rho\pi}(CD_{<\kappa})\subset\mathbf{B}_{\kappa\omega\rho\pi}(CD_{<\kappa},BH_\omega)$$

此外，Gregory 在其[1971]中证明$\mathbf{B}_{\infty\omega}(\mathrm{Taut})$相对$\mathscr{L}_{\infty\omega}$是不完全的（其中 Taut 是所有无穷重言式及其代换特例的聚合），$\{IC_\gamma:\gamma\in\mathbf{CN}\}$不是$\mathbf{B}_{\infty\omega}(\mathrm{Taut})$的导出规则，从而证明前者独立于后者.

(2) 若 $\lambda>\omega$，则

$$\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(CD_{<\kappa})\subset\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(CD_{<\kappa},BH_\omega).$$

更一般地，若 $\omega\leqslant\gamma<\lambda$ 且 γ 是正则基数，则

$$\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(CD_{<\kappa},BH_{<\gamma})\subset\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(CD_{<\kappa},BH_\gamma).$$

若 γ 是奇异基数，则

$$\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(BH_{<\gamma})=\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(BH_\gamma).$$

(3) 用 DBH 置换(2)中的 BH，能得到类似(2)的结果.

(4) 若 $\omega\leqslant\gamma<\lambda$ 且 γ 是正则基数，则

$$\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(CD_{<\kappa},DBH_{<\gamma})\subset\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(CD_{<\kappa},DBH_{<\gamma},BH_\gamma).$$

(5) 若 $\omega<\lambda$，则

$$\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(CD_{<\kappa};IC_{<\kappa})\subset\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(CD_{<\kappa},DBH_\omega;IC_{<\kappa}).$$

更一般地，若 $\omega\leqslant\gamma<\lambda$ 且 γ 是正则基数，则

$$\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(CD_{<\kappa},DBH_{<\gamma};IC_{<\kappa})\subset\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(CD_{<\kappa},DBH_\gamma;IC_{<\kappa}).$$

注意：(2)和(3)是等价的，但这个证明完全是例行公事，只依赖相关的合取和析取的组合，所以这里省略，其它命题都可以从 5.1.10，5.1.12，5.1.19 和 5.1.26 推出.

说明：当 $\lambda=\kappa$ 是不可达基数时，若 $\gamma<\kappa$，我们可以证明 $\mathbf{B}_{\kappa\kappa\rho\pi}(CD_{<\kappa},DBH_\gamma,BH_{<\kappa})$是不完全的. 而当 κ 是强不可达基数时，

$\mathbf{B}_{\kappa\kappa\rho\pi}(\mathrm{CD}_{<\kappa},\mathrm{DBH}_{<\kappa})$是完全的；但当$\kappa$是弱不可达基数但不是强不可达基数时，其完全性问题还未解决．若κ是无穷非极限基数，则不仅$\mathbf{B}_{\kappa\kappa\rho\pi}(\mathrm{CD}_{<\kappa},\mathrm{DBH}_{<\kappa})$是不完全的，而且正如我们在下一章将要看到的那样，在这种情况下，不存在可判定的演绎系统．

练　习

5.1.27　证明引理 5.1.21．

§2　理论的语义独立性

5.2.1 定义　(1) 称$\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的句子集$\Sigma$是(**语义**)**独立**的

$\Leftrightarrow$ 对每一$\sigma\in\Sigma$，$\Sigma-\{\sigma\}\nvDash\sigma$(即$\Sigma-\{\sigma\}$不语义蕴涵$\sigma$)．

称Σ是γ-**语义独立**的 $\Leftrightarrow$ Σ的每一幂$<\gamma$的子集是独立的．

称Σ是**可数**(ω_1-)**语义独立**的

$\Leftrightarrow$ Σ的每一可数子集是独立的．

(2) 称$\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$-理论$T$有一**独立**(或$\gamma$-**独立**)**的公理集**

$\Leftrightarrow$ T语义等价一独立(或γ-独立)的句子集．

5.2.2 引理　在语言$\mathscr{L}_{\omega\omega}$中，独立、可数独立和$\gamma$(其中$\gamma>\omega_1$)-独立这三个概念是语义(逻辑)等价的．

证明：令Σ是$\mathscr{L}_{\omega\omega}$的句子集，

Σ是γ-独立(或可数独立)的

$\Leftrightarrow$ 对Σ的任意幂$<\gamma$(或任意可数)的子集Θ，

对每一$\sigma\in\Theta$，$\Theta-\{\sigma\}\nvDash\sigma$

$\Leftrightarrow$ 对每一$\sigma\in\Sigma$，$\Sigma-\{\sigma\}\nvDash\sigma$　(据$\mathscr{L}_{\omega\omega}$-紧致性定理)

$\Leftrightarrow$ Σ是独立的．□

注意：在无穷逻辑中，由于$\mathscr{L}_{\omega\omega}$的紧致性定理的直接概括不必然成立，所以独立、可数独立和γ-独立这三个概念不语义等价．但显然有下列蕴涵关系：

独立 ⇒ γ(其中 $\gamma>\omega_1$)-独立 ⇒ 可数独立.

下例说明可数语义独立不蕴涵语义独立:令 $\mathscr{L}=\{R(-,-)\}\cup\{c_\alpha:\alpha<\omega_1\}$, Σ 是下列句子集,

(1) $\{\neg(c_\alpha\equiv c_\beta):\alpha<\beta<\omega_1\}$,

(2) "$R(-,-)$是函数",

(3) $\exists x\forall y[\bigvee_{n<\omega}y\equiv c_n\rightarrow\neg R(y,x)]$.

句子(3)述说:"该函数不能把一固定可数子集映射到论域上."因为(3)可从(1)和(2)通过基数论证得到,所以 Σ 不是独立的. 但显然 Σ 的每一可数子集是独立的.

Tarski 在其[1923]已注意到 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$的任意可数理论有一个独立的公理集. M. I. Reznikoff 在其[1965]把这个结果扩张到 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$的任意基数的理论. Tarski 的断定由 Caicedo 在其[1981]扩张到 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$的情况,证明了:

$\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$的任意幂$\leqslant\kappa$的理论有一个独立的公理集;

而且这个断定在非常弱的条件下,相对任意关于 κ 的语言成立.

Reznikoff 的结果显然更难于概括到无穷语言. 遵循 Reznikoff 的路线,Caicedo 在其[1981]所能得到的最好结果是:根据 **GCH**,

幂$\leqslant\aleph_\omega$ 的 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$-理论有一个可数独立的公理集.

这个结果只依赖 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的某些一般的性质, 包括 E. G. K. López-Escobar在其[1965]证明的 Craig-内插定理(参见第 7 章 § 1).

这里我们将上述结果尽可能地扩张到 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的情况.

5.2.3 定理 令 T 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的任意幂$\leqslant\kappa$ 的理论,则 T 有一个用 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$表述的独立的公理集.

证明:不妨令 $T=\{\sigma_\delta:\delta<\kappa\}$. 假设 T 中有非有效句子(否则 T 是有效句子集,则空集$\varnothing$就是 T 的独立的公理集),且如下归纳定义 T 的子集 $T_1=\{\theta_\xi:\xi<\kappa_0\}$:其中 $\kappa_0\leqslant\kappa$ 且

$\theta_0=$第一个 $\sigma_\delta\in T$ 使得$\varnothing\nvDash\sigma_\delta$.

$\theta_\xi=$第一个 $\sigma_\delta\in T$ 使得 $\bigwedge_{\zeta<\xi}\theta_\zeta\nvDash\sigma_\delta$, 对 $1<\xi$.

易见 κ_0 是第一个 ξ 使得上述要求的 σ_δ 不存在. 施归纳易证：对所有 $\delta<\kappa$，存在这样的 ξ 使得 $\bigwedge_{\zeta<\xi}\theta_\zeta\models\sigma_\delta$. 显然，$T\models T_1$. 另一方面，$T_1$ 是 T 的所有不能从其前面的公式的合取语义蕴涵的公式的集合. 对任意 $\sigma\in T$，若 $\sigma\in T_1$，则 $T_1\models\sigma$；若 $\sigma\notin T_1$，则 σ 是第一个 $\sigma_\delta\in T$ 使得 $\bigwedge_{\zeta<\xi}\theta_\zeta\models\sigma_\delta$，因为 $\{\theta_\zeta:\zeta<\xi\}\subseteq T_1$，所以 $T_1\models\sigma_\delta$，因此 $T_1\models T$. 这样我们证明了 T 和 T_1 语义等价.

现在构造 T_2 如下：

$$T_2=\{\theta_0\}\cup\{\bigwedge_{\zeta<\xi}\theta_\zeta\to\theta_\xi:0<\xi<\kappa_0\}.$$

施归纳于 ξ，我们来证明 T_2 和 T_1 是语义等价的：若 $\xi=1$，则 $T_2=\{\theta_0,\theta_0\to\theta_1\}$，且 $T_1=\{\theta_0,\theta_1\}$，则显然 T_2 和 T_1 语义等价. 假设 $\xi-1$ 时 T_2 和 T_1 语义等价. 不妨令 $T_1=\{\theta_0,\cdots,\theta_\xi\}$，$T_2=\{\theta_0,\cdots,\bigwedge_{\zeta<\xi}\theta_\zeta\to\theta_\xi\}$，据归纳假设，$T_2-\{\bigwedge_{\zeta<\xi}\theta_\zeta\to\theta_\xi\}\models T_1-\{\theta_\xi\}$，所以 $T_2\models\bigwedge_{\zeta<\xi}\theta_\zeta$. 因为 $T_2\models\bigwedge_{\zeta<\xi}\theta_\zeta\to\theta_\xi$，所以 $T_2\models\theta_\xi$，因此 $T_2\models T_1$. 另一方面，$T_1\models\theta_\xi$，所以 $T_1\models\bigwedge_{\zeta<\xi}\theta_\zeta\to\theta_\xi$，据归纳假设，$T_1-\{\theta_\xi\}\models T_2-\{\bigwedge_{\zeta<\xi}\theta_\zeta\to\theta_\xi\}$，因此 $T_1\models T_2$. 所以易见 T_2 和 T_1 是语义等价的，从而 T_2 和 T 是语义等价的，因此 T_2 是 T 的公理集. 下证 T_2 是独立的.

令 $\psi_\xi=\bigwedge_{\zeta<\xi}\theta_\zeta\to\theta_\xi$（其中 $\psi_0=\top\to\theta_0$ 使得 $\top$ 是重言式），因为 ψ_ξ 的前件并不语义蕴涵后件，所以存在结构 $\mathfrak{A}$ 使得 $\mathfrak{A}\not\models\psi_\xi$，因此对任何别的 $\psi_\tau\in T_2$，若 $\tau>\xi$，则 $\mathfrak{A}\not\models\bigwedge_{\zeta<\tau}\theta_\zeta$，所以 $\mathfrak{A}\models\psi_\tau$；若 $\tau<\xi$，则 $\mathfrak{A}\models\theta_\tau$，所以 $\mathfrak{A}\models\psi_\tau$. 因此对每一 $\psi_\xi\in T_2$，总存在一个 $\mathfrak{A}$ 使得 $\mathfrak{A}\models T_2-\{\psi_\xi\}$ 但 $\mathfrak{A}\not\models\psi_\xi$，从而使 $T_2-\{\psi_\xi\}\not\models\psi_\xi$，证得 T_2 是独立的. □

5.2.4 引理 令 Θ 和 Σ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的两个不相交的句子集使得 $|\Theta|\leqslant|\Sigma|$. 若每一 $\sigma\in\Sigma$ 不被 $\Sigma\cup\Theta$ 的任意（或任意幂 $<\gamma$ 且）不含 σ 的句子集所语义蕴涵，则 $\Sigma\cup\Theta$ 语义等价一个用 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 表述的独立（或 γ-独立）的句子集.

证明：令 $f:\Theta\to\Sigma$ 是单射，考虑集合

$$\Xi=(\Sigma-f[\Theta])\cup\{\sigma\wedge f(\sigma):\sigma\in\Theta\},$$

其中 $f[\Theta]=\{f(\sigma):\sigma\in\Theta\}$. 因为对每一 $\varphi\in\Xi$,或者 $\varphi\in\Sigma-f[\Theta]$ 或者 $\varphi=\sigma\wedge f(\sigma)$,其中 $\sigma\in\Theta$,所以总有 $\Sigma\cup\Theta\models\sigma$,因此 $\Sigma\cup\Theta\models\Xi$. 另一方面,若任意 $\varphi\in\Sigma\cup\Theta$,则或者 $\varphi\in\Sigma$ 或者 $\varphi\in\Theta$,所以总有 $\Xi\models\varphi$,因此 $\Xi\models\Sigma\cup\Theta$. 由此我们得出 Ξ 和 $\Sigma\cup\Theta$ 语义等价,因此下面只须证明 Ξ 是独立的(或 γ-独立的).

(1) 假设每一 $\psi\in\Sigma$ 不被 $\Sigma\cup\Theta$ 的任意不含 ψ 的句子集所语义蕴涵. 令 φ 是 Ξ 中任意元素,我们要证 $\Xi-\{\varphi\}\not\models\varphi$:若 $\varphi\in\Sigma-f[\Theta]$,则据假设和 Ξ 的构造,易见 $\Xi-\{\varphi\}\not\models\varphi$. 若 $\varphi=\sigma\wedge f(\sigma)$,其中 $\sigma\in\Theta$,则据假设,$f(\sigma)\in\Sigma$ 不被 $\Sigma\cup\Theta$ 的任意不含 $f(\sigma)$ 的句子集语义蕴涵,所以 $\Xi-\{\sigma\wedge f(\sigma)\}\not\models f(\sigma)$. 因为 $\sigma\wedge f(\sigma)\to f(\sigma)$,所以仍有 $\Xi-\{\varphi\}\not\models\varphi$.

(2) 假设每一 $\psi\in\Sigma$ 不被 $\Sigma\cup\Theta$ 的任意幂 $<\gamma$ 的不含 ψ 的句子集所语义蕴涵. 令 Ξ_1 是 Ξ 的任意幂 $<\gamma$ 的子集,则 Ξ_1 形如

$$(\Sigma_1-f[\Theta_1])\cup\{\sigma\wedge f(\sigma):\sigma\in\Theta_1\},$$

其中 Σ_1 和 Θ_1 分别是 Σ 和 Θ 的子集. 令 φ 是 Ξ_1 的任意元素,我们要证 $\Xi_1-\{\varphi\}\not\models\varphi$. 若 $\varphi\in\Sigma_1-f[\Theta_1]$,则据假设,$\varphi\in\Sigma$ 不被 $\Sigma\cup\Theta$ 的每一幂 $<\gamma$ 的不含 φ 的句子集所语义蕴涵,所以 $\Xi_1-\{\varphi\}\not\models\varphi$. 另一方面,若 $\varphi=\sigma\wedge f(\sigma)$,其中 $\sigma\in\Theta_1$,则据假设,$f(\sigma)\in\Sigma$ 不被 $\Sigma\cup\Theta$ 的任意幂 $<\gamma$ 的不含 $f(\sigma)$ 的句子集所语义蕴涵,所以

$$\Xi_1-\{\sigma\wedge f(\sigma)\}\not\models f(\sigma).$$

因为 $\models\sigma\wedge f(\sigma)\to f(\sigma)$,所以仍有 $\Xi_1-\{\varphi\}\not\models\varphi$. □

下面我们来研究 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 中多于 ω_1 个句子的理论. 假设 T 是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 的理论,δ 是在 T 的任意公理集中出现的非逻辑符号的集合的最小基数. **注意**:若 T 有 δ 个非逻辑符号,因为 T 中每一句子至多有 ω 个非逻辑符号,所以 $|T|\leqslant\delta^\omega$.

5.2.5 定理(Caicedo,[1981]) 若 T 有一个由幂 $\leqslant\delta$(δ 的规定如上)个句子组成的公理集,则 T 有一个可数独立的公理集.

证明:令 T_1 是 T 的由幂 $\leqslant\delta$ 个句子组成的公理集. 不妨假设 $\delta>\omega$,否则,据 5.2.3,T_1 有一独立的公理集,从而 T 有一可数公

理集. 令 $\mathrm{Sm}(T_1)$和 $\mathrm{Sm}(\sigma)$分别是 T_1 和 σ 的非逻辑符号集. 定义

$$T_0=\{\sigma\in \mathrm{Sent}(\mathrm{Sm}(T_1)_{\omega_1\omega}):T_1\models\sigma\}.$$

显然 $T_1\subseteq T_0$,所以 $T_0\models T_1$. 另一方面,又有 $T_1\models T_0$,因此 T_0 语义等价 T_1,从而语义等价 T.

施归纳于 ξ 来如下定义 T_0 的元素组成的序列$\{\sigma_\xi:\xi<\delta\}$:令 $\xi<\delta$ 且对所有 $\zeta<\xi$,设 σ_ζ 已定义完毕,则可以选择 $\sigma_\xi\in T_0$ 使得

$$T_0\cap \mathrm{Sent}((\bigcup_{\zeta<\xi}\mathrm{Sm}(\sigma_\zeta))_{\omega_1\omega})\not\models\sigma_\xi. \tag{5.9}$$

这样的句子是存在的,因为若不存在,则对所有 $\sigma_\xi\in T_0$,

$$T_0\cap \mathrm{Sent}((\bigcup_{\zeta<\xi}\mathrm{Sm}(\sigma_\zeta))_{\omega_1\omega})\models\sigma_\xi.$$

因此 $T_0\cap \mathrm{Sent}((\bigcup_{\zeta<\xi}\mathrm{Sm}(\sigma_\zeta))_{\omega_1\omega})$与 T_0 语义等价,所以我们有一个 T 的、具有 η 个符号的公理集 $T_0\cap \mathrm{Sent}((\bigcup_{\zeta<\xi}\mathrm{Sm}(\sigma_\zeta))_{\omega_1\omega})$,其中

$$\begin{aligned}\eta=|\bigcup_{\zeta<\xi}\mathrm{Sm}(\sigma_\zeta)|&\leqslant\sum_{\zeta<\xi}|\mathrm{Sm}(\sigma_\zeta)|\\&\leqslant|\xi|\cdot\omega=\max(|\xi|,\omega)<\delta.\end{aligned}$$

因此有 $\eta<\delta$,而这与我们前面对 δ 的规定矛盾.

现在定义

$$D_\xi=\mathrm{Sm}(\sigma_\xi)-\bigcup_{\zeta<\xi}\mathrm{Sm}(\sigma_\zeta).$$

显然这些 σ_ξ 都互不相同(因为否则,σ_ξ 是别的 σ_ζ 或它们的合取的语义后承,而这与前面的假设矛盾),并且这些 D_ξ 都互不相交且非空. 我们来证:

$$\varphi\in T_0 \text{ 且 } D_\xi\cap\mathrm{Sm}(\varphi)=\varnothing\Rightarrow\varphi\not\models\sigma_\xi. \tag{5.10}$$

证明:设 $\varphi\in T_0$ 且 $D_\xi\cap\mathrm{Sm}(\varphi)=\varnothing$但 $\varphi\models\sigma_\xi$. 据 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的 Craig-内插定理(参见第 7 章§1),存在句子 θ 使得 $\varphi\models\theta,\theta\models\sigma_\xi$,且$\mathrm{Sm}(\theta)\subseteq\mathrm{Sm}(\varphi)\cap\mathrm{Sm}(\sigma_\xi)$. 但 $\mathrm{Sm}(\sigma_\xi)\subseteq D_\xi\cup\bigcup_{\zeta<\xi}\mathrm{Sm}(\sigma_\zeta)$,所以 $\mathrm{Sm}(\theta)\subseteq D_\xi\cup\bigcup_{\zeta<\xi}\mathrm{Sm}(\sigma_\zeta)$. 因为 $D_\xi\cap\mathrm{Sm}(\varphi)=\varnothing$,所以 $\mathrm{Sm}(\theta)\subseteq\bigcup_{\zeta<\xi}\mathrm{Sm}(\sigma_\zeta)$. 因为 $T_0\models\varphi$ 且 $\varphi\models\theta$ 且 T_1 与 T_0 语义等价,所以 $T_1\models\theta$. 另一方面,

$$\mathrm{Sm}(\theta)\subseteq\bigcup_{\zeta<\xi}\mathrm{Sm}(\sigma_\zeta)\subseteq\mathrm{Sm}(T_0)\subseteq\mathrm{Sm}(T_1),$$

所以据 T_0 的构造，$\theta\in T_0$. 因为 $\theta\models\sigma_\xi$，所以

$$T_0\cap\mathrm{Sent}((\bigcup_{\zeta<\xi}\mathrm{Sm}(\sigma_\zeta))_{\omega_1\omega})\models\sigma_\xi.$$

但这与(5.9)中对 σ_ξ 的规定矛盾，所以(5.10)成立.

现在我们用下列方式把每一 $\varphi\in T_0$ 和另一句子 $\varphi^*\in T_0$ 对应起来：若 $\varphi=\sigma_0$，则定义 $\varphi^*=\sigma_0$；若 $\varphi\neq\sigma_0$，则令

$$\mathrm{S}(\varphi)=\{\sigma_\zeta:D_\zeta\cap\mathrm{Sm}(\varphi)\neq\varnothing,\ \sigma_\zeta\neq\varphi\},$$

且定义

$$\varphi^*=\sigma_0\wedge\bigwedge\mathrm{S}(\varphi)\rightarrow\varphi. \tag{5.11}$$

因为诸 D_ζ 不相交且 $\mathrm{Sm}(\varphi)$ 至多可数，所以至多有可数个 D_ζ 满足 $D_\zeta\cap\mathrm{Sm}(\varphi)\neq\varnothing$，所以(5.11)中的合取式是可数的. 因为 $T_0\models\varphi$ 且 $\varphi\models\varphi^*$，所以 $T_1\models\varphi^*$. 另一方面，$\mathrm{Sm}(\varphi^*)\subseteq\mathrm{Sm}(T_0)\subseteq\mathrm{Sm}(T_1)$，所以 $\varphi^*\in T_0$. 对在 σ_ξ^* 的前件中出现的每一 σ_ζ，据 σ_ζ 和 σ_ξ 的定义，$\sigma_\zeta\neq\sigma_\xi\Rightarrow\zeta\neq\xi$. 假设 $\zeta>\xi$，据 D_ζ 的定义，$D_\zeta\cap\mathrm{Sm}(\sigma_\xi)=\varnothing$，而这与 $\sigma_\zeta\in\mathrm{Sm}(\sigma_\xi)$ 矛盾，因此有 $\zeta<\xi$. 所以据分离规则且施归纳于 ξ，易证：

$$\{\sigma_\xi^*:\xi<\delta\}\models\sigma_\xi,\quad 对\ \xi<\delta. \tag{5.12}$$

因此就有

$$\{\sigma_\xi^*:\xi<\delta\}\cup\{\varphi^*\}\models\varphi,\quad 对\ \varphi\in T_0. \tag{5.13}$$

令 $\mathrm{Ant}(\sigma_\xi^*)$ 是 σ_ξ^* 的前件，则据 D_ξ 的定义，

$$D_\xi\cap\mathrm{Sm}(\mathrm{Ant}(\sigma_\xi^*))=\varnothing. \tag{5.14}$$

下面我们来证，对 $0<\xi<\delta$，

σ_ξ^* 不被任意可数集 $\{\varphi^*:\varphi^*\neq\sigma_\xi^*$ 且 $\varphi\in T_0\}$ 语义蕴涵. (5.15)

证明：令 $\{\varphi_i:i<\omega\}\subseteq T_0$ 是可数集. 把这个集合划分为二：

$$\{\varphi_i:i\in I\}=\{\varphi_i:\mathrm{Sm}(\varphi_i)\cap D_\xi=\varnothing\},$$

$$\{\varphi_j:j\in J\}=\{\varphi_j:\mathrm{Sm}(\varphi_j)\cap D_\xi\neq\varnothing\}.$$

据(5.14)，$\mathrm{Sm}(\bigwedge_{i\in I}\varphi_i\wedge\mathrm{Ant}(\sigma_\xi^*))\cap D_\xi=\varnothing$. 因为 $\bigwedge_{i\in I}\varphi_i\wedge\mathrm{Ant}(\sigma_\xi^*)\in T_0$，因此据(5.10)，

$$\bigwedge_{i\in I}\varphi_i\wedge\mathrm{Ant}(\sigma_\xi^*)\not\models\sigma_\xi.$$

选择结构 $\mathfrak{A}$ 使得 $\mathfrak{A}\models\bigwedge_{i\in I}\varphi_i\wedge\mathrm{Ant}(\sigma_\xi^*)$ 但 $\mathfrak{A}\not\models\sigma_\xi$. 所以对所有 $i\in I$, 据 φ_i^* 的构造, $\mathfrak{A}$ 满足其后件, 所以 $\mathfrak{A}\models\varphi_i^*$. 而且 $\mathfrak{A}\not\models\mathrm{Ant}(\sigma_\xi^*)\rightarrow\sigma_\xi$, 即 $\mathfrak{A}\not\models\sigma_\xi^*$. 对所有 $j\in J$, 我们有 $D_\xi\cap\mathrm{Sm}(\varphi_j)\neq\varnothing$ 且 $\varphi_j\neq\sigma_\xi$. 因为若 $\varphi_j=\sigma_\xi$, 据(5.14), 有

$$\mathrm{Sm}(\bigwedge_{j\in J}\varphi_j\wedge\mathrm{Ant}(\sigma_\xi^*))\cap D_\xi=\varnothing.$$

因为 $\bigwedge_{j\in J}\varphi_j\wedge\mathrm{Ant}(\sigma_\xi^*)\in T_0$, 所以据(5.10), $\bigwedge_{j\in J}\varphi_j\wedge\mathrm{Ant}(\sigma_\xi^*)\not\models\sigma_\xi$, 即 $\bigwedge_{j\in J}\varphi_j\wedge\mathrm{Ant}(\sigma_\xi^*)\not\models\varphi_j$, 矛盾, 所以 $\varphi_j\neq\sigma_\xi$. 因此据 $S(\varphi_j)$ 的构造, σ_ξ 必定在 φ_j^* 的前件中, 所以 $\mathfrak{A}\not\models\mathrm{Ant}(\varphi_j^*)$, 从而 $\mathfrak{A}\models\varphi_j^*$. 用这种方法, 我们得到可数集 $\{\varphi_k^*:k<\omega\}$ 使得 $\mathfrak{A}\models\{\varphi_k^*:k<\omega\}$ 但 $\mathfrak{A}\not\models\varphi_\xi^*$, 这就证明了(5.15).

令 $\Sigma=\{\varphi_\xi^*:0<\xi<\delta\}$, $\Theta=\{\dot{\varphi}_0\}\cup\{\varphi^*:\varphi\in T_1\}-\Sigma$, 则据(5.13), $\Sigma\cup\Theta\models T_1$. 但 T_1 语义等价 T_0 且 $T_0\supseteq\Sigma\cup\Theta$. 因为 $T_1\subseteq T_0$, 所以 $\Sigma\cup\Theta$ 语义等价 T_1, 从而语义等价 T. 因为 $|\Theta|\leqslant|T_1|+1\leqslant\delta=|\Sigma|$ 且 $\Sigma\cap\Theta=\varnothing$, 而且据(5.15), 每一 $\sigma_\xi^*\in\Sigma$ 不被 $\Sigma\cup\Theta$ 的任意不含 σ_ξ^* 的可数句子集所语义蕴涵, 所以 Σ 和 Θ 满足引理 5.2.4 的假设条件, 因此本定理得证. □

5.2.6 推论(GCH) 令 T 是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$-理论, 若 $|T|\leqslant\aleph_\omega$, 则 T 有一个可数独立的公理集.

证明: 若 T 有穷, 则据 5.2.3 就能得到结果. 假设 T 无穷且令 δ 如 5.2.5 所规定, 则

$$\delta\leqslant|\mathrm{Sm}(T)|\leqslant|T|\cdot\omega=|T|\leqslant\aleph_\omega. \tag{5.16}$$

对 δ, 有下面三种可能的情况:

(1) $\delta\leqslant\aleph_1=\omega_1$: 在这种情况下, T 有一个幂 $\leqslant\omega_1$ 的公理集. 因为在这种情况下, T 有一个非逻辑符号至多为 $\delta=\omega_1$ 的公理集 T_1. 显然, $|T_1|\leqslant(\omega_1)^\omega$, 但据 **GCH**, $(\omega_1)^\omega=\omega_1$, 所以 $|T_1|\leqslant\omega_1$. 因此据 5.2.3, 就有本推论.

(2) $\aleph_1<\delta<\aleph_\omega$: 据 **GCH** 和 **Hausdorff** 递归公式:

$$(\aleph_{\alpha+1})^{\aleph_\beta}=(\aleph_\alpha)^{\aleph_\beta}\cdot\aleph_{\alpha+1},$$

(参见 Jech 的[1978].)我们有 $\delta^{\aleph_0}=\delta$. 因此 T 有一个幂 $\leqslant\delta$ 的公理集. 据 5.2.5,就有本推论.

(3) $\delta=\aleph_\omega$: 据(5.16),$\delta=|T|$,而据 5.2.5,就有本推论. □

下面简单考察一下与语义独立性相对应的语法独立性概念.

5.2.7 定义 (1) 我们称 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的句子集 Σ 相对 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta;\Omega)$是**语法独立**的 $\Leftrightarrow$ 对所有 $\sigma\in\Sigma$,在 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta;\Omega)$中,$\Sigma-\{\sigma\}\nvdash\sigma$. 称 Σ 相对 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta;\Omega)$是 γ-**语法独立**的 $\Leftrightarrow$ Σ 的每一幂$<\gamma$ 的子集相对 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta;\Omega)$是语法独立的. 称 Σ 相对 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta;\Omega)$是**可数**($\omega_1$-)**语法独立** $\Leftrightarrow$ Σ 的每一可数子集相对 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta;\Omega)$是语法独立的.

(2) 称 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的句子集 Σ 相对 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta;\Omega)$有一个语法独立($\gamma$-语法独立)的公理集 $\Theta\Leftrightarrow$ 在 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta;\Omega)$中,$\Sigma$ 和 Θ 可互推,且 Θ 是语法独立的(或 γ-语法独立的).

下面的引理据上述定义易证.

5.2.8 引理

(1) 假设 T 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的任意理论,$\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta;\Omega)$是完全的,则

T 是 κ-语义独立的 $\Leftrightarrow$ T 相对 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta;\Omega)$是 κ-语法独立的.

(2) 假设 T 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的任意理论,$\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta;\Omega)$是强完全的,则

T 是语义独立的 $\Leftrightarrow$ T 相对 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta;\Omega)$是语法独立的. □

5.2.9 推论 (1) 假设 T 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的任意基数$\leqslant\kappa$ 的理论且 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta;\Omega)$是完全的,则 T 有一个用 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$表述的相对 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta;\Omega)$语法独立的公理集.

(2) 假设 T 是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的任意理论且有一个基数$\leqslant\delta$(其中 δ 如 5.2.5 前所规定)的公理集,则 T 有一个用 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$表述的、相对 $\mathbf{B}_{\omega_1\omega}$(可数)语法独立的公理集.

证明:据 5.2.8, 3.3.12, 5.2.3 和 5.2.5. □

问 题

5.2.10 是否 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的每一理论都有(可数)独立的公理集?

第 6 章 演绎系统的可定义性与不完全性

本章讨论第 2 章引入的演绎系统 $\mathrm{B}_{\kappa\lambda\mu\pi}(\Delta;\Omega)$的两个重要的性质：可定义性(definability)和不完全性.

本章 § 1 讨论 $\mathrm{B}_{\kappa\lambda\mu\pi}(\Delta;\Omega)$的可定义性. 我们用普通集合论的 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$-语言 $\mathscr{MS}^{\kappa}$作为元语言. 这种元语言在模型 $\mathfrak{M}(\mathscr{L}_{\kappa\lambda\mu\pi},g)=(\mathbf{H}(\kappa),H)$中得到解释，其中 g 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\mu\pi}$的符号集上的 Gödel-函数. 我们称 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\mu\pi}$的项集或公式集是可定义的 $\Leftrightarrow$ 该集的元素的 Gödel-序列的集合相对 $\mathfrak{M}(\mathscr{L}_{\kappa\lambda\mu\pi},g)$可以用 $\mathscr{MS}^{\kappa}$ 的一有穷公式来表述，所以除了分配律规则 $\mathrm{DR}_{\gamma},\kappa_{\eta}$ DR_{γ}(因为它们的前提集的基数不必然$<\kappa$)是不可定义之外，基本系统 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\mu\pi}$和分配公理 CD_{γ}，D_{γ}，选择公理 BH_{γ}，DBH_{γ} 等以及析取概括规则 IC_{γ}，DC_{γ} 等都在上述意义上是可定义的. 这样，若 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\mu\pi}(\Delta;\Omega)$是上述演绎系统，则

存在 $\mathscr{MS}^{\kappa}$的公式 $PRV(x)$使得 x 在模型 $\mathfrak{M}(\mathscr{L}_{\kappa\lambda\mu\pi},g)$中满足 $PRV(x)\Leftrightarrow x$ 是 $\mathrm{B}_{\kappa\lambda\mu\pi}(\Delta;\Omega)$的可证公式的 Gödel-序列.

§ 2 证明某些上述意义上的演绎系统是不完全的. 这里采用的方法是规定语言 $\mathscr{L}^{0}$和它的膨胀语言 $\mathscr{L}^{\kappa}$. 我们称存在用 $\mathscr{L}^{0}$ 表述的可定义的完全演绎系统 $\Leftrightarrow$ 存在 $\mathscr{MS}^{\kappa}$ 的公式 $PRV(x)$使得对所有 $S\in\mathbf{H}(\kappa)$，

S 在 $\mathfrak{M}(\mathscr{L}^{0},g)$中满足 $PRV(x)$

$\Leftrightarrow S$ 是 $\mathscr{L}^{0}$的一有效公式的 Gödel-序列.

在本节我们要证明，对无穷非极限基数 κ，$\mathscr{L}^{0}$的有效公式集不可能在 $\mathfrak{M}_{\kappa}$ 中用 $\mathscr{L}^{\kappa}$的一公式来定义(其中 $\mathfrak{M}_{\kappa}$ 是 $\mathscr{L}^{\kappa}$的结构)，由此证明不存在用 $\mathscr{L}^{0}$表述的、相对 $\mathfrak{M}_{\kappa}$ 可定义的完全演绎系统.

§1 演绎系统的可定义性

一、表述 $B_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta;\Omega)$ 的元语言

本节我们用普通集合论的 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$-语言作为元语言，来表述无穷语言 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 和由 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 描述的演绎系统 $B_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta;\Omega)$（其中 κ 是无穷正则基数；$\lambda=0$ 或 $\omega\leqslant\lambda\leqslant\kappa$；$\rho$ 是无穷正则基数且若 λ 是奇异基数时，$\rho<\lambda$，当 λ 是正则基数时，$\rho\leqslant\kappa$；$\omega\leqslant\pi\leqslant\kappa$）. 我们把这样的元语言记为 $\mathscr{ML}^*$，它有下列记号：

个体变元：$x_0,\cdots,x_n,\cdots,\quad n<\omega$.

个体常元：$\overline{lb},\overline{rb},\bar{n},\bar{i},\bar{c},\bar{q},\overline{eq};\langle\bar{\delta}:\delta<\kappa\rangle$.

一元谓词符号：IV,IC.

二元谓词符号：$FU,PR,\doteq,\dot{\in}$.

$\mathscr{ML}^*$ 的模型是下列结构

$$\mathfrak{M}(\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi},g)=\langle\mathbf{H}(\kappa),H\rangle,$$

其中 g 是从 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的符号集到 κ 中的单射，称为 **Gödel-(配数)函数**，对 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的符号 S，$g(S)$ 称为 **Gödel-数**. $\mathbf{H}(\kappa)$ 是所有幂 $<\kappa$ 的遗传集的集合，H 是如下映射：

$H(\overline{lb})=g(()$，　$H(\overline{rb})=g())$，

$H(\bar{n})=g(\neg)$，　$H(\bar{i})=g(\rightarrow)$，

$H(\bar{c})=g(\wedge)$，　$H(\bar{q})=g(\forall)$，

$H(\overline{eq})=g(\equiv)$，　$H(\bar{\delta})=\delta$，　对每一 $\delta<\kappa$，

$IV^{\mathfrak{M}}=\{g(x):x$ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的个体变元$\}$，

$IC^{\mathfrak{M}}=\{g(c):c$ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的个体常元$\}$，

$FU^{\mathfrak{M}}=\{\langle\zeta,g(f^\zeta)\rangle:f^\zeta$ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的 ζ 元函数符号$\}$，

$PR^{\mathfrak{M}}=\{\langle\eta,g(P^\eta)\rangle:P^\eta$ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的 η 元谓词符号$\}$.

$\doteq^{\mathfrak{M}}$ 是 $\mathbf{H}(\kappa)$上的等于关系，$\dot{\in}^{\mathfrak{M}}$ 是 $\mathbf{H}(\kappa)$上的属于关系.

注意：(Ⅰ) 公式 $PR(\overline{eq})$在任意结构 $\mathfrak{M}(\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi},g)$中成立. 若 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$是一语言使得 $\rho<\kappa$，则对所有 $\rho\leqslant\zeta<\kappa$，公式$\forall x\neg FU(\zeta,x)$在模型 $\mathfrak{M}(\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi},g)$中成立. 同样，若 $\pi<\kappa$，则对所有 $\pi\leqslant\eta<\kappa$，公式$\forall x\neg PR(\bar{\eta},x)$在模型 $\mathfrak{M}(\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi},g)$中成立.

(Ⅱ) 这里把$\forall$和$\neg$作为初始符号引入是为了方便.

(Ⅲ) $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的符号集上的 Gödel-函数 g 可以用下列方式扩张到 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的项和公式上：一个项或公式的 **Gödel-序列**是该项或公式的符号的 Gödel-数的序列. 用符号来表示就是，$g(E)=g\circ E$，其中 E 是作为项或公式的序列. 类似地，我们能谈论诸项或诸公式的序列的 Gödel-序列，这样的诸序列的序列的 Gödel-序列，等等. 因为 κ 是正则基数，所以一个项或公式的 Gödel-序列是 $\mathbf{H}(\kappa)$的元素，而且$<\kappa$ 个项或公式的序列的 Gödel-序列也是 $\mathbf{H}(\kappa)$的元素.

下面我们要证明，对第 2 章定义的演绎系统 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta;\Omega)$，存在一公式 $PRV(x)$使得：

S 在 $\mathfrak{M}(\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi},g)$中满足 $PRV(x)$

$\Leftrightarrow S$ 是 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta;\Omega)$中一可证公式（相对 g）的 Gödel-序列.

为了描述形如 $PRV(x)$这样的公式，有必要在 $\mathscr{ML}^\kappa$中根据定义引入新的常元. 因为我们考虑的元语言是普通一阶语言，所以就有适于被定义常元的消除程序(elimination precedure). 关于这一点，可参见 S. C. Kleene 的[1952].

注意：下一节适于某个特定的无穷语言的消除程序加以修改可用于所有的无穷语言 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$，但在 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$的情况下，这个消除程序会有不必要的复杂性，因为在 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$的情况下，只需知道如何一次消除一个被定义符号的一次出现，但对无穷语言，这样做就不充分.

6.1.1 定义（被定义常元 defined constant） 令 $\mathfrak{M}=\langle M,H\rangle$ 是 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$的结构，则适于被定义常元的消除程序有下列性质：

(1) 用下列形式的定义引入一新 n 元谓词符号 Q^n：

$$\forall\vec{x}_n[Q^n(\vec{x}_n)\leftrightarrow\psi(\vec{x}_n)],$$

其中 $\psi(\vec{x}_n)$是 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$的公式且 $\vec{x}_n$ 是 ψ 仅有的自由变元. 若 $\mathscr{L}_{\omega\omega}'=\mathscr{L}_{\omega\omega}\cup\{Q^n\}$, $R_\psi=\{\langle\vec{a}_n\rangle:\mathfrak{M}\models Q^n(\vec{x}_n)[\vec{a}_n]\}$，且 $\mathfrak{M}'=\langle M,H\cup\{\langle Q^n,R_\psi\rangle\}\rangle$，则易见对 $\mathscr{L}_{\omega\omega}'$的所有公式 φ 和所有 $f\in M^{\mathrm{Var}}$，

$$\mathfrak{M}'\models\varphi[f]\Leftrightarrow\mathfrak{M}\models\varphi_e[f],$$

其中 φ_e 是从 φ 中消除 Q^n 得到的公式. 因此称公式 $\psi(\vec{x}_n)$相对 $\mathfrak{M}$ 定义了 R_ψ.

(2) 若$\exists x\psi(x)$和$\forall xy[\psi(x)\wedge\psi(y)\rightarrow x\doteq y]$在 $\mathfrak{M}$ 中成立且 $\mathrm{Fv}(\psi(x))=\{x\}$，则用下列形式的定义引入一新个体常元 $\bar{c}$：

$$\forall x[x\doteq\bar{c}\leftrightarrow\psi(x)].$$

若 $\mathscr{L}_{\omega\omega}'=\mathscr{L}_{\omega\omega}\cup\{\bar{c}\}$, $c\in M$ 是 $\mathfrak{M}$ 中满足 $\psi(x)$的唯一元，且 $\mathfrak{M}'=\langle M,H\cup\{\langle\bar{c},c\rangle\}\rangle$，则对 $\mathscr{L}_{\omega\omega}'$的所有公式 φ 和所有 $f\in M^{\mathrm{Var}}$，

$$\mathfrak{M}'\models\varphi[f]\Leftrightarrow\mathfrak{M}\models\varphi_e[f],$$

其中 φ_e 是从 φ 中消除 $\bar{c}$ 得到的公式. 故称 $\psi(x)$相对 $\mathfrak{M}$ 定义了 c.

(3) 若$\forall\vec{x}_n\exists y\psi(\vec{x}_n,y)$和$\forall\vec{x}_n\forall yz[\psi(\vec{x}_n,y)\wedge\psi(\vec{x}_n,z)\rightarrow y\doteq z]$在 $\mathfrak{M}$ 中成立且只有 $\vec{x}_n,y$ 在 $\psi(\vec{x}_n,y)$中是自由变元，则用下列形式的定义引入一新 n 元函数符号 f^n：

$$\forall\vec{x}_n\forall y[y\doteq F^n(\vec{x}_n)\leftrightarrow\psi(\vec{x}_n,y)].$$

若 $\mathscr{L}_{\omega\omega}'=\mathscr{L}_{\omega\omega}\cup\{F^n\}$，且 $H(F^n)$是把 M 中唯一的 e 赋于 $\mathfrak{M}$ 中元素的 n 元组$\langle\vec{a}_n\rangle$使得$\langle\vec{a}_n,e\rangle$满足 $\psi(\vec{x}_n,y)$且

$$\mathfrak{M}'=\langle M,H\cup\{\langle F^n,H(F^n)\rangle\}\rangle,$$

则对 $\mathscr{L}_{\omega\omega}'$的所有公式 φ 和所有 $f\in M^{\mathrm{Var}}$，

$$\mathfrak{M}'\models\varphi[f]\Leftrightarrow\mathfrak{M}\models\varphi_e[f],$$

其中 φ_e 是从 φ 中消除 F^n 得到的公式. 因此称公式 $\psi(\vec{x}_n,y)$相对 $\mathfrak{M}$ 定义了函数 $H(F^n)$.

二、集合论基本概念的可定义性

本小节我们固定 $\mathscr{L}_{\omega\omega}=\{\dot{=},\dot{\in}\}$，$\kappa$ 是无穷正则基数，$\mathfrak{H}_\kappa=\langle \mathbf{H}(\kappa),\in\rangle$ 是结构，$\dot{\in}$ 解释为 $\mathbf{H}(\kappa)$ 上的属于关系 $\in$.

对集合论的包含、有序对、关系、函数等概念的定义公式如通常. **注意**：有些概念在 $\mathbf{H}(\kappa)$ 中是不可定义的；例如，幂集运算在 $\mathbf{H}(\kappa)$ 中可以无定义，因为若 $\kappa=\gamma^+$，则 $\gamma\in\mathbf{H}(\kappa)$ 但 $\mathscr{P}(\kappa)\notin\mathbf{H}(\kappa)$. 6.1.1 的限制条件必须仔细地验证. 下面的定义只是例行公事.

6.1.2 定义 (1) $v\dot{=}\overline{Pr}(x,y)\Leftrightarrow v=\langle x,y\rangle$.

注意：严格地说，(1) 中的 $\overline{Pr}(x,y)$ 只能写作 $\overline{Pr}xy$. 我们之所以用 $\overline{Pr}(x,y)$ 是为了直观；下面的情况也类似.

(2) $v\dot{=}x\overline{\times}y\Leftrightarrow v=x\times y$.

(3) $v\dot{=}x\overline{\restriction}y\Leftrightarrow v=y\restriction x$.

(4) $v\dot{=}\overline{set}_n(\vec{x}_n)\Leftrightarrow v=\{\vec{x}_n\}$， 若 n 是非零自然数.

(5) $v\dot{=}\overline{dom}(x)\Leftrightarrow v=\mathrm{Dom}(x)$.

(6) $v\dot{=}\overline{0}\Leftrightarrow v=\varnothing$.

(7) $v\dot{=}\overline{ran}(x)\Leftrightarrow v=\mathrm{Ran}(x)$.

(8) $\overline{Rel}(x)\Leftrightarrow x$ 是关系.

(9) $\overline{Fun}(x)\Leftrightarrow x$ 是函数.

(10) $\overline{one\text{-}one\ Fun}(x)\Leftrightarrow x$ 是单射.

(11) $v\dot{=}(x\ \overline{of}\ y)$

$\Leftrightarrow$ 若 x 是函数且 $y\in\mathrm{Dom}(x)$，则 $v=x(y)$；否则 $v=\varnothing$.

(12) $x\ \overline{\subseteq}\ y\Leftrightarrow x\subseteq y$.

(13) $\overline{ord}(x)\Leftrightarrow x$ 是序数.

(14) $\overline{seq}(x)\Leftrightarrow x$ 是序列.

(15) 对 $1\leqslant n<\omega$，个体常元 $\overline{n}$ 递归定义如下：

$$x\dot{=}\overline{n}\leftrightarrow x\dot{=}\overline{set}_n(\overline{0},\cdots,\overline{n-1}).$$

(16) 对 $0<n<\omega$，n 元函数 $\overline{seq_n}$ 递归定义如下：

$$v \doteq \overline{seq_n}(x_0,\cdots,x_{n-1})$$

$$\leftrightarrow[v \doteq \overline{set_n}(\overline{Pr}(\overline{0},x_0),\cdots,\overline{Pr}(\overline{n-1},x_{n-1}))].$$

注意：$\overline{ord}(\overline{n})$ 和 $\overline{dom}(\overline{seq}(x_0,\cdots,x_{n-1}))\doteq\overline{n}$ 在 $\mathfrak{H}_\kappa$ 中成立.

(17) $v\doteq\overline{\bigcup}(x) \Leftrightarrow v=\bigcup x.$

注意：κ 的正则性保证并运算的可定义性.

(18) $v\doteq x\overline{\bigcup}y\leftrightarrow v\doteq\overline{\bigcup}(\overline{set_2}(x,y)).$

(19) $v\doteq\overline{\bigcap}(x) \Leftrightarrow$ 若 $x\neq\varnothing$，$v=\bigcap x$；否则，$v=\varnothing$.

(20) $v\doteq x\overline{\bigcap}y\leftrightarrow v\doteq\overline{\bigcap}(\overline{set_2}(x,y)).$

注意：公式 $\overline{ord}(x)\to[x\doteq\overline{\bigcup}x\vee x\doteq\overline{\bigcup}x\overline{\bigcup}\overline{set_1}(\overline{\bigcup}x)]$ 在 $\mathfrak{H}_\kappa$ 中成立. 这里我们用“[”和“]”来代替“(”和“)”是为了直观，下同.

(21) $v\doteq\overline{s}(x) \Leftrightarrow v\doteq x\overline{\bigcup}\overline{set_1}(x).$

不难得到序数的后继运算的递归定义：

$$\delta+0=\delta,$$

$$\delta+s(\varepsilon)=s(\delta+\varepsilon),$$

$$\delta+\varepsilon=\bigcup\{\delta+\xi;\xi<\varepsilon\}, \quad \text{若 } \varepsilon \text{ 是极限序数.}$$

因此 $v=\delta+\varepsilon \Leftrightarrow$ 存在序列 z 使 $\varepsilon\in\mathrm{Dom}(z)$，$z(\varepsilon)=v$，$z(0)=\delta$ 且

① 对所有 ξ 使 $s(\xi)\in\mathrm{Dom}(z)$，$z(s(\xi))=s(z(\xi))$，

② 对所有 $\xi\neq0$ 使 $\xi=\bigcup\xi\in\mathrm{Dom}(z)$，$z(\xi)=\bigcup\mathrm{Ran}(z\restriction\xi)$.

显然，这个条件可用 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$ 的一公式来定义.

(22) $v\doteq x\overline{+}y \Leftrightarrow$ 若 x,y 都是序数，则 $v=x+y$；否则 $v=\varnothing$.

$\overline{+}$ 的形式定义是：

$$v\doteq x\overline{+}y\leftrightarrow[[\neg(\overline{ord}(x)\wedge\overline{ord}(y))\to v\doteq\overline{0}]\wedge[(\overline{ord}(x)\wedge\overline{ord}(y)) \to(\exists z[\overline{seq}(z)\wedge y\dot{\in}\overline{dom}(z)\wedge(z\ \overline{of}\ y)\doteq v\wedge(z\ \overline{of}\ \overline{0})\doteq x\wedge\varphi_1(z)\wedge\varphi_2(z)])]],$$

其中 $\varphi_1(z)$ 和 $\varphi_2(z)$ 表述了前面的条件①和②. 用同样的方式我们能证明，序数的乘法和无穷序数的加法可以用 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$ 的一公式来表

述．在此省略它们的形式定义．

(23) $v \dot{=} x \overline{\cdot} y \leftrightarrow$ 若 x, y 都是序数，则 $v = x \cdot y$；否则，$v = \varnothing$.

(24) $v \dot{=} \overline{\sum} x$

$\leftrightarrow$ 若 x 是诸序数的一序列，则 $v = \sum x$；否则，$v = \varnothing$.

注意：κ 的正则性保证无穷序数加法的可定义性．

(25) $v \dot{=} x \,\overline{\frown}\, y \leftrightarrow [(\neg\psi(x, y) \to v \dot{=} \overline{0}) \wedge [\psi(x, y) \to \overline{seq}(v) \wedge (\overline{dom}(v) \dot{=} \overline{dom}(x) \overline{+} \overline{dom}(y)) \wedge \forall z[(z \dot{\in} \overline{dom}(x) \to (v \ \overline{of} \ z) \dot{=} (x \ \overline{of} \ z)) \wedge (z \dot{\in} \overline{dom}(y) \to (v \ \overline{of} \ (\overline{dom}(x) \overline{+} z)) \dot{=} (y \ \overline{of} \ z))]]]$,

其中 $\psi(x, y) = \overline{seq}(x) \wedge \overline{seq}(y)$.

若 x 是诸序列的序列，则

$v = {}^{\frown}x \Leftrightarrow$ 存在序列 z 使得 $\mathrm{Dom}(x) \in \mathrm{Dom}(z)$，$v = z(\mathrm{Dom}(x))$，$z(0) = \varnothing$ 且

① 对所有 y 使得 $s(y) \in \mathrm{Dom}(z)$，$z(s(y)) = z(y) \frown x(y)$.

② 对所有 y 使得 $y = \bigcup y \in \mathrm{Dom}(z)$，$z(y) = \bigcup \mathrm{Ran}(z \restriction y)$.

条件①和②可以直接翻译成 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$ 的公式．

(26) $v \dot{=} \overline{\frown} x \Leftrightarrow$ 若 x 是诸序列的序列，则 $v = {}^{\frown}x$；否则，$v = \varnothing$.

三、演绎系统 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}(\Delta; \Omega)$ 的可定义性

本小节我们把 $\mathscr{M}\mathscr{L}^{\kappa}$ 看作是无穷语言 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的元语言，g 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的符号的 Gödel-函数．我们称 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的一个项的集合 Term 或公式的集合 Φ 是**可定义集合** $\Leftrightarrow$ Term 或 Φ 中诸元素的 Gödel-序列的集合相对模型 $\mathfrak{M}(\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}, g)$ 可以用 $\mathscr{M}\mathscr{L}^{\kappa}$ 的一公式来定义．

我们称一项是**原子项** $\Leftrightarrow$ 它是个体变元或个体常元．因此下列公式定义了原子项集：

6.1.3 定义

$$\overline{At\ Term}(x)\leftrightarrow\exists y[(IC(y)\vee IV(y))\wedge x\doteq\overline{seq_1}(y)].$$

这里我们把变元 v 和常元 c 都看作是单元序列 $\langle v\rangle$ 和 $\langle c\rangle$.

6.1.4 定理 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的项集是可定义的.

证明:称 t 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的项 $\Leftrightarrow$ 存在序列 y 使得 $t\in\mathrm{Ran}(y)$且对所有 $z\in\mathrm{Dom}(y)$,$y(z)$是原子项或下列条件成立:

$y(z)=\langle F^\zeta()\,\hat{}\,\langle\,\hat{}\,x_1\rangle\,\hat{}\,\langle\rangle\rangle$,其中 F^ζ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的 ζ 元函数符号,$0<\zeta<\rho$, x_1 是长度为 ζ 的序列使得其值域包含在 $\mathrm{Ran}(y\restriction z)$中.

(6.1)

条件(6.1)可以用下列公式来表述:

$$\psi(y,z)=\exists x_1x_2[\overline{seq}(x_1)\wedge\overline{ran}(x_1)\overline{\subseteq}\overline{ran}(y\overline{\restriction}z)\wedge FU(\overline{dom}(x_1),x_2)$$
$$\wedge(y\ \overline{of}\ z)\doteq[\overline{seq_2}(\overline{lb},x_2)\,\hat{}\,(\,\hat{}\,x_1)\,\hat{}\,\overline{seq_1}(\overline{rb})]].$$

注意:若 $\rho=\kappa$,则因为没有长度为 κ 的序列能在 $\mathbf{H}(\kappa)$中,所以序列 x_1 的长度就自动地小于 ρ.

这样,$\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的项集定义如下:

$$\varphi(x)=\exists y[\overline{seq}(y)\wedge x\,\dot{\in}\,\overline{ran}(y)\wedge\forall z[z\,\dot{\in}\,\overline{dom}(y)$$
$$\rightarrow(\overline{At\ Term}(y\ \overline{of}\ z)\vee\psi(y,z))]].\ \square$$

因为 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的项集是可定义的,所以我们可以定义一新谓词符号$\overline{Term}$.

6.1.5 定义 $\overline{Term}(x)\Leftrightarrow x$ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的一项的 Gödel-序列.

说明:用类似上述方法可以证明 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的原子公式类和公式类是可定义的. 我们把这个工作留给读者去做. 下面只是非形式地引入它们的谓词符号.

6.1.6 定义

(1) $\overline{At\ Form}(x)\Leftrightarrow x$ 是一原子公式的 Gödel-序列.

(2) $\overline{Form}(x)\Leftrightarrow x$ 是一公式的 Gödel-序列.

6.1.7 定理 基本系统 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的命题公理 1—3 是可定义的.

证明:作为举例,在此我们只考虑 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的公理 3:

$$\psi_{\delta,\tau}=((\bigwedge_{\xi<\delta}\varphi_\xi)\rightarrow\varphi_\tau),$$

其中 $0<\delta<\kappa,\tau<\delta$. 因此

φ 形如 $\psi_{\delta,\tau}\Leftrightarrow$ 存在公式的非空序列 y 和公式 z 使得

$$\varphi=\langle((\bigwedge)\frown(\frown y)\frown()\rightarrow)\frown z\frown()\rangle,$$

其中存在 $x_1\in\mathrm{Dom}(y),y(x_1)=z$. 将此翻译为 $\mathscr{ML}^*$ 中的公式:

$$\begin{aligned}\overline{\psi_{\delta,\tau}}(x)\leftrightarrow\exists yz[&\overline{seq}(y)\wedge\neg(y\dot{=}\overline{0})\wedge\overline{Form}(z)\wedge[\forall x_1(x_1\dot{\in}\overline{dom}(y)\\&\rightarrow\overline{Form}(y\,\overline{of}\,x_1))]\wedge[\exists x_2[x_2\dot{\in}\overline{dom}(y)\wedge\overline{Form}(y\\&\overline{of}\,x_2)\wedge((y\,\overline{of}\,x_2)\dot{=}z)]\rightarrow x\dot{=}\overline{seq}_3(\overline{lb},\overline{lb},\overline{c})\overline{\frown}(\overline{\frown}y)\\&\overline{\frown}\,\overline{seq}_2(\overline{rb},\overline{i})\overline{\frown}z\overline{\frown}\,\overline{seq}(\overline{rb})]].\end{aligned}$$

因此对 $0<\delta<\kappa,\tau<\delta,\psi_{\delta,\tau}$ 是可定义的. 用同样方式,我们可以定义其它命题公理. □

6.1.8 定理 (1) 对任意基数 $0<\gamma<\kappa$,用 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 表述的 Chang-分配律 CD_γ 是可定义的.

(2) 若对 $0<\delta<\kappa,\langle\varphi_{\alpha\beta}:\alpha,\beta<\delta\rangle$ 的每一选择集包含一公式和它的否定,则 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 的所有形如 $\bigvee_{\alpha<\delta}(\bigwedge_{\beta<\delta}\varphi_{\alpha\beta})$ 的公理集是可定义的,因此 $\mathrm{CD}_{<\kappa}$ 是可定义的.

证明:(1) 令 γ 是基数使得 $0<\gamma<\kappa$,则 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$ 表述的 CD_γ 是所有具有下列形式的公式:

$$(\bigvee_{\alpha<\gamma}(\bigwedge_{\beta<\gamma}\varphi_{\alpha\beta}))=(\neg(\bigwedge\cdots(\neg(\bigwedge\cdots\varphi_{\alpha\beta}\cdots))\cdots)),$$

其中 $\langle\varphi_{\alpha\beta}:\alpha,\beta<\gamma\rangle$ 的每一选择集包含一公式和它的否定.

一公式具有上述形式 $\Leftrightarrow$ 存在长度为 γ 的序列 y 使得对每一 $z\in\gamma$, $y(z)$ 是长度为 γ 的公式序列,且

① 若对每一 $z\in\gamma$,存在 $x_1\in\gamma$ 使得 $y(z)(x_1)\in x_2$,则 x_2 包含一公式和它的否定;

② $\varphi=\langle(\neg(\bigwedge)\frown(\frown x_1)\frown())\rangle$,

其中 $\mathrm{Dom}(x_1)=\mathrm{Dom}(y)=\gamma$ 且对每一 $z\in\gamma$,

$$x_1(z)=\langle(\neg(\bigwedge)\frown(\frown y(z))\frown())\rangle.$$

显然,上述条件很容易用 $\mathscr{ML}^*$ 的公式来表述.

(2)的证明也类似．首先断定存在诸公式的非空序列 y，然后用 $\mathrm{Dom}(y)$ 置换 γ．□

6.1.9 定理 对每一基数 $\gamma\neq 0$ 使得 $2^{\gamma}<\kappa$，则下列形式的所有公式的集合是可定义的：

$$(\bigwedge_{\alpha<\gamma}(\bigvee_{\beta<\gamma}\varphi_{\alpha\beta}))\rightarrow(\bigvee_{\xi<2^{\gamma}}(\bigwedge_{\alpha<\gamma}\varphi_{\alpha,g_{\xi}(\alpha)})),$$

其中 $\gamma^{\gamma}=\{g_{\xi}:\xi<2^{\gamma}\}$．

证明：消去缩写符号，上述公式有下列形式：

$$((\bigwedge\cdots(\neg(\bigwedge\cdots(\neg\varphi_{\alpha\beta})\cdots))\cdots)$$
$$\rightarrow(\neg(\bigwedge\cdots(\neg(\bigwedge\cdots\varphi_{\alpha,g_{\xi}(\alpha)}\cdots))\cdots))).$$

因此

φ 有上述形式 $\Leftrightarrow$ 存在长度为 γ 的序列 y 使得对每一 $z\in\gamma$，$y(z)$ 是诸公式的、长度为 γ 的序列，且存在从 γ 到 γ 中的诸函数的单射序列使得

(1) 每一从 γ 到 γ 中的函数在 $\mathrm{Ran}(x_1)$ 中．

(2) 令 x_2 是长度为 γ 的序列使得对 $y\in\gamma$，

$$x_2(y)=\langle(\neg(\bigwedge)\hat{}\langle\hat{}x_3\rangle\hat{}\langle\rangle)\rangle,$$

其中 x_3 是长度为 γ 的序列使得

$$x_3(x_4)=\langle(\neg)\hat{}y(z)(x_4)\hat{}\langle\rangle\rangle,\quad x_4\in\gamma.$$

令 x_5 是长度为 $\mathrm{Dom}(x_1)$ 的序列使得对 $x_6\in\mathrm{Dom}(x_1)$，

$$x_5(x_6)=\langle(\neg(\bigwedge)\hat{}\langle\hat{}x_7\rangle\hat{}\langle\rangle)\rangle,$$

其中 x_7 是长度为 γ 的序列使得对 $z\in\gamma$，

$$x_7(z)=(y(z))(x_1(x_6)(z)).$$

因此

$$\varphi=\langle(((\bigwedge)\hat{}\langle\hat{}x_2\rangle\hat{}\langle\rangle\rightarrow(\neg(\bigwedge)\hat{}\langle\hat{}x_5\rangle\hat{}\langle\rangle)))\rangle.$$

而这个条件能用 $\mathscr{ML}^{\kappa}$ 来表述．□

6.1.10 引理 令三元谓词 $\overline{Bound}$ 定义如下：

$\overline{Bound}(x,y,z)\leftrightarrow$

$$\exists x_1x_2x_3x_4[x\doteq x_1{}^\frown\overline{seq_2}(\overline{lb},\overline{q}){}^\frown x_2{}^\frown x_3{}^\frown\overline{seq_1}(\overline{rb}){}^\frown x_4]\wedge\overline{seq}(x_2)\wedge\neg(x_2\doteq\overline{0})\wedge\overline{dom}(x_2)\dot{\in}\overline{\lambda}\wedge\forall x_5[x_5\dot{\in}\overline{dom}(x_2)\rightarrow IV(x_2\ \overline{of}\ x_5)]\wedge\neg(y\,\overline{\cap}\,\overline{ran}(x_2)\doteq\overline{0})\wedge\overline{Form}(x_3)\wedge\overline{seq}(x_1)\wedge\overline{seq}(x_4)\wedge[z\doteq\overline{dom}(x_1)\vee[\overline{dom}(x_1)\dot{\in}z\wedge z\dot{\in}\overline{dom}(x_1)\overline{+}\overline{2}\,\overline{+}\,\overline{dom}(x_2)\overline{+}\overline{dom}(x_3)]].$$

若 x 是公式 φ 的 Gödel-序列，y 是个体变元集 X 的 Gödel-数集且 $z\in\mathrm{Dom}(\varphi)$，则

$\langle x,y,z\rangle$ 满足 $\overline{Bound}(x,y,z)\Leftrightarrow z$ 在 φ 中被 X 约束.

若 $\lambda=\kappa$，则删去条件“$(\overline{dom}(x_2)\dot{\in}\overline{\lambda})$”.

证明：该形式定义就是用 $\mathscr{ML}^*$ 来表述变元的约束条件. □

6.1.11 引理 令二元函数符号 $\overline{Free}$ 定义如下：

$$z\doteq\overline{Free}(x,y)\leftrightarrow[(\neg\psi(x,y)\rightarrow z\doteq\overline{0})\wedge[\psi(x,y)\rightarrow\forall x_1[x_1\dot{\in}z\leftrightarrow x_1\dot{\in}\overline{dom}(x)\wedge(x\ \overline{of}\ x_1)\dot{\in}y\wedge\neg\overline{Bound}(x,\overline{set_1}(x\ \overline{of}\ x_1),x_1)]]],$$

其中 $\psi(x,y)=\overline{Form}(x)\wedge\forall x_1[x_1\dot{\in}y\rightarrow IV(x_1)]$.

若 x 是一公式的 Gödel-序列，y 是诸个体变元的 Gödel-数集，则

$\langle x,y,z\rangle$ 满足 $z\doteq\overline{Free}(x,y)\Leftrightarrow$

$z=\{\tau:\tau$ 是 Gödel-序列为 x 的公式中一个体变元(其 Gödel-数在 y 中)的一自由出现$\}$. □

6.1.12 定义

$$y\doteq\overline{FV}(x)\leftrightarrow[[\neg\overline{Form}(x)\rightarrow y\doteq\overline{0}]\wedge[\overline{Form}(x)\rightarrow\forall z(z\dot{\in}y\leftrightarrow\neg(\overline{Free}(x,\overline{set_1}(z))\doteq\overline{0}))]].$$

注意：若 x 是公式 φ 的 Gödel-序列，则

$\langle x,y\rangle$ 满足 $y\doteq\overline{FV}(x)\Leftrightarrow y$ 是 $\overline{FV}(\varphi)$ 的 Gödel-数集.

下面我们来证明所有的量词公理是可定义的. 我们知道 $\mathrm{SF}_f^X(\varphi)$ 可以表述为

$$^\frown\langle E_\zeta{}^\frown f(\varphi(\tau_\zeta)):\zeta<\delta\rangle{}^\frown E_\delta,$$

其中 $\langle\tau_\zeta:\zeta<\delta\rangle$ 是 φ 中自由变元集 X 的元素的所有自由出现的严格递增序列，φ 看作是符号序列，并且

$$E_{s(\zeta)}=\varphi\upharpoonright\tau_{s(\zeta)}-(\varphi\upharpoonright\tau_\zeta{}^\frown\langle\varphi(\tau_\zeta)\rangle),\quad s(\zeta)\leqslant\delta,$$

$$E_\zeta=\varphi\upharpoonright\tau_\zeta-\varphi\upharpoonright\bigcup_{\eta<\zeta}\tau_\eta,\quad \zeta=\bigcup\zeta\text{ 且 }\zeta\leqslant\delta.$$

6.1.13 定义

$$z\doteq x\dot{-}y\leftrightarrow[(\neg\psi(x,y)\rightarrow z\doteq\overline{0})\wedge(\psi(x,y)\rightarrow x\doteq y\bar{^\frown}z)],$$

其中 $\psi(x,y)=\overline{seq}(y)\wedge\exists x_1(\overline{seq}(x_1)\wedge x\doteq y\bar{^\frown}x_1)$.

6.1.14 引理 假设 x 是序列，x_2 是 $\mathrm{Dom}(x)$ 中序数的严格递增序列. 令 $\mathrm{Rem\ Seq}(x,x_2)$ 是长度为 $\mathrm{Dom}(x_2)+1$ 的序列 x_3 使得若 $s(\zeta)\in\mathrm{Dom}(x_2)+1$，则

$$x_3(s(\zeta))=x\upharpoonright x_2(s(\zeta))-(x\upharpoonright x_2(\zeta){}^\frown\langle x(x_2(\zeta))\rangle);$$

若 $\zeta=\bigcup\zeta\in\mathrm{Dom}(x_2)+1$，则

$$x_3(\zeta)=x\upharpoonright x_2(\zeta)-x\upharpoonright\bigcup\mathrm{Ran}(x_2\upharpoonright\zeta).$$

否则，$\mathrm{Rem\ Seq}(x,x_2)=\varnothing$. 证明 Rem Seq 是可定义的.

证明：从本定理已给出的非形式定义来看，所涉及的函数都是可定义的，所以 Rem Seq 的可定义性显然. □

6.1.15 定义 $x_3\doteq\overline{Rem\ Seq}(x,x_2)\Leftrightarrow x_3=\mathrm{Rem\ Seq}(x,x_2)$.

6.1.16 引理 若 x 是公式 φ 的 Gödel-序列，y 是个体变元集的 Gödel-数集，z 是从 y 到 Term 的 Gödel-序列的函数，则令 $\mathrm{SF}(x,y,z)$ 是 $\mathrm{SF}_f^X(\varphi)$ 的 Gödel-序列，其中 $X=\{v:g(v)\in y\}$ 且 $f=g^{-1}\circ z\circ g$ 是 X 上的函数；否则，令 $\mathrm{SF}(x,y,z)=\varnothing$. 证明 SF 是可定义的.

证明：因为

$$g\circ\mathrm{SF}_f^X(\varphi)={}^\frown\langle x_3(\zeta){}^\frown z(x(x_2(\zeta))):\zeta<\delta\rangle{}^\frown x_3(\delta),$$

其中 x_2 是值域为 $Free(x,y)$ 的递增序列，$\delta=\mathrm{Dom}(x_2)$，$x_3=$

Rem Seq(x,x_2)，所以其可定义性显然，因此 SF 也是可定义的. □

6.1.17 定 义 $x_1 \doteq \overline{SF}(x,y,z) \Leftrightarrow x_1 = \mathrm{SF}(x,y,z)$.

6.1.18 定理 令 $\omega \leqslant \gamma < \kappa$，则 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}$中的公理 4 以及 BH_γ，DBH_γ，$\mathrm{BH}_{<\kappa}$和 $\mathrm{DBH}_{<\kappa}$是可定义的.

证明：我们在此只考虑公理 4，DBH_γ 和 $\mathrm{DBH}_{<\kappa}$，其它的情况也类似能得到证明.

公理 4 可以写作下列形式：

$$\varphi = \forall X\psi \to \mathrm{SF}_f^X(\psi),$$

其中 ψ 中没有一变元 $v \in X$ 的自由出现在约束 $f(v)$中某个变元的量词的辖域中. 若 t 是一项，则

$$v \in \mathrm{Fv}(t) \Leftrightarrow v \text{ 是个体变元且在 } t \text{ 中出现},$$

所以 $\mathrm{Fv}(t)$的 Gödel-数集可以定义如下：

$$y \doteq \overline{FVt}(x) \leftrightarrow [(\neg \overline{Term}(x) \to y \doteq \bar{0}) \wedge [\overline{Term}(x) \to \forall z[z \dot{\in} y \leftrightarrow \overline{IV}(z) \wedge \exists x_1(x_1 \dot{\in} \overline{dom}(x) \wedge (x\ \overline{of}\ x_1) \doteq z)]]].$$

因此对公理 4 的 Gödel-数集的定义公式就是

$$\overline{\text{公理 }4}(x) \leftrightarrow \exists yzx_1[x \doteq \overline{seq}_3(\overline{lb},\ \overline{lb},\ \bar{q}) \frown y \frown z \frown \overline{seq}_2(\overline{rb},\bar{i}) \frown \overline{SF}(z, \overline{ran}(y), x_1) \frown \overline{seq}_1(\overline{rb}) \wedge \overline{seq}(y) \wedge \neg(y \doteq \bar{0}) \wedge \overline{dom}(y) \dot{\in} \bar{\lambda} \wedge \forall x_2[x_2 \dot{\in} \overline{dom}(y) \to \overline{IV}(y\ \overline{of}\ x_2)] \wedge \overline{Form}(z) \wedge \overline{Fun}(x_1) \wedge \overline{ran}(y) \subseteq \overline{dom}(x_1) \wedge \forall x_2[x_2 \dot{\in} \overline{dom}(x_1) \to \overline{Term}(x_1\ \overline{of}\ x_2)] \wedge \forall x_3[x_3 \dot{\in} \overline{Free}(z, \overline{ran}(y)) \to \neg \overline{Bound}(z, \overline{FVt}(x_1\ \overline{of}(z\ \overline{of}\ x_3)), x_3)]].$$

当 $\lambda = \kappa$ 时，可以删去“$\overline{dom}(y) \dot{\in} \bar{\lambda}$”.

我们知道 DBH_γ 有下列形式

$$\varphi = (\bigwedge_{\xi<\gamma}\{(\exists X_0\varphi_0)\cdots(\forall\{X_\zeta:\zeta<\xi\}(\exists X_\xi\varphi_\xi))\cdots\}) \to (\exists\{X_\zeta:\zeta<\xi\}(\bigwedge_{\xi<\gamma}\{\varphi_0\cdots\varphi_\xi\cdots\})),$$

其中对 $\xi \neq \zeta$，$X_\xi \cap X_\zeta = \varnothing$且对 $\zeta < \xi$，$X_\xi \cap \mathrm{Fv}(\varphi_\zeta) = \varnothing$. 去掉缩写符

号(这里把∃看作是缩写符号)，增加括号，有

$$\varphi=((\bigwedge(\neg(\forall X_0(\neg\varphi_0)))\cdots(\forall X_0\cdots X_\xi\cdots(\neg(\forall X_\xi(\neg\varphi_\xi))))\cdots)$$

$$\to(\neg(\forall X_0\cdots X_\xi\cdots(\neg(\bigwedge\varphi_0\cdots\varphi_\xi\cdots))))).$$

因此

一公式形如 DBH_γ ⇔ 存在长度为 γ 的公式序列 y 和长度为 γ 的、诸变元序列的序列 z，其中每一序列 $z(\xi)$ 的长度小于 λ 使得对 $\xi\neq\zeta$, $\mathrm{Ran}(z(\xi))\cap\mathrm{Ran}(z(\zeta))=\varnothing$；对 $\zeta<\xi$, $\mathrm{Ran}(z(\xi))\cap\mathrm{Fv}(y(\zeta))=\varnothing$，且

$$\varphi=\langle((\bigwedge\rangle^\frown\langle{}^\frown x_1\rangle^\frown\langle)$$

$$\to(\neg(\forall\rangle^\frown\langle{}^\frown z\rangle^\frown((\neg(\bigwedge\rangle^\frown\langle{}^\frown y\rangle^\frown\langle))))))\rangle,$$

其中 x_1 是长度为 γ 的序列使得

$$x_1(0)=\langle(\neg(\forall\rangle^\frown z(0)^\frown\langle(\neg\rangle^\frown y(0)^\frown\langle))))\rangle,$$

且对 $\xi>0$,

$$x_1(\xi)=\langle(\forall\rangle^\frown\langle{}^\frown z\restriction\xi\rangle^\frown\langle(\neg(\forall\rangle^\frown z(\xi)^\frown\langle(\neg\rangle^\frown y(\xi)^\frown\langle)))))\rangle.$$

而这些易用 $\mathscr{ML}^*$来表述.

若 $\lambda=\kappa$，则关于 $z(\xi)$的长度的条件可以删去.

$\mathrm{DBH}_{<\kappa}$的情况也类似. 先断定诸公式的非空序列 y 存在，然后用 $\mathrm{Dom}(y)$置换 γ. □

6.1.19 定理 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的等词公理是可定义的.

证明：为了简单我们在此只举公理 6 的下列特例作为说明：

$$((\bigwedge(t_0\equiv t_0')\cdots(t_\xi\equiv t_\xi')\cdots)$$

$$\to((Q(t_0,\cdots,t_\xi,\cdots))\to(Q(t_0',\cdots,t_\xi',\cdots)))),$$

其中 Q 是 η 元谓词符号，$0<\eta<\pi$，$\langle t_0,\cdots,t_\xi,\cdots\rangle$和$\langle t_0',\cdots,t_\xi',\cdots\rangle$是两个长度为 η 的项的序列.

首先假设 $\pi<\kappa$，则

公式 φ 有上述形式 ⇔ 存在两个非空的、项的序列 y,z 使得 $\mathrm{Dom}(y)=\mathrm{Dom}(z)\in\pi$ 且

$\varphi=$

$\langle((\wedge)^\frown\langle^\frown x_1\rangle^\frown\langle\rangle\to((Q\langle\rangle^\frown\langle^\frown y\rangle^\frown\langle\rangle)\to(Q\langle\rangle^\frown\langle^\frown z\rangle^\frown\langle\rangle))))\rangle$,

其中 Q 是 $\mathrm{Dom}(y)$元谓词符号,x_1 是长度为 $\mathrm{Dom}(y)$的序列使得对所有 $x_2\in\mathrm{Dom}(y)$,

$$x_1(x_2)=\langle\langle\rangle^\frown y(x_2)^\frown\langle\doteq\rangle^\frown x_1(x_2)^\frown\langle\rangle\rangle.$$

易见上述表达式能翻译为 $\mathscr{ML}^*$的公式.

当 $\pi=\kappa$ 时,关于 π 的限制条件可以删去. □

6.1.20 定理 对 $\omega\leqslant\gamma<\kappa$,令 Ω 是 IC_γ 或 DC_γ;对 $\omega\leqslant\gamma\leqslant\kappa$,令 Ω 是 $\mathrm{IC}_{<\gamma}$或 $\mathrm{DC}_{<\gamma}$,则

存在公式 Iefer $\Omega(x,y)$使得$\langle x,y\rangle$满足 Iefer $\Omega(x,y)\Leftrightarrow x,y$ 是公式 φ,ψ 的 Gödel-序列使得 ψ 据 Ω 或 Ω 中一规则从 φ 推出.

证明:考虑 Ω 是 DC_γ,则

ψ 据 Ω 从 φ 推出 $\Leftrightarrow$ φ 形如 $\theta\to\bigvee_{\xi<\gamma}\varphi_\xi$, ψ 形如

$$(\theta\to\bigvee_{\xi<\gamma}\{(\forall X_0\varphi_0)\cdots(\exists Y_\xi(\forall X_\xi\varphi_\xi))\cdots\}),$$

其中对 $\xi\neq\zeta,X_\xi\cap X_\zeta=\varnothing$;对 $\zeta<\xi$,

$$X_\xi\cap\mathrm{Fv}(\varphi_\zeta)=\varnothing;\quad \mathrm{Fv}(\varphi_\xi)\cap\bigcup_{\zeta<\xi}X_\zeta\subseteq Y_\xi;$$

且每一 $x\in X_0\cup\bigcup_{1\leqslant\xi<\gamma}X_\xi$ 不在 θ 中自由出现.

删去缩写符号且增加括号,有

$\varphi=(\neg(\theta(\wedge(\neg(\neg(\wedge(\neg\varphi_0)\cdots(\neg\varphi_\xi)\cdots)))))),$

$\psi=(\neg(\theta(\wedge(\neg(\neg(\wedge(\neg(\forall X_0\varphi_0))\cdots(\neg(\neg($

$\qquad\forall Y_\xi(\neg(\forall X_\xi\varphi_\xi)))))\cdots)))))).$

因此,

ψ 据 Ω 从 φ 推出 $\Leftrightarrow$ 存在公式序列 z_1,存在长度为 γ 的诸公式序列 z,长度为 γ 的个体变元序列的序列 x_1,x_2,其中每一序列 $x_1(\xi),x_2(\xi)$的长度$<\lambda$ 使对 $\xi\neq\zeta$,$\mathrm{Ran}(x_1(\xi))\cap\mathrm{Ran}(x_1(\zeta))=\varnothing$;对 $\zeta<\xi$,$\mathrm{Ran}(x_1(\xi))\cap\mathrm{Fv}(z(\zeta))=\varnothing$;$\mathrm{Fv}(z(\xi))\cap\bigcup\mathrm{Ran}(x_1\upharpoonright\xi)\subseteq\mathrm{Ran}(x_2(\xi))$;对每一 $\xi<\gamma$,$\mathrm{Ran}(x_1(\xi))\cap\mathrm{Fv}(z_1)=\varnothing$;且

$$\varphi=\langle(\neg()^\frown\langle z_1\rangle^\frown\langle(\wedge(\neg(\neg(\wedge)^\frown\langle{}^\frown x_3\rangle^\frown\langle\rangle)))))\rangle,$$

其中 x_3 是长度为 γ 的序列使得 $x_3(\xi)=\langle(\neg)^\frown z(\xi)^\frown\langle\rangle\rangle$，且

$$\psi=\langle(\neg()^\frown\langle z_1\rangle^\frown\langle(\wedge(\neg(\neg(\wedge)^\frown\langle{}^\frown x_4\rangle^\frown\langle\rangle)))))\rangle,$$

其中 x_4 是长度为 γ 的序列使得

$$x_4(0)=\langle(\neg(\forall)^\frown x_1(0)^\frown z(0)^\frown\langle\rangle)\rangle;$$

且对 $\xi>0$，

$$x_4(\xi)=\langle(\neg(\neg(\forall)^\frown x_2(\xi)^\frown\langle(\neg(\forall)^\frown x_1(\xi)^\frown z(\xi)^\frown\langle\rangle)))\rangle\rangle.$$

易见上述表达式能翻译为 $\mathscr{ML}^*$ 的公式.

当 $\lambda=\kappa$ 时，关于 $z(\xi)$，$x_1(\xi)$ 和 $x_2(\xi)$ 的长度的条件可删去.

另外的情况的证明也类似. 请读者自行证明. □

注意：分配律规则 DR_γ 或 κ_n-DR_γ 的前提有可能 $\geqslant\kappa$，所以它的前提集不必然是 $\mathbf{H}(\kappa)$ 中的元素，所以若不加其它限制，则它们不是可定义的.

6.1.21 定理 令 $\mathbf{B}_{\kappa\lambda\mu\pi}(\Delta;\Omega)$ 是如第 2 章 §1 所定义的任意演绎系统（但不含分配律规则），则

存在 $\mathscr{ML}^*$ 的公式 $PRV(x)$ 使得 x 在 $\mathfrak{M}(\mathscr{L}_{\kappa\lambda\mu\pi},g)$ 中满足 $PRV(x)\Leftrightarrow x$ 是一可证公式的 Gödel-序列.

证明：据定理 6.1.7—6.1.9，6.1.18，6.1.19 和 6.1.20，

存在公式 $AX(x)$ 使得 x 满足 $AX(x)\Leftrightarrow x$ 是上述系统的某一公理的 Gödel-序列，且存在公式 Infer $\Omega(x,y)$ 使得

$\langle x,y\rangle$ 满足 Infer $\Omega(x,y)$

$\Leftrightarrow x,y$ 是公式 φ,ψ 的 Gödel-序列使得 ψ 据 Ω 或 Ω 中一规则从 φ 中推出.

因此下列公式有我们所要证的性质：

$$\begin{aligned}PRV(x)=\exists y[&\overline{seq}(y)\wedge\forall z(z\dot{\in}\overline{ran}(y)\to\overline{Form}(z))\wedge x\dot{\in}\overline{ran}(y)\wedge\\&\forall x_1[x_1\dot{\in}\overline{dom}(y)\to[AX(y\,\overline{of}\,x_1)\vee\exists x_2(x_2\dot{\in}x_1\wedge\\&\text{Infer }\Omega(y\,\overline{of}\,x_2,y\,\overline{of}\,x_1))\vee\varphi(y,x_1)\vee\psi(y,x_1)\vee\\&\theta(y,x_1)]]],\end{aligned}$$

其中

$$\varphi(y,x_1)=\exists x_2x_3[x_2\dot{\in}x_1\wedge x_3\dot{\in}x_1\wedge(y\,\overline{of}\,x_3)\doteq\overline{seq}_1(\overline{lb})\,\overline{\frown}\,(y\,\overline{of}\,x_2)\,\overline{\frown}\,\overline{seq}_1(\bar{i})\,\overline{\frown}\,(y\,\overline{of}\,x_1)\,\overline{\frown}\,\overline{seq}_1(rb)].\qquad\text{(分离规则)}$$

$$\psi(y,x_1)=\exists x_2[\overline{seq}(x_2)\wedge\overline{ran}(x_2)\overline{\subseteq}\,\overline{ran}(y\overline{\upharpoonright}x_1)\wedge(x\,\overline{of}\,x_1)\doteq\overline{seq}_2(\overline{lb},\bar{c})\,\overline{\frown}\,(\overline{\frown}\,x_2)\,\overline{\frown}\,\overline{seq}_1(\overline{rb})].\qquad\text{(合取规则)}$$

$$\theta(y,x_1)=\exists x_2x_3[x_2\dot{\in}x_1\wedge\overline{seq}(x_3)\wedge\overline{dom}(x_3)\dot{\in}\bar{\lambda}\wedge\forall x_4(x_4\dot{\in}\overline{ran}(x_3)\rightarrow IV(x_4))\wedge(y\,\overline{of}\,x_1)\doteq\overline{seq}_2(\overline{lb},\bar{q})\,\overline{\frown}\,x_3\,\overline{\frown}\,(y\,\overline{of}\,x_2)\,\overline{\frown}\,\overline{seq}_1(rb)].\qquad\text{(概括规则)}$$

当 $\lambda=\kappa$ 时,“$\overline{dom}(x_3)\dot{\in}\bar{\lambda}$”可以删去. □

练　习:

6.1.22　用本节采用的方法写出 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\pi}$的原子公式类和公式类的形式定义.

6.1.23　如 6.1.20 证明那样验证 2.1.18 的 IC_γ' 和 DC_γ'.

§2　演绎系统的不完全性

1960 年在 Stanford 大学召开的逻辑、方法论和科学哲学国际会议上,D. Scott 公布了下列证明概要:

用单个二元谓词符号和等词符号构成的语言 $\mathscr{L}_{\gamma^+\gamma^+}$ 不可能定义一完全的演绎系统.

1964 年,Karp 在其[1964]中更加详细地讨论了这个问题. 下面的工作就是 Karp 做出的.

在本节固定 κ 是无穷正则基数,语言 $\mathscr{L}^0=\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$的非逻辑符号是一二元谓词符号 $\dot{\in}$,语言 $\mathscr{L}^*=\mathscr{L}_{\kappa\kappa\omega}$的非逻辑符号集是

$$\{\dot{\in}\}\cup\{\bar{\delta}:\text{对每一 }\delta<\kappa,\bar{\delta}\text{是个体常元}\}\cup\{\overline{Sq}\},$$

其中$\overline{Sq}$是$\delta<\kappa$元函数符号. 为了方便,设$\mathscr{L}^0$和$\mathscr{L}^\kappa$都有个体变元集$\mathrm{Var}=\{x_\xi:\xi<\kappa\}$. $\mathscr{L}^0$和$\mathscr{L}^\kappa$的符号的**Gödel-函数** g 定义如下:

$$
\begin{array}{ll}
g(\dot{=})=0, & g(\dot{\in})=3, \\
g(\overline{Sq})=6, & g(\ (\ )=9, \\
g(\ )\ )=12, & g(\neg)=15, \\
g(\rightarrow)=18, & g(\wedge)=21, \\
g(\forall)=24, & \\
g(\bar{\delta})=\delta\cdot 3+1, & \text{每一 } \delta<\kappa, \\
g(x_\xi)=\xi\cdot 3+2, & \text{对每一 } x_\xi\in \mathrm{Var}.
\end{array}
$$

$\mathscr{L}^0$和$\mathscr{L}^\kappa$都可以用集合论模型来解释. 对$\mathscr{L}^0$,我们预期的集合论模型是$\mathfrak{H}_\kappa=\langle \mathbf{H}(\kappa),\in\rangle$;对$\mathscr{L}^\kappa$,我们预期的集合论模型是$\mathfrak{M}_\kappa=\langle \mathbf{H}(\kappa),Sq,0,\cdots,\delta,\cdots,\in\rangle$,其中$Sq$是$<\kappa$元恒等函数.

注意:$Sq(\langle t_\xi:\zeta<\delta\rangle)=\langle t_\xi:\xi<\delta\rangle$使得

赋值 f 满足 $x_\delta\dot{=}\overline{Sq}(x_\xi:\xi<\delta)$

$$\Leftrightarrow f(x_\delta)=\langle f(x_\xi):\zeta<\delta\rangle.$$

$\mathscr{L}^\kappa$的有穷公式完全可作为$\mathscr{L}^0$和$\mathscr{L}^\kappa$的元语言. 上节的元语言$\mathscr{ML}^\kappa$的个体符号可用下列映射 e 翻译为$\mathscr{L}^\kappa$的个体符号:

$$
\begin{array}{ll}
\mathrm{e}(x_n)=x_n, \quad \text{对 } n<\omega, & \mathrm{e}(\bar{\delta})=\bar{\delta}, \quad \text{对 } \delta<\kappa, \\
\mathrm{e}(\overline{lb})=\bar{9}, & \mathrm{e}(\overline{rb})=\overline{12}, \\
\mathrm{e}(\bar{n})=\overline{51}, & \mathrm{e}(\bar{i})=\overline{81}, \\
\mathrm{e}(\bar{c})=\overline{21}, & \mathrm{e}(\bar{q})=\overline{24}, \\
\mathrm{e}(\overline{eq})=\bar{0}. &
\end{array}
$$

因此,若 x 是$\mathscr{ML}^\kappa$的任意个体符号,$f\in \mathbf{H}(\kappa)^{\mathrm{Var}}$是任意赋值,则在$\mathfrak{M}(\mathscr{L}^0,g)$中的$f(x)$就是$\mathfrak{M}(\mathscr{L}^\kappa,g)$中的$f(x)$,也是$\mathfrak{M}_\kappa$中的$f(\mathrm{e}(x))$. $\mathscr{ML}^\kappa$的原子公式φ可分别翻译为有穷公式$E_0(\varphi)$,$E_\kappa(\varphi)$,其中$E_0(\varphi)$是φ在$\mathfrak{M}(\mathscr{L}^0,g)$中的解释,$E_\kappa(\varphi)$是$\varphi$在$\mathfrak{M}(\mathscr{L}^\kappa,g)$的解释:

φ	$E_\kappa(\varphi)$	$E_0(\varphi)$
$x \dot{=} y$	$e(x) \dot{=} e(y)$	相同
$x \dot{\in} y$	$e(x) \dot{\in} e(y)$	相同
$IV(x)$	$\exists y[\overline{ord}(y) \wedge (e(x) \dot{=} y \overline{\cdot} \overline{3} \overline{+} \overline{2})]$	相同
$IC(x)$	$\exists y[\overline{ord}(y) \wedge (e(x) \dot{=} y \overline{\cdot} \overline{3} \overline{+} \overline{1})]$	$\neg[e(x) \dot{=} e(x)]$
$FU(x,y)$	$\neg[e(x) \dot{=} e(x) \wedge e(y) \dot{=} e(y)]$	相同
$BPR(x)$	$e(x) \dot{=} \overline{0} \vee e(x) \dot{=} \overline{3}$	相同
$PR(x,y)$	$\neg[e(x) \dot{=} e(x) \wedge e(y) \dot{=} e(y)]$	相同

用 6.1.2 就可以消除$\overline{ord}$，$\overline{\cdot}$，$\overline{+}$. 若 $f \in \mathbf{H}(\kappa)^{\mathrm{Var}}$是任意赋值，$\varphi$是$\mathscr{ML}^*$的任意原子公式，则

$$\mathfrak{M}(\mathscr{L}^0, g) \models \varphi[f] \Leftrightarrow \mathfrak{M}_\kappa \models E_0(\varphi)[f],$$

$$\mathfrak{M}(\mathscr{L}^\kappa, g) \models \varphi[f] \Leftrightarrow \mathfrak{M}_\kappa \models E_\kappa(\varphi)[f].$$

用下列递归定义把 E_0, E_κ 扩张到对 $\mathscr{ML}^*$的所有公式适用：对 $i=0,\kappa$，

$$E_i(\neg\varphi) = \neg E_i(\varphi),$$

$$E_i(\varphi_0 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) = E_i(\varphi_0) \wedge \cdots \wedge E_i(\varphi_n),$$

$$E_i(\forall X\varphi) = \forall X E_i(\varphi).$$

这样的递归定义确保函数 E_0, E_κ 存在且唯一.

(**注意**：$\mathrm{Fv}(\varphi) = \mathrm{Fv}(E_0(\varphi)) = \mathrm{Fv}(E_\kappa(\varphi))$.)

施归纳于公式的复杂度易证，对 $\mathscr{ML}^*$的任意公式 φ，

$$\mathfrak{M}(\mathscr{L}^0, g) \models \varphi[f] \Leftrightarrow \mathfrak{M}_\kappa \models E_0(\varphi)[f],$$

$$\mathfrak{M}(\mathscr{L}^\kappa, g) \models \varphi[f] \Leftrightarrow \mathfrak{M}_\kappa \models E_\kappa(\varphi)[f].$$

我们称存在 $\mathscr{L}^0$的一**可定义的完全演绎系统** $\Leftrightarrow$ 存在$\mathscr{ML}^*$的公式 $PRV(x)$使得对所有 $S \in \mathbf{H}(\kappa)$，

S 在$\mathfrak{M}(\mathscr{L}^0, g)$中满足 $PRV(x)$

$\Leftrightarrow$ S 是 $\mathscr{L}^0$的一有效公式的 Gödel-序列.

然而，若存在这样的公式 $PRV(x)$，则 $E_0(PRV(x))$ 是 $\mathscr{L}^{\kappa}$ 的公式且在 $\mathfrak{M}_{\kappa}$ 中恰好被 $\mathscr{L}^0$ 的诸有效公式的诸 Gödel-序列所满足．因此若存在 $\mathscr{L}^0$ 的一可定义的完全演绎系统，则 $\mathscr{L}^0$ 的有效公式集可以在 $\mathfrak{M}_{\kappa}$ 中用 $\mathscr{L}^{\kappa}$ 的一公式来定义．下面我们要证明，对无穷非极限基数 κ，这是不可能的，从而证明这类系统是不完全的．

固定 $\Phi=\{\varphi: \varphi$ 是 $\mathscr{L}^{\kappa}$ 的公式且 $\mathfrak{M}_{\kappa}\vDash\varphi\}$，可以用 Tarski 的真值不可定义性论证（参见 Tarski-Mostowski-Robinson 的[1953]）来证明 Φ 相对 $\mathfrak{M}_{\kappa}$ 不能用 $\mathscr{L}^{\kappa}$ 的一公式来定义．

令 m 是 $\mathbf{H}(\kappa)$ 上的函数使得，若 S 是诸序数的非空序列，则 $m(S)$ 是项 $(\overline{Sq}(\overline{S}(\xi);\xi<\delta))$ 的 Gödel-序列；否则 $m(S)=\varnothing$．

注意：这个 Gödel-序列是

$$\langle 9,6,9,(S(0)\cdot 3)+1,\cdots,(S(\xi)\cdot 3)+1,\cdots,12,12\rangle,$$

用 6.1.2 消去被定义的符号，我们可以看到，相对 $\mathfrak{M}_{\kappa}$，用仅含 $\doteq$，$\dot{\in}$ 的一有穷公式就可以定义 m.

$$\begin{aligned}M(x,z)=(\neg\varphi(x)\rightarrow z\doteq\overline{0})\wedge[\varphi(x)\rightarrow\overline{Seq}(z)\wedge\overline{dom}(z)\doteq\overline{3\ +dom}\\(x)\overline{+2}\wedge(z\ \overline{of}\overline{0})\doteq\overline{9}\wedge(z\ \overline{of}\overline{1})\doteq\overline{6}\wedge(z\ \overline{of}\overline{2})\doteq\overline{9}\wedge(z\ \overline{of}\\(\ \overline{3}\ \overline{+dom}(x)))\doteq\overline{12}\wedge(z\ \overline{of}(\overline{3+dom}(x)\overline{+1}))\doteq\overline{12}\wedge\\\forall x_1[x_1\dot{\in}\overline{dom}(x)\rightarrow(z\ \overline{of}\,\overline{3+}x_1)\doteq(x\ \overline{of}\ x_1)\overline{\cdot 3+1}]],\end{aligned}$$

其中

$$\varphi(x)=\overline{Seq}(x)\wedge\neg(x\doteq\overline{0})\wedge\forall x_1[x_1\dot{\in}\overline{dom}(x)\rightarrow\overline{ord}(x\ \overline{of}\ x_1)].$$

令 SF 是 6.1.16 规定的函数，则它相对 $\mathfrak{M}(\mathscr{L}^{\kappa},g)$ 可用 $\mathscr{ML}^{\kappa}$ 的一公式来定义．运用算子 E_{κ} 于这个定义公式，我们得到 $\mathscr{L}^{\kappa}$ 的一有穷公式，其自由变元为 x_0,x_1,x_2,x_3，它在 $\mathfrak{M}_{\kappa}$ 中恰好为 4 元组 $\langle S_0,S_1,S_2,S_3\rangle$ 所满足，其中 $S_3=\mathrm{SF}(S_0,S_1,S_2)$．称这个公式为 $\mathrm{Subs}(x_0,x_1,x_2,x_3)$．若 S_0 是一公式的 Gödel-序列，S_1 是诸个体变元的 Gödel-数集，S_2 是从 S_1 到 $\mathscr{L}^{\kappa}$ 的诸项的 Gödel-序列的函数，则

$$\langle S_0,S_1,S_2,S_3\rangle\text{ 满足 }\mathrm{Subs}(x_0,x_1,x_2,x_3)\Leftrightarrow S_3=g\circ\mathrm{SF}_f^X,$$

其中 $\varphi=g^{-1}\circ S_0$，$X=\{x:g(x)\in S_1\}$，$f=g^{-1}\circ S_2\circ(g\upharpoonright X)$.

6.2.1 定理 上述 Φ 相对 $\mathfrak{M}_\kappa$ 不能用 $\mathscr{L}^\kappa$ 的一公式来定义.

证明：令

$$N(x,y)=\exists z[M(x,z)\wedge \mathrm{Subs}(x,\overline{set_1}(\overline{2}),\overline{set_1}(\overline{Pr}(\overline{2},z)),y)].$$

$N(x,y)$ 显然是有穷 $\mathscr{L}^\kappa$-公式. 若 S_0 是 $\mathscr{L}^\kappa$-公式 ψ 的 Gödel-序列，

则 $$\mathfrak{M}_\kappa\models N(x,y)[\langle S_0,S_1\rangle]\Leftrightarrow S_1=g\circ \mathrm{SF}_f^{\{x\}}(\psi),$$

其中 $f(x)=\overline{Sq}(\overline{g(\psi(\xi))}:\xi<\delta)$.

设要证结论不成立，即存在 $\mathscr{L}^\kappa$-公式 $\theta(y)$ 相对 $\mathfrak{M}_\kappa$ 定义 Φ. 令

$$\varphi=\forall y(N(x,y)\rightarrow\neg\theta(y)),\quad \varphi_1=\mathrm{SF}_f^{\{x\}}(\varphi),$$

其中 $f(x)=\overline{Sq}(\overline{g(\varphi(\xi))}:\xi<\delta)$. 下证几个断定：

$$\mathfrak{M}_\kappa\models\varphi_1\Leftrightarrow g\circ\varphi \text{ 在 } \mathfrak{M}_\kappa \text{ 满足 } \varphi. \tag{6.2}$$

证明：

$\mathfrak{M}_\kappa\models\varphi_1$

$\Leftrightarrow \mathfrak{M}_\kappa\models \mathrm{SF}_f^{\{x\}}(\forall y(N(x,y)\rightarrow\neg\theta(y)))$

$\Leftrightarrow \mathfrak{M}_\kappa\models \forall y(N(f(x),y)\rightarrow\neg\theta(y))$

$\Leftrightarrow \mathfrak{M}_\kappa\models \forall y(N(\overline{Sq}(\overline{g(\varphi(\xi))}:\xi<\delta),y)\rightarrow\neg\theta(y))$

$\Leftrightarrow \mathfrak{M}_\kappa\models \forall y(N(x,y)\rightarrow\neg\theta(y))[g(\varphi(\xi)):\xi<\delta]$

因为 Sq 是恒等函数

$\Leftrightarrow \mathfrak{M}_\kappa\models \forall y(N(f(x),y)\rightarrow\neg\theta(y))[g\circ\varphi]$

$\Leftrightarrow g\circ\varphi$ 在 $\mathfrak{M}_\kappa$ 中满足 φ.

所以(6.2)成立. 下证：

$$\mathfrak{M}_\kappa\models\varphi_1\Leftrightarrow \mathrm{SF}_f^{\{x\}}(\varphi)\notin\Phi. \tag{6.3}$$

证明：因为

$$\mathfrak{M}_\kappa\models\varphi_1\Leftrightarrow\mathfrak{M}_\kappa\models\forall x_1(N(x,y)\rightarrow\neg\theta(y))[g\circ\varphi],$$

所以对任意 $S_1\in\mathbf{H}(\kappa)$，

$$\langle g\circ\varphi,S_1\rangle \text{满足 } N(x,y)\Rightarrow S_1 \text{ 不满足 } \theta(y).$$

因为 $g\circ\varphi$ 是 φ 的 Gödel-序列，所以 $S_1=g\circ \mathrm{SF}_f^{\{x\}}(\varphi)$，其中 $f(x)=\overline{Sq}(\overline{g(\varphi(\xi))}:\xi<\delta)$，所以 $g\circ \mathrm{SF}_f^{\{x\}}(\varphi)$ 不满足 $\theta(y)$，因此 $\mathrm{SF}_f^{\{x\}}(\varphi)$

$\notin \Phi$. 反之，

$\mathrm{SF}_f^{(x)}(\varphi) \notin \Phi$

$\Rightarrow g\circ \mathrm{SF}_f^{(x)}(\varphi)$在$\mathfrak{M}_\kappa$不满足$\theta(y)$

$\Rightarrow \mathfrak{M}_\kappa \nvDash \theta(y)[g\circ \mathrm{SF}_f^{(x)}(\varphi)]$

$\Rightarrow \mathfrak{M}_\kappa \nvDash N(x,y) \wedge \theta(y)[\langle g\circ\varphi,\ g\circ \mathrm{SF}_f^{(x)}(\varphi)\rangle]$

$\Rightarrow \mathfrak{M}_\kappa \nvDash \exists y(N(x,y) \wedge \theta(y))[g\circ\varphi]$

$\Rightarrow \mathfrak{M}_\kappa \nvDash \neg\forall y(N(x,y) \to \neg\theta_1(y))[g\circ\varphi]$

$\Rightarrow \mathfrak{M}_\kappa \vDash \varphi_1$.

所以(6.3)成立. 下证

$$g\circ\varphi \text{ 在 } \mathfrak{M}_\kappa \text{ 中不满足 } \varphi \Leftrightarrow \mathrm{SF}_f^{(x)}(\varphi) \notin \Phi. \tag{6.4}$$

证明：

$\mathfrak{M}_\kappa \nvDash \forall y(N(x,y) \to \neg\theta(y))[g\circ\varphi]$

$\Leftrightarrow \mathfrak{M}_\kappa \vDash \exists y(N(x,y) \wedge \theta(y))[g\circ\varphi]$

$\Leftrightarrow$ 对某个$S_1 \in \mathbf{H}(\kappa)$，$\mathfrak{M}_\kappa \vDash N(x,y) \wedge \theta(y)[\langle g\circ\varphi, S_1\rangle]$

$\Leftrightarrow \mathrm{SF}_f^{(x)}(\varphi) \notin \Phi$.

最后一等价式成立是因为$\langle g\circ\varphi, S\rangle$在$\mathfrak{M}_\kappa$中满足$N(x,y)$，所以$S_1 = g\circ \mathrm{SF}_f^{(x)}(\varphi)$，其中$f(x) = \overline{Sq}(\overline{g(\psi(\xi))}: \xi<\delta)$，因此(6.4)成立.

据(6.2)—(6.4)，我们有

$$\varphi_1 \text{ 在 } \mathfrak{M}_\kappa \text{ 中成立} \Leftrightarrow \varphi_1 \text{ 不在 } \mathfrak{M}_\kappa \text{ 中成立}.$$

矛盾，所以$\mathscr{L}^\kappa$相对$\mathfrak{M}_\kappa$不存在定义Φ的公式. □

仍令Φ是在$\mathfrak{M}_\kappa$中成立的$\mathscr{L}^\kappa$-公式集，此处还令Γ是在$\mathfrak{H}_\kappa$中成立的$\mathscr{L}^0$-公式集. 我们首先证明：

若Γ相对$\mathfrak{M}_\kappa$可用一$\mathscr{L}^\kappa$-公式来定义，则Φ也是可定义的.

这个证明依赖下列事实：

序数$\delta<\kappa$和$<\kappa$元函数Sq都可用$\mathscr{L}^0$-公式来定义.

因此$\mathscr{L}^\kappa$中其它符号$\bar\delta$和$\overline{Sq}$实际上是多余的，引入它们只是因为不用常项(constant term)表示Gödel-序列就难于写出一Tarski-句. 下令

$$EQ_0(x_0)=\forall x_1[\neg(x_1\dot{\in}x_0)],$$

$$EQ_\delta(x_\delta)=\exists\{x_\zeta:\zeta<\delta\}[\forall x_{\delta+1}(\neg(x_{\delta+1}\dot{\in}x_0)) \wedge \bigwedge_{1\leqslant\zeta<\delta+1}\forall x_{\delta+1}[x_{\delta+1}\dot{\in}x_\zeta\leftrightarrow\bigvee_{\eta<\zeta}(x_{\delta+1}\doteq x_\eta)]], \quad \text{对 } 0<\delta<\kappa.$$

易见

$$S\text{ 在 }\mathfrak{H}_\kappa\text{ 中满足 }EQ_\delta(x_\delta)\Leftrightarrow S=\delta.$$

类似地，对每一$\delta<\kappa,\delta\neq0$，令

$$SEQ_\delta(x_\xi:\xi\leqslant\delta)=\forall x_{\delta+1}[x_{\delta+1}\dot{\in}x_\delta\leftrightarrow[\bigvee_{\xi<\delta}[\forall x_{\delta+2}x_{\delta+3}[\forall x_{\delta+4}(x_{\delta+4}\dot{\in}x_{\delta+2}\leftrightarrow EQ_\xi(x_{\delta+4}))\wedge\forall x_{\delta+4}(x_{\delta+4}\dot{\in}x_{\delta+3}\leftrightarrow EQ_\xi(x_{\delta+4})\vee x_{\delta+4}\doteq x_\xi)\rightarrow\forall x_{\delta+4}(x_{\delta+4}\dot{\in}x_{\delta+1}\leftrightarrow x_{\delta+4}\doteq x_{\delta+2}\vee x_{\delta+4}\doteq x_{\delta+3})]]]],$$

因此

$$\begin{aligned}&\langle S_\xi:\xi\leqslant\delta\rangle\text{ 在 }\mathfrak{H}_\kappa\text{ 中满足 }SEQ_\delta(x_\xi:\xi\leqslant\delta)\\&\quad\Leftrightarrow\text{ 对 }\xi<\delta,S_\delta\text{ 中诸元素是有序对}\langle\xi,S_\xi\rangle\\&\quad\Leftrightarrow S_\delta=\langle S_\xi:\xi<\delta\rangle.\end{aligned}$$

对某个$\delta<\kappa$，令Σ是所有形如$\forall x_\delta[x_\delta\doteq\bar{\delta}\leftrightarrow EQ_\delta(x_\delta)]$或形如

$$\forall\{x_\xi:\xi\leqslant\delta\}[x_\delta\doteq\overline{Sq}(x_\xi:\xi<\delta)\leftrightarrow SEQ_\delta(x_\xi:\xi\leqslant\delta)] \qquad (6.5)$$

的公式集，则Σ是常元$\bar{\delta},\delta<\kappa$，和函数$\overline{Sq}$的定义集，显然$\Sigma$在$\mathfrak{M}_\kappa$中成立.

6 2.2 引理 $\mathscr{L}^\kappa$的公式φ在$\mathfrak{M}_\kappa$中成立$\Leftrightarrow$在$\mathscr{L}^\kappa$表述的基本系统$\mathbf{B}_{\kappa\kappa}$中，$\Gamma\cup\Sigma\vdash\varphi$，其中$\Gamma$和$\Sigma$如上规定.

证明：因为$\mathscr{L}^\kappa$的项是原子项x_ξ和$\bar{\delta}$，或由它们通过$<\kappa$元函数符号$\overline{Sq}$构成的，所以关于项的递归原则保证存在唯一从$\mathscr{L}^\kappa$的项集到$\mathscr{L}^0$的公式集上的函数F使得

$$F(x_\xi)(x_0)=x_0\doteq x_\xi,\quad \xi<\kappa,$$

$$F(\bar{\delta})(x_0)=EQ_\delta(x_0),\quad \delta<\kappa,$$

$F(\overline{Sq}(t_\xi:\xi<\delta))(x_0)=$

$$\forall\{x_{\alpha\xi}:\xi<\delta\}[\bigwedge_{\xi<\delta}F(t_\xi)(x_{\alpha\xi})\to SEQ_\delta(x_{\alpha 0},\cdots,x_{\alpha\xi},\cdots,x_0)],$$

其中$\langle t_\xi:\xi<\delta\rangle$是任意$\delta$元组，$\delta<\kappa$，$\langle x_{\alpha\xi}:\xi<\delta\rangle$是个体变元序列使得该序列的最小指标不在任何$t_\xi$中且与$x_0$不同．令

$$\mathrm{Term}=\{t:t\text{ 是 }\mathscr{L}^\kappa\text{-项且 }\mathbf{B}_{\kappa\kappa};\Sigma\vdash\forall x_0[F(t)(x_0)\leftrightarrow x_0\doteq t]\}.$$

下证$\mathscr{L}^\kappa$的所有项都在Term中．若t只是个体变元，则$F(t)(x_0)=(x_0\doteq t)$，所以这样的变元显然在Term中．若$t=\overline{\delta}$，则$F(t)(x_0)\leftrightarrow(x_0\doteq t)$是$\Sigma$中量化式$\forall x_\delta[x_\delta\doteq\overline{\delta}\leftrightarrow EQ_\delta(x_\delta)]$的代换特例．因为

$$\mathbf{B}_{\kappa\kappa}\vdash\forall X\varphi\to\varphi(f\circ X),\tag{6.6}$$

其中$f\in\mathrm{Term}(\mathscr{L}^\kappa)^X$（**注意**：下面我们在$\vdash$前面省略$\mathbf{B}_{\kappa\kappa}$），所以据概括规则，这样的项在Term中．假设$t=\overline{Sq}(t_\xi:\xi<\delta)$，其中每一$t_\xi\in\mathrm{Term}$．因为这个公式是$\Sigma$中量化式(6.5)的代换特例，所以

$$\Sigma\vdash x_0\doteq t\leftrightarrow SEQ_\delta(t_0,\cdots,t_\xi,\cdots,x_0),\tag{6.7}$$

据$F(\overline{Sq}(t_\xi:\xi<\delta))(x_0)$的代换特例，

$$\vdash F(t)(x_0)\to[\bigwedge_{\xi<\delta}F(t_\xi)(t_\xi)\to SEQ_\delta(t_0,\cdots,t_\xi,\cdots,x_0)],\tag{6.8}$$

据归纳假设，

$$\Sigma\vdash F(t_\xi)(t_\xi)\to t_\xi=t_\xi,\quad\text{对所有 }\xi<\delta.\tag{6.9}$$

因此据等词公理，有$\Sigma\vdash\bigwedge_{\xi<\delta}F(t_\xi)(t_\xi)$．把(6.7)代入(6.8)且用分离规则，有

$$\Sigma\vdash F(t)(x_0)\to t_0=t.\tag{6.10}$$

反之，据等词公理，

$$\vdash x_0\doteq t\to[\bigwedge_{\xi<\delta}x_{\alpha\xi}\doteq t_\xi\to x_0\doteq\overline{Sq}(x_{\alpha\xi}:\xi<\delta)],\tag{6.11}$$

据归纳假设和(6.6)，

$$\Sigma\vdash\bigwedge_{\xi<\delta}F(t_\xi)(x_{\alpha\xi})\leftrightarrow\bigwedge_{\xi<\delta}x_{\alpha\xi}\doteq t_\xi.\tag{6.12}$$

从(6.5)的另一代换特例，有

$$\Sigma\vdash x_0\doteq\overline{Sq}(x_{\alpha 0},\cdots,x_{\alpha\xi},\cdots)\leftrightarrow SEQ_\delta(x_{\alpha 0},\cdots,x_{\alpha\xi},\cdots,x_0),\tag{6.13}$$

用(6.12)和(6.13)代换(6.11)，且对$\{x_{\alpha\xi}:\xi<\delta\}$施概括规则，有

$$\Sigma\vdash x_0\doteq t\to F(t)(x_0). \tag{6.14}$$

据(6.10)和(6.14)，我们有 $t\in$ Term.

假设$\mathscr{L}^\kappa$的公式φ在$\mathfrak{M}_\kappa$中成立. 据κ的正则性，令$\langle\psi_\zeta:\zeta<\eta\rangle$是对$\varphi$的所有由符号$\overline{\delta}$(其中$\delta<\kappa$)和$\overline{Sq}$构成的原子公式的排列，其中$\eta<\kappa$. 则每一$\psi_\zeta$形如$t_0\doteq t_1$或$t_0\dot{\in}t_1$. 在第一种情况下，令

$$\psi_\zeta'=\exists x_0x_1[F(t_0)(x_0)\wedge F(t_1)(x_1)\wedge x_0\doteq x_1];$$

在第二种情况下，令

$$\psi_\zeta'=\exists x_0x_1[F(t_0)(x_0)\wedge F(t_1)(x_1)\wedge x_0\dot{\in}x_1].$$

易证对$i=0,1$，有

$$\Sigma\vdash\forall x_0[F(t_i)(x_0)\leftrightarrow x_0\doteq t_i]\Rightarrow \text{对所有}\ \zeta<\eta,\Sigma\vdash\psi_\zeta\leftrightarrow\psi_\zeta'. \tag{6.15}$$

据(6.15)和置换原则，有$\Sigma\vdash\varphi\leftrightarrow\varphi'$. 其中$\varphi'$是用每一$\psi_\zeta'$置换$\varphi$中$\psi_\zeta$得到的公式. 因为$\varphi'$不包含常元$\overline{\delta}$和函数符号$\overline{Sq}$，所以$\varphi'$是$\mathscr{L}^0$的公式. 又因为从$\Sigma$可证的公式在$\mathfrak{M}_\kappa$中成立，所以$\varphi\leftrightarrow\varphi'$在$\mathfrak{M}_\kappa$中成立，所以$\varphi'$在$\mathfrak{M}_\kappa$中成立. 但对$\mathscr{L}^0$的公式，这如同说该公式在$\mathfrak{H}_\kappa$中成立，所以$\varphi'\in\Gamma$，因此$\Gamma\cup\Sigma\vdash\varphi$. 反之，因为$\Gamma$在$\mathfrak{H}_\kappa$中成立，所以$\Gamma$也在$\mathfrak{M}_\kappa$中成立. 此外，$\Sigma$在$\mathfrak{M}_\kappa$中成立，所以$\varphi$也在$\mathfrak{M}_\kappa$中成立. □

6.2.3 引理 常元$\overline{\delta}$(其中$\delta<\kappa$)和函数$\overline{Sq}$的定义集Σ相对$\mathfrak{M}_\kappa$可以由$\mathscr{L}^\kappa$的一公式来定义.

证明：事实上我们可以证明Σ能用$\mathscr{L}^0$的一有穷公式来定义. 因为$EQ_\delta(x_\delta)$的约束变元是$\{x_\xi:\xi<\delta\}\cup\{x_{\delta+1}\}$，所以当$\alpha\geqslant\delta$且$\alpha\neq\delta+1$时，$EQ_\delta(x_\alpha)$是用$x_\alpha$代换$EQ_\delta(x_\delta)$的$x_\delta$的所有出现得到的结果. 因为没有约束变元需要改变，所以消去被定义量词和命题联结词且增加省略的括号，有

$EQ_0(x_\alpha)=(\forall x_1(\neg(x_1\dot{\in}x_\alpha)))$, $\quad\alpha\neq1$.

$EQ_\delta(x_\alpha)=$

$$(\neg(\forall\{x_\zeta:\zeta<\delta\}(\neg(\wedge(x_{\delta+1}(\neg(x_{\delta+1}\dot{\in}x_0)))\psi_1\cdots\psi_\zeta\cdots)))),$$

其中对 $\delta\neq 0,\alpha\geqslant\delta$ 且 $\alpha\neq\delta+1$，且

$$\psi_\zeta\doteq(\forall x_{\delta+1}(\wedge((x_{\delta+1}\dot{\in}x_\zeta)\rightarrow\psi'_\zeta)(\psi'_\zeta\rightarrow(x_{\delta+1}\dot{\in}x_\zeta)))),$$

对 $0<\zeta<\delta$；

$$\psi_\zeta=(\forall x_{\delta+1}(\wedge((x_{\delta+1}\dot{\in}x_\alpha)\rightarrow\psi'_\zeta)(\psi'_\zeta\rightarrow(x_{\delta+1}\dot{\in}x_\alpha)))),$$

对 $\zeta=\delta$；

其中对 $0<\zeta\leqslant\delta$，

$$\psi'_\zeta=(\neg(\bigwedge_{\eta<\zeta}\cdots(\neg(x_{\delta+1}\doteq x_\eta))\cdots)).$$

若 S 是序数，令 $p(S)$是$\langle x_\zeta:\zeta<S\rangle$的 Gödel-序列，否则令 $p(S)=\varnothing$. 所以 $p(S)=\langle\zeta\cdot 3+2:\zeta<S\rangle$或$\varnothing$；显然它是一可定义函数. 令 $P(x,y)$是它的定义公式. 若 S_0,S_1 是序数且 $0<S_1<S_0+1$，则令 $q(S_0,S_1)$是当 $\delta=S_0$ 时的 ψ'_{S_1} 的 Gödel-序列，否则，令 $q(S_0,S_1)=\varnothing$. 这个函数可用下列公式定义：

$$Q(x,y,z)=(\neg\theta\rightarrow z\doteq\overline{0})\wedge[\theta\rightarrow\forall x_1[\overline{Seq}(x_1)\wedge\overline{dom}(x_1)\doteq y\wedge\forall x_2[x_2\dot{\in}y\rightarrow(x_1\overline{of}\,x_2)\doteq\overline{Seq_8}(\overline{9},\overline{15},\overline{9},(x\overline{+}\overline{1})\overline{\cdot}\overline{3}\overline{+}\overline{2},\overline{0},x_2\overline{\cdot}\overline{3}\overline{+}\overline{2},\overline{12},\overline{12})]\rightarrow z\doteq\overline{Seq_4}(\overline{9},\overline{15},\overline{9},\overline{21})\overline{\frown}(\overline{\frown}x_1)\overline{\frown}\overline{Seq_2}(\overline{12},\overline{12})]],$$

其中 $\theta=(\overline{ord}(x)\wedge\overline{ord}(y)\wedge\overline{0}\dot{\in}y\wedge y\dot{\in}x\overline{+}\overline{1})$. 被定义符号可以通过 6.1.2 来消除. 若 S_0,S_1,S_2 是序数且 $0<S_1<S_0+1,S_0<S_2+1,S_2\neq S_0+1$，令 $q_1(S_0,S_1,S_2)$是当 $\delta=S_0$ 且 $\alpha=S_2$ 时 ψ_{S_1}的 Gödel-序列；否则令 $q_1(S_0,S_1,S_2)=\varnothing$. 这样 q_1 可以定义如下：

$$Q_1(x,y,z,x_1)=(\neg\theta\rightarrow x_1\doteq\overline{0})\wedge[\theta\rightarrow\forall x_2[Q(x,y,x_2)\rightarrow[[y\dot{\in}x\rightarrow x_1\doteq\overline{Seq_{12}}(\overline{9},\overline{24},(x\overline{+}\overline{1})\overline{\cdot}\overline{3}\overline{+}\overline{2},\overline{9},\overline{21},\overline{9},\overline{9},(x\overline{+}\overline{1})\overline{\cdot}\overline{3}\overline{+}\overline{2},\overline{3},y\overline{\cdot}\overline{3}\overline{+}\overline{2},\overline{12},\overline{18})\overline{\frown}x_2\overline{\frown}\overline{Seq_2}(\overline{12},\overline{9})\overline{\frown}x_2\overline{\frown}\overline{Seq_9}(\overline{18},\overline{9},(x\overline{+}\overline{1})\overline{\cdot}\overline{3}\overline{+}\overline{2},\overline{3},y\overline{\cdot}\overline{3}\overline{+}\overline{2},\overline{12},\overline{12},\overline{12},\overline{12})]\wedge(y\doteq x\rightarrow x_1\doteq\theta_1)]]],$$

其中

$$\theta=[\overline{ord}(x)\wedge\overline{ord}(y)\wedge\overline{ord}(z)\wedge\overline{0}\dot{\in}y\wedge y\dot{\in}x\overline{+}\overline{1}\wedge x\dot{\in}z\overline{+}\overline{1}\wedge\neg(z\doteq x\overline{+}\overline{1})],$$

$$\theta_1=\overline{Seq_{12}}(\overline{9},\overline{24},(x\overline{+}\overline{1})\overline{\cdot}\overline{3}\overline{+}\overline{2},\overline{9},\overline{21},\overline{9},\overline{9},(x\overline{+}\overline{1})\overline{\cdot}\overline{3}\overline{+}\overline{2},\overline{3},z\overline{\cdot}\overline{3}\overline{+}\overline{2},\overline{12},\overline{18})\,\hat{}\,x_2\,\hat{}\,\overline{Seq_2}(\overline{12},\overline{9})\,\hat{}\,x_2\,\hat{}\,\overline{Seq_9}(\overline{18},\overline{9},(x\overline{+}\overline{1})\overline{\cdot}\overline{3}\overline{+}\overline{2},\overline{3},z\overline{\cdot}\overline{3}\overline{+}\overline{2},\overline{12},\overline{12},\overline{12},\overline{12}).$$

最后，若 S_0,S_2 是序数且 $S_0<S_2+1,S_2\neq S_0+1$，则令 $r(S_0,S_2)$ 是 $EQ_{S_0}(x_{S_2})$ 的 Gödel-序列，否则令 $r(S_0,S_2)=\varnothing$，因此 r 的定义公式是：

$$R(x,z,x_1)=(\neg\theta\rightarrow x_1\doteq\overline{0})\wedge[\theta\rightarrow[(x\doteq\overline{0}\wedge x_1\doteq\overline{Seq_{12}}(\overline{9},\overline{24},\overline{5},\overline{9},\overline{15},\overline{9},\overline{5},\overline{3},z\overline{\cdot}\overline{3}\overline{+}\overline{2},\overline{12},\overline{12},\overline{12}))\vee[\neg(x\doteq\overline{0})\wedge\forall x_2x_3[[P(x,x_2)\wedge\overline{Seq}(x_3)\wedge\overline{dom}(x_3)\doteq(x\overline{+}\overline{1})\wedge(x_3\overline{of}\overline{0})\doteq\overline{0}\wedge\forall y(\overline{0}\dot{\in}y\wedge y\dot{\in}(x\overline{+}\overline{1})\rightarrow Q_1(x,y,z,(x_3\overline{of}\ y)))]\rightarrow x_1\doteq\overline{Seq_4}(\overline{9},\overline{15},\overline{9},\overline{24})\,\hat{}\,x_2\,\hat{}\,\overline{Seq_{16}}(\overline{9},\overline{15},\overline{9},\overline{21},\overline{9},\overline{24},(x\overline{+}\overline{1})\overline{\cdot}\overline{3}\overline{+}\overline{2},\overline{9},\overline{15},\overline{9},(x\overline{+}\overline{1})\overline{\cdot}\overline{3}\overline{+}\overline{2},\overline{3},\overline{2},\overline{12},\overline{12},\overline{12})\,\hat{}\,(\hat{}\,x_3)\,\hat{}\,\overline{Seq_4}(\overline{12},\overline{12},\overline{12},\overline{12})]]]],$$

其中

$$\theta=[\overline{ord}(x)\wedge\overline{ord}(z)\wedge x\dot{\in}z\overline{+}\overline{1}\wedge\neg(z\doteq x\overline{+}\overline{1})].$$

这样，我们就可以用 $\mathscr{L}^0$的一有穷公式来定义 $EQ_\delta(x_\delta)$，而且也可以用 $\mathscr{L}^0$的一有穷公式来定义把 $SEQ_\delta(x_\xi:\xi\leqslant\delta)$的 Gödel-序列映射到诸序数 δ 上的函数．前面我们把函数 r 定义为二元函数就是为了在定义 $SEQ_\delta(x_\xi:\xi\leqslant\delta)$时容易把 $EQ_\xi(x_{\delta+1})$纳入 r 的定义．由于我们有用诸序数 δ 定义 $EQ_\delta(x_\delta)$和 $SEQ_\delta(x_\xi:\xi\leqslant\delta)$的公式，所以不难用 $\mathscr{L}^0$ 的一公式写出定义 Σ 的公式．□

6.2.4 引理 在 $\mathfrak{H}_\kappa$ 中成立的 $\mathscr{L}^0$-公式集 Γ 相对 $\mathfrak{M}_\kappa$ 不能用 $\mathscr{L}^\kappa$的一公式来定义．

证明：若 Γ 是可定义的，则据 6.2.3，$\Gamma\cup\Sigma$ 也是可定义的，由

此在系统 $\mathbf{B}_{\kappa\kappa}(\Gamma\cup\Sigma)$中可证的 $\mathscr{L}^*$-公式集也是可定义的. 为了看清这一点,我们给元语言 $\mathscr{ML}^*$增加一新一元谓词符号 $\overline{G}$,$\overline{G}$ 在 $\mathfrak{M}(\mathscr{L}^*,g)$中解释为 $\Gamma\cup\Sigma$ 中公式的 Gödel-序列的集合 G. 用 $B(y\ \overline{of}\ x_1)\vee\overline{G}(y\ \overline{of}\ x_1)$置换定理 6.1.21 中的定义公式 $PRV(x)$ 中的 $AX(y\ \overline{of}\ x_1)$,其中 $B(x)$是相对 $\mathfrak{M}(\mathscr{L}^*,g)$定义系统 $\mathbf{B}_{\kappa\kappa}$的公理的公式. 在这个扩张模型中,$PRV(x)$恰好被在 $\mathbf{B}_{\kappa\kappa}(\Gamma\cup\Sigma)$中可证的公式的诸 Gödel-序列所满足. 我们扩张前面表中引入的映射 E_κ 使得 $E_\kappa(\overline{G}(y))=\psi(e(y))$,其中假设 G 的定义公式$\psi(x)$存在,则公式 $E_\kappa(PRV(x))$在 $\mathfrak{M}_\kappa$ 中恰好被在 $\mathbf{B}_{\kappa\kappa}(\Gamma\cup\Sigma)$中可证的诸公式的诸 Gödel-序列所满足. 但据 6.2.2,这个公式集就是在 $\mathfrak{M}_\kappa$ 中成立的 $\mathscr{L}^*$-公式集 Φ,而据 6.2.1,Φ 相对 $\mathfrak{M}_\kappa$ 不能用一 $\mathscr{L}^*$-公式来定义,所以产生矛盾,因此不可能存在这样的公式 $\psi(x)$,从而证明 $\Gamma\cup\Sigma$ 是不可定义的,据 6.2.3,Γ 也是不可定义的. □

6.2.5 引理 若存在 $\mathscr{L}^0$的单个句子在同构意义上刻画 $\mathfrak{H}_\kappa$ (即对 $\mathscr{L}^0$的任意结构 $\mathfrak{M}$,$\mathfrak{M}\cong\mathfrak{H}_\kappa\Leftrightarrow\mathfrak{M}\models\psi$,其中 ψ 是 $\mathscr{L}^0$的某个句子),则不存在用 $\mathscr{L}^0$ 表述的、可定义的完全演绎系统.

证明:设 $\mathscr{L}^0$-句子 ψ 刻画了 $\mathfrak{H}_\kappa$ 且存在用 $\mathscr{L}^0$表述的可定义的完全演绎系统. 令 $PRV(x)$是 $\mathscr{ML}^*$-公式使得对所有 $S\in\mathbf{H}(\kappa)$,

S 在 $\mathfrak{M}(\mathscr{L}^0,g)$中满足 $PRV(x)$

$\Leftrightarrow S$ 是 $\mathscr{L}^0$的有效公式的 Gödel-序列,

所以相对 $\mathfrak{M}(\mathscr{L}^0,g)$,$PRV(x)$定义了 $\mathscr{L}^0$的有效公式集. 我们令 $Val(x)=E_0(PRV(x))$,则 $Val(x)$是 $\mathscr{L}^*$的公式,它在 $\mathfrak{M}_\kappa$ 中恰好被 $\mathscr{L}^0$的诸有效公式的诸 Gödel-序列所满足,所以它是相对 $\mathfrak{M}_\kappa$ 定义 $\mathscr{L}^0$的有效公式集的定义公式. 下证:

$$\mathscr{L}^0\text{的公式 }\varphi\text{ 在 }\mathfrak{H}_\kappa\text{ 中成立}\Leftrightarrow\ \vdash\psi\rightarrow\varphi. \tag{6.16}$$

证明:"⇒":设任意 $\mathfrak{M}\models\psi$,因为 ψ 刻画了 $\mathfrak{H}_\kappa$,所以 $\mathfrak{M}\cong\mathfrak{H}_\kappa$,又因为 φ 在 $\mathfrak{H}_\kappa$ 中成立,所以 $\mathfrak{M}\models\varphi$.

"⇐":设 $\vdash\psi\rightarrow\varphi$,因为 ψ 刻画了 $\mathfrak{H}_\kappa$,所以 ψ 在 $\mathfrak{H}_\kappa$ 中成立,因

此 φ 在 $\mathfrak{H}_\kappa$ 中成立，所以(6.16)成立.

据(6.16)，我们可以用 $\vdash\psi\to\varphi$ 来定义 φ 在 $\mathfrak{H}_\kappa$ 中成立，从而用 $\vdash\psi\to\varphi$ 相对 $\mathfrak{M}_\kappa$ 来定义在 $\mathfrak{H}_\kappa$ 中成立的 $\mathscr{L}^0$-公式集 Γ 如下：

$$\theta(x)=\forall y[y\doteq\overline{Sq}(\overline{9},\overline{g(\psi(0))},\cdots,\overline{g(\psi(\xi))},\cdots,\overline{18})^\frown x^\frown\overline{Sq}(\overline{12})\to Val(x)]$$

显然，$\theta(x)$ 表示：若

$S\in\mathbf{H}(\kappa)$ 是 ψ 的 Gödel-序列 $\Rightarrow S$ 是 x 的 Gödel-序列，

则 $$\vdash\psi\to\varphi.$$

据 6.1.2(25)，消去毗连号“ $^\frown$ ”，我们得到一定义 Γ 的 $\mathscr{L}^\kappa$-公式，但因为我们从 6.2.4 已经看到 Γ 不是如此可定义的，所以或者不存在这样的公式 ψ 或者不存在这样的公式 $PRV(x)$. □

现在我们有了本节的主要结论：

若 κ 是非极限基数，因为我们已经构造了一在同构意义上刻画 $\mathfrak{H}_\kappa$ 的句子(参见例 1.2.10)，所以在这种情况下，不存在一用 $\mathscr{L}^0$ 表述的、相对 $\mathfrak{M}_\kappa$ 可定义的完全演绎系统.

6.2.6 定理(Scott，[1960]) 对无穷非极限正则基数 κ，不存在用 $\mathscr{L}^0$ 表述的、可定义的完全演绎系统. 更一般地，不存在用 $\mathscr{L}^0$ 表述的、完全演绎系统相对 $\mathfrak{M}_\kappa$ 可以用 $\mathscr{L}^\kappa$ 的一公式来定义.

证明：据 1.2.10，当 κ 是非极限基数时，我们已经构造了一在同构意义上刻画 $\mathfrak{H}_\kappa$ 的句子，因此据 6.2.5，不存在用 $\mathscr{L}^0$ 表示的、可定义的完全演绎系统. □

6.2.7 推论 对正则的无穷基数 κ，相对 $\mathfrak{M}_\kappa$，不存在 $\mathscr{L}^0$ 的、可定义的句子集 Σ 和 $\mathscr{L}^0$ 表述的、可定义的演绎系统 $\mathbf{B}^0$ 使得对 $\mathscr{L}^0$ 的所有公式 φ，

$$\mathbf{B}^0;\Sigma\vdash\varphi\Leftrightarrow\varphi \text{ 在 } \mathfrak{H}_\kappa \text{ 中成立}. \ \square$$

第 7 章　内插定理

从现在起我们进到对无穷逻辑模型论的研究.

从本章起，我们主要关注语言 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$（其中 $\kappa\geqslant\lambda$）和 $\mathscr{L}_{\infty\lambda}$的可容片段的模型论结果，而不专门考察 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\kappa}$的情况. 因为对于模型论，关于 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$的绝大部分结果可以直接概括到后者，其它的语言经过限制或附加条件也能处理后者，所以只考察 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$和 $\mathscr{L}_{\infty\lambda}$的可容片段不仅不会使我们得到的模型论结果比 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda\rho\kappa}$的模型论结果贫乏多少，而且大大地简化了我们表述和讨论问题的过程.

本章前三节讨论如何用模型存在定理得到无穷逻辑的内插定理(interpolation theorem)，以及有关内插定理的推论和反例，最后一节讨论内插定理的若干重要的模型论运用.

下面在讨论内插定理时，我们还是分几种重要的语言 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$，$\mathscr{L}_{\kappa\omega}$（其中 $\kappa\geqslant\omega_1$），$\mathscr{L}_{\infty\omega}$的可容片段分别讨论，尤其对 Craig-内插定理. 这样做固然有一些重复，但有必要，因为这些结果在表述和证明方法上都有所不同，不宜一并处理，而且也能使读者有一个由浅入深、由简到繁的过程.

§1　Craig-内插定理

令 $\mathscr{L}'$ 和 $\mathscr{L}$ 是无穷语言使得 $\mathscr{L}'\supseteq\mathscr{L}$，令 φ 是 $\mathscr{L}'$ 的公式，我们用 $\mathrm{Sm}_{\mathscr{L}}(\varphi)$表示在 φ 中出现的 $\mathscr{L}$ 的非逻辑符号的集合.

下面我们相对几种重要的语言，分别考察 Craig-内插定理.

一、$\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的情况

7.1.1 Craig-内插定理(Lôpez-Escobar [1965]) 令φ,ψ是$\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的句子使得$\models\varphi\to\psi$,则存在$\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的句子$\theta$使得

$$\models\varphi\to\theta,\quad \models\theta\to\psi,\quad \mathrm{Sm}(\theta)\subseteq\mathrm{Sm}(\varphi)\cap\mathrm{Sm}(\psi).$$

证明:令$X_\varphi=\{\varphi'\in\mathrm{Sent}(\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}):\mathrm{Sm}_{\mathscr{L}}(\varphi')\subseteq\mathrm{Sm}_{\mathscr{L}}(\varphi)$且在$\varphi'$中只有有穷多个$c\in C\}$,其中$\mathscr{L}'=\mathscr{L}\cup C$,且$C$是可数新个体变元集. 令$X_\psi$也类似定义. 令$\mathbf{S}$是$\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$的所有有穷句子集$s$的集合使得$s=s_1\cup s_2$且满足下列条件:

(1) $s_1\subseteq X_\varphi,s_2\subseteq X_\psi$,

(2) $\theta_1,\theta_2\in X_\varphi\cap X_\psi$, $\models\bigwedge s_1\to\theta_1$且$\models\bigwedge s_2\to\theta_2\Rightarrow\theta_1\wedge\theta_2$有模型.

下面我们来证明$\mathbf{S}$是(ω_1,ω)-一致性质,即验证$\mathbf{S}$满足定义4.1.2的(C1)—(C7). 令任意$s=s_1\cup s_2\in\mathbf{S}$.

(C1):设$\{\sigma,\neg\sigma\}\subseteq s$. 若$\sigma\in s_1,\neg\sigma\in s_2$,则$\sigma\in X_\varphi,\neg\sigma\in X_\psi$. 因为也有$\neg\sigma\in X_\varphi,\sigma\in X_\psi$,所以$\sigma,\neg\sigma\in X_\varphi\cap X_\psi$且

$$\models\bigwedge s_1\to\sigma,\quad\models\bigwedge s_2\to\neg\sigma,$$

据上述(2),$\sigma\wedge\neg\sigma$有模型,矛盾. 若$\neg\sigma\in s_1,\sigma\in s_2$也类似可证.

若$\sigma,\neg\sigma\in s_1$,则$\models\bigwedge s_1\to\sigma\wedge\neg\sigma$,所以对任意$c\in C$,

$$\models\bigwedge s_1\to\neg(c\equiv c),\quad\models\bigwedge s_2\to c\equiv c.$$

因为$c\equiv c$是$\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$的句子且"$\equiv$"是逻辑符号,所以"在$c\equiv c$中出现的$\mathscr{L}$的每一关系、函数和常元符号都在$\varphi$中"这句话空洞地满足,所以$c\equiv c,\neg(c\equiv c)\in X_\varphi$. 同理,$c\equiv c,\neg(c\equiv c)\in X_\psi$. 所以据(2),$\neg(c\equiv c)\wedge c\equiv c$有模型,又矛盾.

若$\sigma,\neg\sigma\in s_2$,也同样可证.

(C2):假设$\neg\sigma\in s$. 首先设$\neg\sigma\in s_1$. 我们来证$s_1=s\cup\{\sigma\neg\}\in\mathbf{S}$. 假设$s_1^1=s_1\cup\{\sigma\neg\},s_2^1=s_2$,且$s^1=s_1^1\cup s_2^1\notin\mathbf{S}$. 因为$s_1\subseteq X_\varphi$且$\neg\sigma\in s_1$,所以$\neg\sigma\in X_\varphi$,因此$\sigma\neg\in X_\varphi$,所以$s_1\cup\{\sigma\neg\}=s_1^1\subseteq X_\varphi,s_2^1\subseteq$

X_ψ，因此 $s\cup\{\sigma\neg\}$不满足条件(2)，即存在 $\theta_1,\theta_2\in X_\varphi\cap X_\psi$ 使得

$$\models\bigwedge s_1^1\to\theta_1,\quad \models\bigwedge s_2\to\theta_2. \tag{7.1}$$

$$\theta_1\wedge\theta_2 \text{ 没有模型}. \tag{7.2}$$

据(7.1)，有$\models\bigwedge s_1\wedge\sigma\neg\to\theta_1$，$\models\bigwedge s_2\to\theta_2$. 因为$\models\bigwedge s_1\to\neg\sigma$，且$\models\neg\sigma\to\sigma\neg$，所以$\models\bigwedge s_1\to\sigma\neg$，因此$\models\bigwedge s_1\to\bigwedge s_1\wedge\sigma\neg$. 这样我们有$\models\bigwedge s_1\to\theta_1$，$\models\bigwedge s_2\to\theta_2$. 因为 $s=s_1\cup s_2\in\mathbf{S}$，所以据条件(2)，$\theta_1\wedge\theta_2$有模型，与(7.2)矛盾. 若$\neg\sigma\in s_2$ 也类似可证.

(C3)：设$\bigwedge\Sigma\in s$. 先设$\bigwedge\Sigma\in s_1$，则$\bigwedge\Sigma\in X_\varphi$，因此 $\Sigma\subseteq X_\varphi$. 我们来证，对所有 $\sigma\in\Sigma$，$s^1=s_1^1\cup s_2^1\in\mathbf{S}$，其中 $s_1^1=s_1\cup\{\sigma\}$，$s_2^1=s_2$. 假设对某个 $\sigma\in\Sigma$，$s^1\notin\mathbf{S}$. 因为 $\Sigma\subseteq X_\varphi$，所以 $s_1^1=s_1\cup\{\sigma\}\subseteq X_\varphi$，$s_2^1=s_2\subseteq X_\psi$，因此 s^1 不满足条件(2)，即存在 $\theta_1,\theta_2\in X_\varphi\cap X_\psi$ 使得

$$\models\bigwedge s_1^1\to\theta_1,\quad \models\bigwedge s_2\to\theta_2. \tag{7.3}$$

$$\theta_1\wedge\theta_2 \text{ 没有模型}. \tag{7.4}$$

据(7.3)，有$\models\bigwedge s_1\wedge\sigma\to\theta_1$，$\models\bigwedge s_2\to\theta_2$. 据前者和

$$\models\bigwedge s_1\wedge\bigwedge\Sigma\to\bigwedge s_1\wedge\sigma,$$

有$\models\bigwedge s_1\to\theta_1$，因为 $s=s_1\cup s_2\in\mathbf{S}$，所以据条件(2)，$\theta_1\wedge\theta_2$ 有模型，与(7.4)矛盾. 如$\bigwedge\Sigma\in s_2$ 也类似可证.

(C4)：设$\bigvee\Sigma\in s$. 先设$\bigvee\Sigma\in s_1$，则$\bigvee\Sigma\in X_\varphi$，因此 $\Sigma\subseteq X_\varphi$. 下证：对某个 $\sigma\in\Sigma$，$s^1=s_1^1\cup s_2^1\in\mathbf{S}$，其中 $s_1^1=s_1\cup\{\sigma\}$，$s_2^1=s_2$. 假设对所有 $\sigma\in\Sigma$，$s^1=s\cup\{\sigma\}\notin\mathbf{S}$. 因为 $\Sigma\subseteq X_\varphi$，所以 $s_1^1=s_1\cup\{\sigma\}\subseteq X_\varphi$，$s_2^1=s_2\subseteq X_\psi$，因此 s^1 不满足条件(2)，即存在 $\theta_{1\sigma},\theta_{2\sigma}\in X_\varphi\cap X_\psi$ 使得

$$\models\bigwedge s_1^1\to\theta_{1\sigma},\quad \models\bigwedge s_2\to\theta_{2\sigma}. \tag{7.5}$$

$$\theta_{1\sigma}\wedge\theta_{2\sigma} \text{没有模型}. \tag{7.6}$$

据(7.5)，有$\models\bigwedge s_1\wedge\sigma\to\theta_{1\sigma}$，$\models\bigwedge s_2\to\theta_{2\sigma}$. 据合取规则的有效性，有

$$\models\bigwedge s_1\to\bigwedge\{\sigma\to\theta_{1\sigma}:\sigma\in\Sigma\},\quad \models\bigwedge s_2\to\bigwedge\{\sigma\to\theta_{2\sigma}:\sigma\in\Sigma\}.$$

据前者，2.2.7 和 4.4.1(1)，有

$$\models\bigwedge s_1\to(\bigvee\{\sigma:\sigma\in\Sigma\}\to\bigvee\{\theta_{1\sigma}:\sigma\in\Sigma\}).$$

因为$\bigvee\Sigma\in s_1$，所以$\models\bigwedge s_1\to\bigvee\{\theta_{1\sigma}:\sigma\in\Sigma\}$.

令$\theta_1=\bigvee\{\theta_{1\sigma}:\sigma\in\Sigma\}$，$\theta_2=\bigwedge\{\theta_{2\sigma}:\sigma\in\Sigma\}$，则显然$\theta_1,\theta_2\in X_\varphi\cap X_\psi$. 因为$s=s_1\cup s_2\in\mathbf{S}$，所以据条件(2)，$\theta_1\wedge\theta_2$有模型. 另一方面，据(7.6)和合取规则的有效性，有

$$\models\bigwedge\{\neg(\theta_{1\sigma}\wedge\theta_{2\sigma}):\sigma\in\Sigma\}$$

$$\Rightarrow\ \models\bigwedge\{\theta_{1\sigma}\to\neg\theta_{2\sigma}:\sigma\in\Sigma\}$$

$$\Rightarrow\ \models\bigvee\{\theta_{1\sigma}:\sigma\in\Sigma\}\to\bigvee\{\neg\theta_{2\sigma}:\sigma\in\Sigma\}$$

$$\Rightarrow\ \models\neg(\theta_1\wedge\theta_2).$$

因此$\theta_1\wedge\theta_2$没有模型，矛盾. $\bigvee\Sigma\in s_2$的情况也类似可证.

(C5)：假设$\forall x\sigma(x)\in s$. 首先设$\forall x\sigma(x)\in s_1$，我们来证，对所有$c\in C$，$s^1=s_1^1\cup s_2^1\in\mathbf{S}$，其中$s_1^1=s_1\cup\{\sigma(x/c)\}$，$s_2^1=s_2$. 假设对某个$c\in C$，$s^1=s\cup\{\sigma(x/c)\}\notin\mathbf{S}$. 因为$\sigma(x/c)$的非逻辑符号至多比$\forall x\sigma(x)$多一个$c\in C$，所以$\mathrm{Sm}_{\mathscr{L}}(\sigma(x/c))=\mathrm{Sm}_{\mathscr{L}}(\forall x\sigma(x))$，因此$s_1^1\subseteq X_\varphi$，$s_2^1\subseteq X_\psi$，从而$s^1$不满足条件(2)，即存在$\theta_1,\theta_2\in X_\varphi\cap X_\psi$使得

$$\models\bigwedge s_1\wedge\sigma(x/c)\to\theta_1,\quad \models\bigwedge s_2\to\theta_2. \tag{7.7}$$

$$\theta_1\wedge\theta_2\text{没有模型}. \tag{7.8}$$

因为$\models\forall x\sigma(x)\to\sigma(x/c)$，所以据(7.7)，有$\models\bigwedge s_1\wedge\forall x\sigma(x)\to\theta_1$，因此$\models\bigwedge s_1\to\theta_1$. 因为$s\in\mathbf{S}$，所以根据条件(2)，$\theta_1\wedge\theta_2$有模型，与(7.8)矛盾. $\forall x\sigma(x)\in s_2$的情况也类似可证.

(C6)：假设$\exists x\sigma(x)\in s$. 首先设$\exists x\sigma(x)\in s_1$，我们来证，对某个$c\in C$，$s^1=s_1^1\cup s_2^1\in\mathbf{S}$，其中$s_1^1=s_1\cup\{\sigma(x/c)\}$，$s_2^1=s_2$. 假设对所有$c\in C$，$s^1=s\cup\{\sigma(x/c)\}\notin\mathbf{S}$. 如上易证$s_1^1\subseteq X_\varphi$，$s_2^1\subseteq X_\psi$，所以$s^1$不满足条件(2)，因此对所有$c\in C$，存在$\theta_{1c},\theta_{2c}\in X_\varphi\cap X_\psi$使得

$$\models\bigwedge s_1^1\to\theta_{1c},\quad \models\bigwedge s_2^1\to\theta_{2c}. \tag{7.9}$$

$$\theta_{1c}\wedge\theta_{2c}\text{没有模型}. \tag{7.10}$$

因为$s_1\subseteq X_\varphi$，所以s_1的每一句子只含有穷多个$c\in C$. 对$\theta_{1c}\in X_\varphi$也同样. 再加上s_1是有穷句子集，所以$s_1\cup\{\theta_{1c}\}$中只有有穷多个$c\in C$，因此据(7.9)，我们可以取到一个不在s_1和θ_{1c}中出现的个体常

元 $d\in C$ 使得$\models \bigwedge s_1\wedge\sigma(x/d)\to\theta_{1c}$. 令 y 是不在 s_1 和 θ_{1c}中出现的个体变元,则据前件存在规则的有效性,我们有

$$\models\exists y(\bigwedge s_1\wedge\sigma(y))\to\theta_{1c}.$$

因此我们易得$\models\bigwedge s_1\wedge\exists y\sigma(y)\to\theta_{1c}$. 据约束变元变换律 2.2.14 和 $\exists x\sigma(x)\in s_1$,有$\models\bigwedge s_1\to\theta_{1c}$. 因为 $s\in\mathbf{S}$,所以据条件(2),$\theta_{1c}\wedge\theta_{2c}$有模型,与(7.10)矛盾. $\exists x\sigma(x)\in s_2$ 的情况也类似可证.

(C7):令 t 是基本项, $c,d\in C$.

(1) 假设 $c\equiv d\in s$. 首先设 $c\equiv d\in s_1$,我们来证,$s^1=s_1^1\cup s_2^1\in\mathbf{S}$,其中 $s_1^1=s_1\cup\{d\equiv c)\}$,$s_2^1=s_2$. 假设 $s^1\notin\mathbf{S}$. 因为 $s_1^1\subseteq X_\varphi$,$s_2^1\subseteq X_\psi$,所以 s^1 不满足条件(2),因此存在 $\theta_1,\theta_2\in X_\varphi\cap X_\psi$ 使得

$$\models\bigwedge s_1\wedge d\equiv c\to\theta_1,\quad \models\bigwedge s_2\to\theta_2. \tag{7.11}$$

$$\theta_1\wedge\theta_2\text{没有模型}. \tag{7.12}$$

据(7.11)和$\models d\equiv c\leftrightarrow c\equiv d$,我们有$\models\bigwedge s_1\to\theta_1$,$\models\bigwedge s_2\to\theta_2$. 因为 $s\in\mathbf{S}$,所以据条件(2),$\theta_1\wedge\theta_2$有模型,与(7.12)矛盾.

$c\equiv d\in s_2$ 的情况也类似可证.

(2) 假设 $c\equiv t,\sigma(t)\in s$. 首先设 $c\equiv t$, $\sigma(t)\in s_1$, 我们来证,$s^1=s_1^1\cup s_2^1\in\mathbf{S}$, 其中 $s_1^1=s_1\cup\{\sigma(t/c)\}$, $s_2^1=s_2$. 假设 $s^1\notin\mathbf{S}$. 因为 $s_1^1\subseteq X_\varphi$,$s_2^1\subseteq X_\psi$,所以存在 $\theta_1,\theta_2\in X_\varphi\cap X_\psi$ 使得

$$\models\bigwedge s_1\wedge\sigma(t/c)\to\theta_1,\quad \models\bigwedge s_2\to\theta_2,\quad \theta_1\wedge\theta_2\text{没有模型}.$$

据公理 7 的有效性,有$\models\bigwedge s_1\to\theta_1$,$\models\bigwedge s_2\to\theta_2$. 因为 $s\in\mathbf{S}$,所以据条件(2),$\theta_1\wedge\theta_2$有模型,矛盾. 若 $c\equiv t,\sigma(t)\in s_2$,也类似可证.

假设 $\sigma(t)\in s_1$, $c\equiv t\in s_2$. 我们来证, $s^1=s_1^1\cup s_2^1\in\mathbf{S}$, 其中 $s_1^1=s_1\cup\{\sigma(t/c)\}$,$s_2^1=s_2$. 假设 $s^1\notin\mathbf{S}$. 因为 $s_1^1\subseteq X_\varphi$,$s_2^1\subseteq X_\psi$,所以据条件(2),存在 $\theta_1,\theta_2\in X_\varphi\cap X_\psi$ 使得

$$\models\bigwedge s_1\wedge\sigma(t/c)\to\theta_1,\quad \models\bigwedge s_2\to\theta_2,\quad \theta_1\wedge\theta_2\text{没有模型}.$$

据公理 7 的有效性,有$\models\bigwedge s_1\wedge\sigma(t)\wedge c\equiv t\to\theta_1$,所以

$$\models\bigwedge s_1\to(c\equiv t\to\theta_1).$$

因为 $c\equiv t\in s_2$,所以$\models\bigwedge s_2\to c\equiv t\wedge\theta_2$. 因为 $c\equiv t\to\theta_1$,$c\equiv t\wedge\theta_2\in X_\varphi$

$\cap X_\psi$,所以据条件(2),$(c\equiv t\to\theta_1)\wedge(c\equiv t\wedge\theta_2)$有模型,因此 $\theta_1\wedge\theta_2$ 有模型,矛盾. $c\equiv t\in s_1,\sigma(t)\in s_2$ 的情况也类似可证.

(3) 不妨假设 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}=\mathrm{Sm}(\varphi)\cup\mathrm{Sm}(\psi)$,因为我们完全可以考虑语言$(\mathrm{Sm}(\varphi)\cup\mathrm{Sm}(\psi))_{\omega_1\omega}$. 显然,对该语言,上述已证的结果都成立,因此根据以下的结果,我们仍能证明本定理成立. 因为 t 是基本项,所以所有形如 $c\equiv t$ 的公式属于 X_φ 或 X_ψ. 令 $e\in C$ 不在 s 和 t 中出现,则据上述说明,$e\equiv t$ 属于 X_φ 或 X_ψ. 不妨假设 $e\equiv t\in X_\varphi$,$s^1=s_1^1\cup s_2^1\notin\mathbf{S}$,其中 $s_1^1=s_1\cup\{e\equiv t\}$,$s_2^1=s_2$. 因为 $s_1^1\subseteq X_\varphi$,$s_2^1\subseteq X_\psi$,所以存在 $\theta_1,\theta_2\in X_\varphi\cap X_\psi$ 使得

$$\models\bigwedge s_1\wedge e\equiv t\to\theta_1,\quad \models\bigwedge s_2\to\theta_2,\quad \theta_1\wedge\theta_2\text{没有模型}.$$

令 y 是不在 s 中出现的个体变元,用 y 置换第一个公式中的 e,我们有$\models\bigwedge s_1\wedge y\equiv t\to\theta_1$. 因为全称概括规则保持有效性,所以有 $\models\bigwedge s_1\wedge\neg\theta_1\to\forall y\neg(y\equiv t)$. 据公理 4 的有效性,有

$$\models\bigwedge s_1\wedge\neg\theta_1\to\neg(t\equiv t).$$

根据公理 5 的有效性,有$\models\bigwedge s_1\to\theta_1$. 因为 $s\in\mathbf{S}$,所以根据条件(2),$\theta_1\wedge\theta_2$有模型,矛盾.

这样我们证明了 $\mathbf{S}$ 是(ω_1,ω)-一致性质,据 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$-模型存在定理(4.1.5),每一 $s\in\mathbf{S}$ 有模型. 因为$\models\varphi\to\psi$,所以$\{\varphi,\neg\psi\}$没有模型,因此$\{\varphi,\neg\psi\}\notin\mathbf{S}$. 又因为 $\varphi\in X_\varphi$,$\neg\psi\in X_\psi$,所以$\{\varphi,\neg\psi\}$不满足 $\mathbf{S}$ 的条件(2),即存在 $\theta_1,\theta_2\in X_\varphi\cap X_\psi$ 使得

$$\models\varphi\to\theta_1,\quad\models\neg\psi\to\theta_2. \tag{7.13}$$

$$\models\neg(\theta_1\wedge\theta_2). \tag{7.14}$$

据(7.13),有$\models\neg\theta_2\to\psi$,据(7.14),有$\models\theta_1\to\neg\theta_2$,因此$\models\theta_1\to\psi$.

不妨把 θ_1 写作 $\theta_1=\theta_1(\vec{c}_n)$,其中 $\vec{c}_n$ 是在 θ_1 中出现的 C 的所有元素. 选择不在 $\theta_1(\vec{c}_n)$中出现的个体变元 $\vec{y}_n$ 且令

$$\theta=\forall\vec{y}_n\theta_1(c_1/y_1,\cdots,c_n/y_n),$$

则 θ 是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的句子且满足我们要证的结论. □

注意:(Ⅰ) 7.1.1 是由 López-Escobar 在其[1965]得到的,他

用截割消除法(cut elimination)为本定理给出一个证明论论证．上述我们给出的证明来自 Makkai．它是对由 Henkin 给出的 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$的 Craig-内插定理的概括．(Ⅱ)在 7.1.1 中，我们不是总能找到一个 θ 使得若等词符号在 θ 中出现，则它也在 φ 和 ψ 中出现．例如，

$$\models \forall xy(x\equiv y)\rightarrow\forall xy(R(x)\leftrightarrow R(y)).$$

7.1.2 推论 令 $\varphi(\vec{x}_n),\psi(\vec{x}_n)$是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的公式使得$\models\varphi\rightarrow\psi$，则存在 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的公式 $\theta(\vec{x}_n)$使得

$$\models\varphi\rightarrow\theta,\quad \models\theta\rightarrow\psi,\quad \mathrm{Sm}(\theta)\subseteq\mathrm{Sm}(\varphi)\cap\mathrm{Sm}(\psi).$$

证明：用新常元 $\vec{c}_n$ 置换 φ 和 ψ 中的 $\vec{x}_n$，然后再用 2.2.15 和 7.1.1．□

二、$\mathscr{L}_{\kappa\omega}$的情况

本小节固定 $\kappa>\omega_1$，$2^{>\kappa}=\bigcup\{(2^\eta)^+:\eta<\kappa\}$．令 $\mathscr{L}'_{\kappa\omega}=\mathscr{L}_{\kappa\omega}\cup C$，其中 C 是基数为 κ 的新个体常元符号集．当 κ 是共尾度为 ω 的奇异基数时，我们可以把 C 写作$\bigcup\limits_{n<\omega}C_n$．

7.1.3 Craig-内插定理(Malitz，[1966]) 令 φ,ψ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$的句子使得$\models\varphi\rightarrow\psi$，则存在 $\mathscr{L}_{2^{>\kappa},\kappa}$的句子 θ 使得

$$\models\varphi\rightarrow\theta,\quad \models\theta\rightarrow\psi,\quad \mathrm{Sm}(\theta)\subseteq\mathrm{Sm}(\varphi)\cap\mathrm{Sm}(\psi).$$

证明：首先假设对上述所有语言 $\mathscr{L}'_{\kappa\omega}=\mathscr{L}_{\kappa\omega}\cup C$(不妨假设 $\mathscr{L}'_{\kappa\omega}$的个体常元和函数符号既在 φ 中又在 ψ 中且 $\mathscr{L}'_{\kappa\omega}$的关系符号在 φ 或 ψ 中)和 $\mathscr{L}'_{\kappa\omega}$的所有句子 φ 和 ψ，本定理已经证明．

考虑任意语言 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$和 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$的任意句子 φ 和 ψ．令 $\mathscr{L}'_{\kappa\omega}$是一语言使得 $\mathscr{L}'_{\kappa\omega}$包含在 φ 和 ψ 中同时出现的 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$的个体常元和函数符号，且包含在 φ 或 ψ 中出现的 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$的关系符号，对在 φ 中出现但不在 ψ 中出现或在 ψ 中出现但不在 φ 中出现的每一 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$的个体常元 d 和函数符号 F，$\mathscr{L}'_{\kappa\omega}$还包含新关系符号 R_d 和 R_F．令

$$\mathrm{D}_{\varphi-\psi}=\{d:d\in\mathrm{Sm}(\varphi)-\mathrm{Sm}(\psi)\text{ 且 }d\text{ 是个体常元}\},$$

$\mathrm{F}^n_{\varphi-\psi}=\{F:F\in \mathrm{Sm}(\varphi)-\mathrm{Sm}(\psi)$ 且 F 是 n 元函数符号$\}$.

定义 $\mathscr{L}'_{\kappa\omega}$ 的句子 φ_1 如下：

$$\varphi_2 \wedge \bigwedge\{\exists!\, xR_d(x): d\in \mathrm{D}_{\varphi-\psi}\}$$

$$\wedge \bigwedge_{n<\omega} \bigwedge\{\forall \vec{x}_n \exists!\, x_{n+1} R_F(\vec{x}_n, x_{n+1}): F\in \mathrm{F}^n_{\varphi-\psi}\},$$

其中 φ_2 是通过对 φ 如下置换得到的句子：对每一 $d\in \mathrm{D}_{\varphi-\psi}$，用 $\exists x[R_d(x)\wedge P(\cdots,x,\cdots)]$ 置换 φ 中含 d 的原子公式 $P(\cdots,d,\cdots)$ 的每一出现；对 $t=F(\vec{t}_n)$，其中 $F\in \mathrm{F}^n_{\varphi-\psi}$，且 $\vec{t}_n$ 不含任意 $\mathrm{F}^m_{\varphi-\psi}$ 中函数符号和 $\mathrm{D}_{\varphi-\psi}$ 中个体常元，用 $\exists x[R_F(\vec{t}_n,x)\wedge P(\cdots,x,\cdots)]$ 置换 φ 中含 t 的原子公式 $P(\cdots,t,\cdots)$ 的每一出现.

类似地定义 ψ_1. 据 φ_1,ψ_1 的构造，它们与 φ,ψ 分别语义等价. 因为 $\models\varphi\to\psi$，所以 $\models\varphi_1\to\psi_1$，因此据我们开头提出的假设，存在 $\mathscr{L}'_{2^{>\kappa},\kappa}$ 的句子 θ 使得 $\models\varphi_1\to\theta$，$\models\theta\to\psi_1$，且在 θ 中出现的每一函数和个体常元符号在 φ_1 和 ψ_1 中都出现. 显然，没有一个新关系符号 R_d, R_F 能在 θ 中出现，因为没有这样的新关系符号能在 φ_1 和 ψ_1 中同时出现，因此我们有一个用原来语言 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$ 的符号构成的句子 θ 使得 $\models\varphi\to\theta$，$\models\theta\to\psi$ 且 $\mathrm{Sm}(\theta)\subseteq \mathrm{Sm}(\varphi)\cap \mathrm{Sm}(\psi)$.

因此在本证明剩下部分，我们只须假设 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$ 的每一函数和个体常元符号在 φ 和 ψ 中都出现，且 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$ 的每一关系符号在 φ 或 ψ 中出现.

假设 κ 是正则基数. 对 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$ 的任意句子 σ，令

$$X_\sigma=\{\sigma_1\in \mathrm{Sent}(\mathscr{L}'_{2^{>\kappa},\kappa}):\text{在 } \sigma_1 \text{ 中只有} <\kappa \text{ 个 } c\in C \text{ 出现且 } \sigma_1 \text{ 中出现的每一关系符号在 } \sigma \text{ 中出现}\}.$$

注意：若 κ 是共尾度为 ω 的奇异基数，则我们还要求对某个 $n<\omega$，在 X_σ 中一句子中出现的所有 $c\in C$ 都必须在同一个 C_n 中.

令 $\mathbf{S}$ 是 $\mathscr{L}'_{\kappa\omega}$ 的所有句子集 s 的集合使得 $|s|<\kappa$，$s=s_1\cup s_2$ 且：

(1) $s_1\subseteq X_\varphi$，$s_2\subseteq X_\psi$，且

(2) 不存在 $\theta\in X_\varphi\cap X_\psi$ 使得 $\models\bigwedge s_1\to\theta$ 且 $\models\bigwedge s_2\to\neg\theta$.

下面我们来证明 $\mathbf{S}$ 是 (κ,ω)-一致性质（当 κ 是共尾度为 ω 的奇异基数时，对 $\mathbf{S}$ 作一些显然的修正也可类似证明 $\mathbf{S}$ 是 (κ,ω)-一致性质，我们把这种情况的证明留给读者做练习）. 令任意 $s=s_1\cup s_2\in\mathbf{S}$，我们来验证 s 满足定义 4.2.1(1)的(C1)—(C7).

(C1)：假设 $\{\sigma,\neg\sigma\}\subseteq s$. 若 $\sigma\in s_1$，$\neg\sigma\in s_2$，则据(1)，$\sigma\in X_\varphi$，$\neg\sigma\in X_\psi$，所以 $\sigma\in X_\psi$，因此 $\sigma\in X_\varphi\cap X_\psi$ 且 $\models\bigwedge s_1\to\sigma$，$\models\bigwedge s_2\to\neg\sigma$，与(2)矛盾. 若 $\neg\sigma\in s_1$，$\sigma\in s_2$ 也类似可证.

若 $\sigma,\neg\sigma\in s_1$，则令 $\theta=\forall x\neg(x\equiv x)$，显然 $\theta\in X_\varphi\cap X_\psi$. 因为

$$\models\bigwedge s_1\to\sigma\wedge\neg\sigma,\quad \models\sigma\wedge\neg\sigma\to\forall x\neg(x\equiv x),$$

所以 $\models\bigwedge s_1\to\theta$，$\models\bigwedge s_2\to\neg\theta$，与(2)矛盾.

若 $\sigma,\neg\sigma\in s_2$，只要令 $\theta=\forall x(x\equiv x)$ 也类似可证.

(C2)：设 $\{\neg\sigma:\sigma\in\Sigma\}\subseteq s$. 令 $s_i^1=s_i\cup\{\sigma\neg:\sigma\in\Sigma,\neg\sigma\in s_i\}$，其中 $i=1,2$. 显然，s_1^1 和 s_2^1 满足(1). 假设 $s^1=s_1^1\cup s_2^1\notin\mathbf{S}$，则 s^1 不满足条件(2)，即存在 $\theta\in X_\varphi\cap X_\psi$ 使得

$$\models\bigwedge s_1\wedge\bigwedge\{\sigma\neg:\neg\sigma\in s_1\}\to\theta,$$

$$\models\bigwedge s_2\wedge\bigwedge\{\sigma\neg:\neg\sigma\in s_2\}\to\neg\theta.$$

据公理 2 的有效性，

$$\models\bigwedge s_1\wedge\bigwedge\{\neg\sigma:\neg\sigma\in s_1\}\to\theta,$$

$$\models\bigwedge s_2\wedge\bigwedge\{\neg\sigma:\neg\sigma\in s_2\}\to\neg\theta.$$

即 $\models\bigwedge s_1\to\theta,\quad\models\bigwedge s_2\to\neg\theta.$

而这与 $s\in\mathbf{S}$ 矛盾.

(C3)，(C5)和(C7)(1)的验证类似(C2)的验证，只是分别运用公理 3，公理 4 和公理 6 的有效性，请读者自证.

(C4)：假设 $\{\bigvee\Sigma_i:i\in I\}\subseteq s$. 令 $I_j=\{i\in I:\bigvee\Sigma_i\in s_j\}$，其中 $j=1,2$. 对所有 $f\in\prod_{i\in I_1}\Sigma_i$，假设 $s_f=s\cup\{f(i):i\in I_1\}$ 且 $s_f\notin\mathbf{S}$. 令 $s_{f,1}=s_1\cup\{f(i):i\in I_1\}$，$s_{f,2}=s_2$. 显然，$s_{f,1}\subseteq X_\varphi$，因此对所有 $f\in\prod_{i\in I_1}\Sigma_i$，$s_f=s_{f,1}\cup s_{f,2}$ 不满足条件(2)，即存在 $\theta_f\in X_\varphi\cap X_\psi$ 使得

$$\models \bigwedge s_1 \wedge \bigwedge \{f(i) : i \in I_1\} \rightarrow \theta_f, \quad \models \bigwedge s_2 \rightarrow \neg \theta_f.$$

令 $\theta = \bigvee \{\theta_f : f \in \prod_{i \in I_1} \Sigma_i\}$，显然 $\theta \in X_\varphi \cap X_\psi$. 下证：

$$\models \bigwedge s_1 \wedge \bigvee \{\bigwedge_{i \in I_1} f(i) : f \in \prod_{i \in I_1} \Sigma_i\} \rightarrow \theta, \quad \models \bigwedge s_2 \rightarrow \neg \theta. \tag{7.15}$$

因为对所有 $f \in \prod_{i \in I_1} \Sigma_i$，$\models \bigwedge s_2 \rightarrow \neg \theta_f$，所以据合取规则（分配律规则的特例）的有效性，有 $\models \bigwedge s_2 \rightarrow \bigwedge \{\neg \theta_f : f \in \prod_{i \in I_1} \Sigma_i\}$. 据公理 2 的有效性，有 $\models \bigwedge s_2 \rightarrow \neg \theta$. 另一方面，我们有

$$\models \bigwedge s_1 \wedge \bigwedge \{f(i) : i \in I_1\} \rightarrow \theta_f, \quad \text{对所有 } f \in \prod_{i \in I_1} \Sigma_i.$$

据 2.2.7(3)(b)的有效性，

$$\models \bigwedge s_1 \wedge \bigwedge \{f(i) : i \in I_1\} \rightarrow \bigvee \{\theta_f : f \in \prod_{i \in I_1} \Sigma_i\},$$

即 $\models \bigwedge s_1 \wedge \bigwedge \{f(i) : i \in I_1\} \rightarrow \theta$. 所以(7.15)成立.

据(7.15)和合取公理的有效性，

$$\models \bigwedge s_1 \wedge \neg \theta \rightarrow \neg \bigwedge \{f(i) : i \in I_1\}, \quad \text{对所有 } f \in \prod_{i \in I_1} \Sigma_i.$$

据分配律规则的有效性，有

$$\models \bigwedge s_1 \wedge \neg \theta \rightarrow \neg \bigwedge \{\bigvee \Sigma_i : i \in I_1\},$$

因此 $\models \bigwedge s_1 \wedge \bigwedge \{\bigvee \Sigma_i : i \in I_1\} \rightarrow \theta$. 因为 $\{\bigvee \Sigma_i : i \in I_1\} \subseteq s_1$，所以 $\models \bigwedge s_1 \rightarrow \theta$，而这与 $\models \bigwedge s_2 \rightarrow \neg \theta$ 和 $s \in \mathbf{S}$ 矛盾，所以 $s_f \in \mathbf{S}$.

用 s_f 作为出发点，用类似的方法，可以证明存在 $g \in \prod_{i \in I_2}$ 使得

$$s \cup \{f(i) : i \in I_1\} \cup \{g(i) : i \in I_2\} \in \mathbf{S},$$

所以若 $h = f \cup g$，则 $h \in \prod_{i \in I} \Sigma_i$ 且 $s \cup \{h(i) : i \in I\} \in \mathbf{S}$，这就证明了 $\mathbf{S}$ 满足(C4).

注意：正如前面章节说过的那样，上述 $\bigwedge$ 的运算规模小于 $2^{>\kappa}$，但可以大于 κ，除非 κ 是强极限基数.

(C6)：假设 $\{\exists x_i \sigma_i(x_i) : i \in I\} \subseteq s$ 且 $\{c_i : i \in I\}$ 是 C 的 $|I|$ 个互不相同的个体常元的集合使得其中的元素都不在 s 中出现. 令 $I_j = \{i \in I : \exists x_i \sigma_i(x_i) \in s_j\}$，其中 $j = 1, 2$. 令 $s_1^1 = s_1 \cup \{\sigma_i(x_i/c_i) : i \in I_1\}$，

$s_2^1 = s_2$. 假设 $s^1 = s_1^1 \cup s_2^1 \notin \mathbf{S}$. 因为 $s_1^1 \subseteq X_\varphi$ 且 $s_2^1 \subseteq X_\psi$，所以存在 $\theta \in X_\varphi \cap X_\psi$ 使得

$$\models \bigwedge s_1 \wedge \bigwedge \{\sigma_i(x_i/c_i) : i \in I_1\} \to \theta, \quad \models \bigwedge s_2 \to \neg\theta.$$

对每一 $i \in I$，c_i 可能在 θ 中出现但不会在 s 中出现，因此我们可以用不在 s 和 θ 中出现的 $|I|$ 个互不相同的新个体变元 y_i 代换上述 c_i 的所有出现，这样据引理 2.2.15(1)，有

$$\models \bigwedge s_1 \wedge \bigwedge \{\sigma_i(c_i/y_i) : i \in I_1\} \to \theta(c_i/y_i : i \in I_1),$$

$$\models \bigwedge s_2 \to \neg\theta(c_i/y_i : i \in I_1).$$

据全称量化规则和其它熟悉的变换，我们有

$$\models \bigwedge s_1 \wedge \bigwedge \{\exists y_i \sigma_i(y_i) : i \in I_1\} \to \exists \{y_i : i \in I_1\} \theta(c_i/y_i : i \in I_1),$$

$$\models \bigwedge s_2 \to \forall \{y_i : i \in I_1\} \neg\theta(c_i/y_i : i \in I_1).$$

据约束变元变换律 2.2.14 等，有

$$\models \bigwedge s_1 \wedge \bigwedge \{\exists x_i \sigma_i(x_i) : i \in I_1\} \to \exists \{x_i : i \in I_1\} \theta(c_i/x_i : i \in I_1),$$

$$\models \bigwedge s_2 \to \neg\exists \{x_i : i \in I_1\} \theta(c_i/x_i : i \in I_1).$$

这与 $s \in \mathbf{S}$ 矛盾，所以 $s^1 \in \mathbf{S}$.

令 $s_1^2 = s_1^1$，$s_2^2 = s_2^1 \cup \{\sigma_i(x_i/c_i) : i \in I_2\}$，类似上述论证我们可以证明：若 $s^2 = s_1^2 \cup s_2^2 \notin \mathbf{S}$，则存在一个恰当的 $\theta \in X_\varphi \cap X_\psi$ 使得

$$\models \bigwedge s_1^1 \to \forall \{x_i : i \in I_2\} \theta(c_i/x_i : i \in I_2),$$

$$\models \bigwedge s_2^1 \to \exists \{x_i : i \in I_2\} \neg\theta(c_i/x_i : i \in I_2).$$

而这与 $s^1 \in \mathbf{S}$ 矛盾，因此 $s^2 = s \cup \{\sigma_i(x_i/c_i) : i \in I\} \in \mathbf{S}$.

(C7)(2)：假设 $\{c_i \equiv t_i : i \in I\} \cup \{\sigma_i(t_i) : i \in I\} \subseteq s$，其中 $\{c_i : i \in I\} \subseteq C$ 且 $\{t_i : i \in I\}$ 是 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$ 相对 C 的基本项集．令

$$I_j = \{i \in I : \sigma_i(t_i) \in s_j\},$$

$$s_j^1 = s_j \cup \{\sigma_i(t_i/c_i) : i \in I_j\}, \quad 其中\ j = 1, 2.$$

$$I_{j,k} = \{i \in I_j : c_i \equiv t_i \in s_k\}, \quad 其中\ k = 1, 2.$$

显然，s_1^1 和 s_2^1 满足(1)且据公理 6 的有效性，有

$$\models \bigwedge s_j \to \bigwedge \{\sigma_i(t_i/c_i) : i \in I_{j,j}\}.$$

假设 $s^1 = s_1^1 \cup s_2^1 \notin \mathbf{S}$，则存在 $\theta \in X_\varphi \cap X_\psi$ 使得

$$\models \bigwedge s_1^1 \to \theta, \quad \models \bigwedge s_2^1 \to \neg\theta.$$

因此

$$\models \bigwedge s_1 \wedge \bigwedge \{\sigma_i(t_i/c_i) : i \in I_{1,2}\} \to \theta. \tag{7.16}$$

因为$\{\sigma_i(t_i/c_i) : i \in I_{1,2}\} \subseteq s_1$，所以据公理 6 的有效性，有

$$\models \bigwedge s_1 \wedge \bigwedge \{c_i \equiv t_i : i \in I_{1,2}\} \to \bigwedge \{\sigma_i(t_i/c_i) : i \in I_{1,2}\}.$$

因此据(7.16)，有

$$\models \bigwedge s_1 \wedge \bigwedge \{c_i \equiv t_i : i \in I_{1,2}\} \to \theta. \tag{7.17}$$

因为$\{c_i \equiv t_i : i \in I_{2,1}\} \subseteq s_1$，所以据(7.17)，有

$$\models \bigwedge s_1 \to [\bigwedge \{c_i \equiv t_i : i \in I_{2,1}\} \wedge (\bigwedge \{c_i \equiv t_i : i \in I_{1,2}\} \to \theta)].$$

类似地我们有

$$\models \bigwedge s_2 \to [\bigwedge \{c_i \equiv t_i : i \in I_{1,2}\} \wedge (\bigwedge \{c_i \equiv t_i : i \in I_{2,1}\} \to \neg\theta)].$$

因此据重言式 $\varphi \wedge (\psi \to \neg\theta) \to \neg[\psi \wedge (\varphi \to \theta)]$，有

$$\models \bigwedge s_2 \to \neg[\bigwedge \{c_i \equiv t_i : i \in I_{2,1}\} \wedge (\bigwedge \{c_i \equiv t_i : i \in I_{1,2}\} \to \theta)].$$

令

$$\theta_1 = \bigwedge \{c_i \equiv t_i : i \in I_{2,1}\} \wedge [\bigwedge \{c_i \equiv t_i : i \in I_{1,2}\} \to \theta]$$

则我们有$\models \bigwedge s_1 \to \theta_1$，$\models \bigwedge s_2 \to \neg\theta_1$. 因为在 θ_1 中出现但有可能不在 θ 中出现的 $\mathscr{L}_{\infty}$的符号只有函数符号或个体常元符号，所以 $\theta_1 \in X_\varphi \cap X_\psi$，但这与 $s \in \mathbf{S}$ 矛盾.

(3) 假设$\{t_i : i \in I\}$是 $\mathscr{L}_{\infty}$相对 C 的、幂$<\kappa$的基本项集. 我们令$\{e_i : i \in I\} \subseteq C$ 是不在 s 和$\{t_i : i \in I\}$中出现的$|I|$个互不相同的元素的集合，显然，每一 $e_i \equiv t_i$ 是 X_φ 和 X_ψ 的元素. 令

$$s_1^1 = s_1, \quad s_2^1 = s_2 \cup \{e_i \equiv t_i : i \in I\}.$$

假设 $s^1 = s_1^1 \cup s_2^1 \notin \mathbf{S}$，则存在 $\theta \in X_\varphi \cap X_\psi$ 使得

$$\models \bigwedge s_1^1 \to \theta, \quad \models \bigwedge s_2 \wedge \bigwedge \{e_i \equiv t_i : i \in I\} \to \neg\theta.$$

若(C6)的验证那样，用新个体变元代换、量化和约束变元变换，有

$$\models \bigwedge s_1 \to \forall \{x_i : i \in I\} \theta(e_i/x_i : i \in I). \tag{7.18}$$

$$\models \bigwedge s_2 \wedge \exists \{x_i : i \in I\} \bigwedge \{x_i \equiv t_i : i \in I\} \to \exists \{x_i : i \in I\} \neg\theta(e_i/x_i : i \in I). \tag{7.19}$$

据公理 4 和 2.2.7(2)(a)的有效性，有

$$\models \bigwedge\{e_i \equiv t_i : i \in I\} \to \bigwedge\{\exists x_i(x_i \equiv t_i) : i \in I\}. \quad (7.20)$$

而据 4.4.1(2)，独立选择公理 $BH_{|I|}$是有效的，所以

$$\models \bigwedge\{\exists x_i(e_i \equiv t_i) : i \in I\} \to \exists\{x_i : i \in I\} \bigwedge\{x_i \equiv t_i : i \in I\}. \quad (7.21)$$

因为$|I| < \kappa = \mathrm{cf}(\kappa)$，所以上述有效式是$\mathscr{L}_{2^{>\kappa},\kappa}$的公式. 又因为$\{e_i \equiv t_i : i \in I\} \subseteq s_2$，所以$\models \bigwedge s_2 \to \bigwedge\{e_i \equiv t_i : i \in I\}$，因此据(7.20)和(7.21)，有$\models \bigwedge s_2 \to \exists\{x_i : i \in I\} \bigwedge\{x_i \equiv t_i : i \in I\}$，再据(7.19)，有

$$\models \bigwedge s_2 \to \exists\{x_i : i \in I\} \neg\theta(e_i/x_i : i \in I),$$

而据(7.18)，这与$s \in \mathbf{S}$矛盾.

这样，我们证明了 $\mathbf{S}$ 是(κ,ω)-一致性质，所以 $\mathbf{S}$ 的每一元素有模型. 因为$\models \varphi \to \psi$，所以$\{\varphi, \neg\psi\}$没有模型，因此$\{\varphi, \neg\psi\} \notin \mathbf{S}$. 由于$\varphi \in X_\varphi$，$\neg\psi \in X_\psi$，因此存在$\theta \in X_\varphi \cap X_\psi$使得

$$\models \varphi \to \theta, \quad \models \neg\psi \to \neg\theta.$$

对 θ 中出现的 C 的个体常元进行量化，如 7.1.1 的证明的结尾那样，我们就得到$\mathscr{L}_{2^{>\kappa},\kappa}$的一个公式使之满足本定理的结论. □

7.1.4 推论 令 $\varphi(\vec{x}_n)$，$\psi(\vec{x}_n)$是$\mathscr{L}_{\infty\omega}$的公式且$\models \varphi \to \psi$，则存在一内插公式$\theta(\vec{x}_n)$满足 7.1.3 的结论. □

7.1.5 定义 给定语言$\mathscr{L}$，$\mathscr{L}'$使得$\mathscr{L} \subseteq \mathscr{L}'$且$\mathrm{Form}(\mathscr{L}) \subseteq \mathrm{Form}(\mathscr{L}')$. 我们称$\mathscr{L}$相对$\mathscr{L}'$有 **Craig-内插性质**，记作

$$\mathrm{Interp}_c(\mathscr{L}, \mathscr{L}'),$$

$\Leftrightarrow$ 对$\mathscr{L}$中每一对句子φ，ψ使得$\mathscr{L} \models \varphi \to \psi$(即$\varphi \to \psi$相对所有$\mathscr{L}$-模型的类有效，余类推)，存在$\mathscr{L}'$-句子$\theta$使得

(1) $\mathscr{L}' \models \varphi \to \theta$，$\mathscr{L}' \models \theta \to \psi$，

(2) $\mathrm{Sm}(\theta) \subseteq \mathrm{Sm}(\varphi) \cap \mathrm{Sm}(\psi)$.

说明：上述 θ 也称为 φ 和 ψ 的 **Craig-内插句**. 据 7.1.5，有穷模型论中的 Craig-内插定理就是$\mathrm{Interp}_c(\mathscr{L}_{\omega\omega}, \mathscr{L}_{\omega\omega})$. López-Escobar 在 1965 年证明了$\mathrm{Interp}_c(\mathscr{L}_{\omega_1\omega}, \mathscr{L}_{\omega_1\omega})$. Malitz 在其[1966]证明了 κ 是正则基数时的$\mathrm{Interp}_c(\mathscr{L}_{\kappa\omega}, \mathscr{L}_{(2^{<\kappa})^+,\kappa})$. H. Friedman 在其[1971]

证明了另一结果：

$$\mathrm{cf}(\kappa)=\omega \Rightarrow \mathrm{Interp}_c(\mathscr{L}_{\kappa^+\omega},\mathscr{L}_{(2^{<\kappa})^+,\kappa}).$$

同样结果由 Chang 在其[1971b]中独立得到的. 因此若 κ 是共尾度为 ω 的强极限基数，则 $\mathrm{Interp}_c(\mathscr{L}_{\kappa^+\omega},\mathscr{L}_{\kappa^+\kappa})$.

注意：Malitz 在其[1966]所得到的内插句是 $\mathscr{L}_{(2^{<\kappa})^+,\kappa}$的公式. 因为 $2^{>\kappa}\leqslant(2^{<\kappa})^+$，所以只有当 $2^{>\kappa}=(2^{<\kappa})^+$（即存在一 λ 使得对所有 $\lambda_1,\lambda<\lambda_1<\kappa \Rightarrow 2^{\lambda}=2^{\lambda_1}$），定理 7.1.3 才等价 Malitz 的[1966]中的相应定理. 但 Malitz 实际上已经证明了内插句是 $\mathscr{L}_{2^{>\kappa},\kappa}$的公式，因为当 κ 是正则基数时，若 $|I|<\kappa$ 且对所有 $i\in I,\lambda_i<\kappa$，虽然 $\left|\prod_{i\in I}\lambda_i\right|\leqslant 2^{<\kappa}$，但我们仍有 $\left|\prod_{i\in I}\lambda_i\right|<2^{>\kappa}$.

下面我们举一个 Craig-内插定理对某类语言不成立的反例.

7.1.6 反例（Malitz，[1971]） 若 $\kappa>\omega_1$，则 $\mathrm{Interp}_c(\mathscr{L}_{\kappa\omega},\mathscr{L}_{\kappa\omega})$ 不成立；若 $\kappa,\lambda\in\mathbf{CN}_\mathrm{I}$ 且 $\kappa>\lambda^+$，则 $\mathrm{Interp}_c(\mathscr{L}_{\infty\omega},\mathscr{L}_{\infty\lambda})$不成立.

证明：对每一序数 $\alpha<\lambda^+$，令 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$有一个体常元 c_α；令

$$\varphi=\forall x\bigvee\{x\equiv c_\alpha:\alpha<\lambda\},\quad \psi=\bigvee\{c_\beta\equiv c_\gamma:\lambda\leqslant\beta<\gamma<\lambda^+\},$$

假设 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$的任意结构使得 $\mathfrak{A}\models\varphi$. 易见 $|A|\leqslant\lambda$. 令

$$X_\alpha=\{\beta:\lambda<\beta<\lambda^+\text{且 } c_\beta^{\mathfrak{A}}=c_\alpha^{\mathfrak{A}}\}.$$

我们有 $\bigcup\{X_\alpha:\alpha<\lambda\}=[\lambda,\lambda^+)$，因此存在 $\alpha<\lambda$ 使得 $|X_\alpha|>\lambda$，而这蕴涵 $\mathfrak{A}\models\psi$，所以 $\mathscr{L}_{\infty\omega}\models\varphi\to\psi$.

若 θ 是相对 φ,ψ 的 $\mathscr{L}_{\infty\lambda}$-内插句，则 θ 不含非逻辑符号. 因为 $\mathscr{L}_{\infty\omega}\models\varphi\to\psi$，所以 θ 在某个基数为 λ 的结构中成立. 据 1.3.10，θ 在所有幂 $\geqslant\lambda$ 的结构中成立. 因为 $\mathscr{L}_{\infty\omega}\models\theta\to\psi$，所以 ψ 有相同的性质；但这是一个矛盾，因为 ψ 在某个幂为 λ^+ 的结构中不成立（例如，它在模型 $\langle[\lambda,\lambda^+),\alpha\rangle_{\lambda\leqslant\alpha<\lambda^+}$ 中就不成立）. □

三、$\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的情况

7.1.7 Craig-内插定理（Barwise，[1969a]） 令 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$的

可数可容片段，φ，ψ 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 中的句子使得 $\models\varphi\rightarrow\psi$，则存在 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 中的句子 θ 使得

$$\models\varphi\rightarrow\theta,\quad \models\theta\rightarrow\psi,\quad \mathrm{Sm}(\theta)\subseteq\mathrm{Sm}(\varphi)\cap\mathrm{Sm}(\psi).$$

证明：令 $\mathscr{L}_1=\mathrm{Sm}(\varphi)$，$\mathscr{L}_2=\mathrm{Sm}(\psi)$，$C$ 是可数新个体常元集使得 C 能编码为 $\mathfrak{M}$ 的 Δ-子集，$\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}(C)$是用 C 中有穷个个体常元对 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的公式的自由代换特例的集合（见 4.3.1）. 类似地定义 $(\mathscr{L}_1)_{\mathfrak{M}}(C)$和$(\mathscr{L}_2)_{\mathfrak{M}}(C)$.

定义 **S** 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}(C)$的所有有穷集 s 的集合使 $s=s_1\cup s_2$满足：

(1) s_1 是$(\mathscr{L}_1)_{\mathfrak{M}}(C)$的句子集，$s_2$ 是$(\mathscr{L}_2)_{\mathfrak{M}}(C)$的句子集，

(2) 若 $\theta_1,\theta_2\in(\mathscr{L}_1)_{\mathfrak{M}}(C)\cap(\mathscr{L}_2)_{\mathfrak{M}}(C)$，$s_1\models\theta_1$ 且 $s_2\models\theta_2$，则

$\theta_1\wedge\theta_2$ 有模型.

我们断定 **S** 是 4.3.2 定义的$(\infty,\omega)_{\mathfrak{M}}$-一致性质. 下面我们只验证非平凡情况(C4).

(C4)：假设 $\bigvee\Phi\in s$. 先假设 $\bigvee\Phi\in s_1$，我们要证对某个 $\sigma\in\Phi$，$s_1\cup\{\sigma\}\cup s_2\in\mathbf{S}$. 假设相反，则对每一 $\sigma\in\Phi$，存在 θ_1,θ_2 使得

$$\left.\begin{array}{l}\models\bigwedge s_1\wedge\sigma\rightarrow\theta_1,\models\bigwedge s_2\rightarrow\theta_2,\ \theta_1\wedge\theta_2\ \text{没有模型},\\ \text{且在}\ \theta_1\ \text{和}\ \theta_2\ \text{中出现的}\ C\ \text{的个体常元在}\ s_1\cup s_2\ \text{中}.\end{array}\right\}\qquad(7.22)$$

假设存在函数 $f,g\in\mathfrak{M}$，$\mathrm{Dom}(f)=\mathrm{Dom}(g)=\Phi$ 使得对每一 $\sigma\in\Phi$，$\langle f(\sigma),g(\sigma)\rangle$是满足(7.22)的$\langle\theta_1,\theta_2\rangle$，则我们可以令

$$\theta_1'=\bigvee\{f(\sigma):\sigma\in\Phi\},\quad \theta_2'=\bigwedge\{g(\sigma):\sigma\in\Phi\}.$$

据 Σ-置换原则 0.2.8，θ_1'，$\theta_2'\in\mathfrak{M}$ 使得它们都是$(\mathscr{L}_1)_{\mathfrak{M}}(C)$和$(\mathscr{L}_2)_{\mathfrak{M}}(C)$的句子，因此

$$s_1\models\theta_1',\quad s_2\models\theta_2',\quad \theta_1'\wedge\theta_2'\ \text{没有模型}.$$

而这与 $s_1\cup s_2\in\mathbf{S}$ 矛盾. 所以现在剩下只须构造上述函数 f,g.

据 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}(C)$-Barwise-完全性定理 4.3.11，(7.22)可以用一个 Σ_1-公式来表述. 根据 Σ-强置换定理 0.2.9，存在函数 $h\in\mathfrak{M}$，$\mathrm{Dom}(h)=\Phi$，使得对每一 $\sigma\in\Phi$，$h(\sigma)$是满足(7.22)的诸序对$\langle\theta_1,\theta_2\rangle$构成的非空集. 我们定义 f,g 如下：

$f(\sigma)=\bigwedge\{1^{st}(h(\sigma));\sigma\in\Phi\}$, $g(\sigma)=\bigwedge\{2^{nd}(h(\sigma));\sigma\in\Phi\}$.
所以 $f, g\in\mathfrak{M}$ 且 $\theta_1=f(\sigma)$, $\theta_2=g(\sigma)$ 也满足(7.22).

$\bigvee\Phi\in s_2$ 也类似可证. 从而证明 $\mathbf{S}$ 满足(C4).

验证 $\mathbf{S}$ 满足其它情况如 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 的情况.

这样,我们就证明了 $\mathbf{S}$ 是 $(\infty,\omega)_{\mathfrak{M}}$-一致性质.

显然, $\{\varphi,\neg\psi\}\notin\mathbf{S}$, 量化 $\theta(\vec{c}_n)$ (θ 等于上述记法中的 θ_1)的有穷个新个体常元符号,我们有 $\models\varphi\to\forall\vec{v}_n\theta(\vec{v}_n)$, $\models\forall\vec{v}_n\theta(\vec{v}_n)\to\psi$. □

7.1.8 定理 令 $\mathfrak{M}$ 是可容集使得 $\mathfrak{M}$ 含有一个不可数元素且 $o(\mathfrak{M})>\omega$, 则 $\mathrm{Interp}_c(\mathscr{L}_{\mathfrak{M}},\mathscr{L}_{\mathfrak{M}})$ 不成立.

证明:令 $\varphi(<)$ 在同构意义上刻画了 $\langle\omega,<\rangle$, 令

$$\psi=\bigwedge\{c_x\neq c_y: x,y\in a, x\neq y\},$$

其中 $a\in\mathfrak{M}$ 是不可数的(*在此只需 ψ 只有不可数模型且 $\mathrm{Sm}(\psi)\cap\mathrm{Sm}(\varphi)=\varnothing$*). 则 $\varphi,\psi\in\mathfrak{M}$ 且 $\models\varphi\to\neg\psi$. 若 $\mathrm{Interp}_c(\mathscr{L}_{\mathfrak{M}},\mathscr{L}_{\mathfrak{M}})$ 成立,则存在只含等词符号的句子 θ 使得 $\models\varphi\to\theta$ 且 $\models\psi\to\neg\theta$. 因此 θ 在所有可数无穷结构中真,因为这样的结构总能转化为 θ 的模型. 同理, $\neg\theta$ 在所有幂 $\geqslant|a|$ 的结构中真,但这与下列命题矛盾:

只含等词的 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$-句子 φ 或在所有无穷结构中真或不在任何这样的结构中真.

这个命题的验证显然:令 $\mathfrak{A}=\langle A,=\rangle$, $\mathfrak{B}=\langle B,=\rangle$ 都是无穷结构. 令 $\mathbf{I}$ 是所有从 $A_0\subseteq A$ 到 $B_0\subseteq B$ 上的有穷单射的集合,则 $\mathbf{I}:\mathfrak{A}\cong_p\mathfrak{B}$ (*其中 $\cong_p$ 是部分同构,其定义和由此得到的结论请见下册有关章节*),所以 $\mathfrak{A}\equiv_{\infty\omega}\mathfrak{B}$, 因此 $\mathfrak{A}\models\theta\Leftrightarrow\mathfrak{B}\models\theta$. □

对 Craig-内插定理还有许多概括和变形. 请见 Makkai 的[1977]和 R. Ferro 的[1981].

练 习

7.1.9 补充当 κ 是共尾度为 ω 的奇异基数时 7.1.3 的证明.

7.1.10 (1)(一种 Robinson-弱一致性定理) 令 $\mathscr{L}'$, $\mathscr{L}''$ 是

$\mathscr{L}$ 的膨胀语言使得 $\mathscr{L}'\cap\mathscr{L}''=\mathscr{L}$. 令 T 是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的可数完全理论(参见 1.1.15—16),$\varphi$ 是 $\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$-句子,$\psi$ 是 $\mathscr{L}''_{\omega_1\omega}$-句子. 若 $T\cup\{\varphi\}$和 $T\cup\{\psi\}$分别有模型,则 $T\cup\{\varphi,\psi\}$有模型.

(**注意**:在 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$ 中 Craig-内插定理和 Robinson-定理是可互推的,但 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$没有 Robinson-定理,这说明后者比前者更强;7.1.10 就是一种弱形式.)

(2) 证明若(1)中的 T 是不可数的,则(1)的结论不必然成立.

7.1.11 证明:

(1) 若 κ 是任意无穷基数,则 $\text{Interp}_c(\mathscr{L}_{\kappa^+\omega},\mathscr{L}_{(2^\kappa)^+,\kappa})$.

(2) 若 κ 是强不可达基数,则 $\text{Interp}_c(\mathscr{L}_{\kappa\omega},\mathscr{L}_{\kappa\kappa})$.

(3) 若 κ 是共尾度为 ω 的强极限基数,则

$$\text{Interp}_c(\mathscr{L}_{\kappa^+\omega},\mathscr{L}_{\kappa^+\kappa}).$$

§2 Lyndon-内插定理

据定义 1.3.5,称一个符号在公式 φ 中的一次出现为正出现 $\Leftrightarrow$ 它在 φ 的偶数个否定号的辖域中,否则称其为负出现.

一、$\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的情况

7.2.1 Lyndon-内插定理(López-Escobar,[1965]) 令 φ,ψ 是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的句子使得 $\vdash\varphi\rightarrow\psi$,则存在 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的句子 θ 使得

(1) $\vdash\varphi\rightarrow\theta$, $\vdash\theta\rightarrow\psi$,且

(2) 在 θ 中正(负)出现的关系符号也在 φ 和 ψ 中正(负)出现.

证明:令 $\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}=\mathscr{L}_{\omega_1\omega}\cup C$ 如通常规定. 对任意 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$-句子 σ,令

$$X_\sigma=\{\sigma'\in\text{Sent}(\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}):\sigma'\text{ 只含有穷多个 }c\in C\text{ 且在 }\sigma'\text{ 中正(负)出现的每一关系符号也在 }\sigma\text{ 中正(负)出现}\},$$

令 $\mathbf{S}$ 是 $\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$ 的所有有穷句子集 s 的集合使得 $s=s_1\cup s_2\subseteq X_\varphi\cup X_{\neg\phi}$ 且满足下列条件：

① $s_1\subseteq X_\varphi$，$s_2\subseteq X_{\neg\phi}$，

② 若 $\theta_1\in X_\varphi\cap X_\psi$，$\theta_2\in X_{\neg\varphi}\cap X_{\neg\phi}$ 且 $\models\bigwedge s_1\to\theta_1$，$\models\bigwedge s_2\to\theta_2$，则 $\theta_1\wedge\theta_2$ 有模型.

下面我们来证明 $\mathbf{S}$ 是 (ω_1,ω)-一致性质，其证明类似对 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 的 Craig-内插定理(7.1.1)的证明. 作为说明，我们在此验证(C1)和(C7)(2). 这两步的关键是 $\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$ 的所有等词句(形如 $t_1\equiv t_2$ 的句子)都属于 X_φ，X_ϕ，$X_{\neg\varphi}$，$X_{\neg\phi}$. 令任意 $s=s_1\cup s_2\in\mathbf{S}$.

(C1)：假设 $\{\sigma,\neg\sigma\}\subseteq s$. 若 $\sigma\in s_1$，$\neg\sigma\in s_2$，则 $\sigma\in X_\varphi\cap X_\phi$，$\neg\sigma\in X_{\neg\varphi}\cap X_{\neg\phi}$. 令 $\theta_1=\sigma$，$\theta_2=\neg\sigma$，则 $\theta_1\wedge\theta_2$ 没有模型，与②矛盾.

若 $\neg\sigma\in s_1$，$\sigma\in s_2$ 也类似可证.

若 $\sigma,\neg\sigma\in s_1$，则令 $\theta_1=\neg(c\equiv c)$，$\theta_2=c\equiv c$. ②仍不成立.

若 $\sigma,\neg\sigma\in s_2$，也同样可证.

(C7)(2)：假设 t 是基本项，$c\in C$，且 $c\equiv t$，$\sigma(t)\in s$. 我们来证，$s^1\in\mathbf{S}$，其中 $s_1^1=s_1\cup\{\sigma(t/c)\}$，$s_2^1=s_2$.

先假设 $c\equiv t$，$\sigma(t)\in s_1$. 因为 $s_1\subseteq X_\varphi$，所以 $\sigma(t/c)\in X_\varphi$，因此 $s_1^1\subseteq X_\varphi$，$s_2^1\subseteq X_{\neg\phi}$. 若 $s^1\notin\mathbf{S}$，则存在 $\theta_1\in X_\varphi\cap X_\phi$，$\theta_2\in X_{\neg\varphi}\cap X_{\neg\phi}$ 使得

$$\models\bigwedge s_1\wedge\sigma(t/c)\to\theta_1,\quad \models\bigwedge s_2\to\theta_2,$$

且 $\theta_1\wedge\theta_2$ 没有模型. 因此据公理 6 的有效性，有

$$\models\bigwedge s_1\to\theta_1,\quad \models\bigwedge s_2\to\theta_2.$$

因为 $s\in\mathbf{S}$，所以 $\theta_1\wedge\theta_2$ 有模型，矛盾.

若 $c\equiv t$，$\sigma(t)\in s_2$ 的情况也类似可证.

假设 $\sigma(t)\in s_1$，$c\equiv t\in s_2$，据公理 6 的有效性，

$$\models\bigwedge s_1\to(c\equiv t\to\sigma(t/c)),\quad 其中\ \sigma(t/c)\in X_\varphi.$$

令 $s_1^1=s_1\cup\{\sigma(t/c)\}$，$s_2^1=s_2$. 若 $s^1\notin\mathbf{S}$，则存在 $\theta_1\in X_\varphi\cap X_\phi$，$\theta_2\in X_{\neg\varphi}\cap X_{\neg\phi}$ 使得 $\models\bigwedge s_1\to(c\equiv t\to\theta_1)$，$\models\bigwedge s_2\to(c\equiv t\wedge\theta_2)$，且 $\theta_1\wedge\theta_2$ 没有模型. 因为 $s\in\mathbf{S}$，所以 s 满足条件②，因此 $(c\equiv t\to\theta_1)\wedge(c\equiv t\wedge\theta_2)$

有模型，由此可得 $\theta_1 \wedge \theta_2$ 有模型，矛盾.

若 $c \equiv t \in s_1, \sigma(t) \in s_2$ 的情况也类似可证.

注意：(C2)—(C6)的验证依赖下列事实：

若一关系符号在 φ 中正(负)出现且 $\sigma \in \Sigma$，则该关系符号也在公式$((\neg\sigma)\neg)$，$\bigwedge\Sigma$，$\bigvee\Sigma$，$\forall x\sigma$，$\exists x\sigma$ 中正(负)出现.

这样我们证明了 **S** 是(ω_1, ω)-一致性质，据 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的模型存在定理(4.1.5)，每一 $s \in$ **S** 有模型，因此 $\{\varphi, \neg\psi\} \notin$ **S**. 所以存在句子 $\theta_1(\vec{c}_n) \in X_\varphi \cap X_\psi, \theta_2(\vec{c}_n) \in X_{\neg\varphi} \cap X_{\neg\psi}$使得

$$\models \varphi \to \theta_1, \quad \models \neg\psi \to \theta_2, \quad \theta_1 \wedge \theta_2 \text{ 没有模型}.$$

据后者，有 $\models \theta_1 \to \neg\theta_2$. 这样我们就得到内插句 $\theta = \forall \vec{x}_n \theta_1(\vec{c}_n / \vec{x}_n)$满足我们要证的结论. □

7.2.2 Lyndon-无等词内插定理(Lōpez-Escobar，[1965])

设 $\mathscr{L}$ 没有函数和个体常元符号，φ, ψ 是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$-句子使得等词符号不在 φ, ψ 中出现，且 $\models \varphi \to \psi$，$\not\models \neg\varphi$，$\not\models \psi$. 则存在 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$-句子 θ 使得$\equiv$不在 θ 中出现且 θ 有 7.2.1 的性质(1)—(2).

证明：对 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的任意句子 σ，令 X_σ 如 7.2.1 证明所规定，令 $Y_\sigma = \{\theta \in X_\sigma : \equiv \text{不在 } \theta \text{ 中出现}\}$，且令 **S** 是 $\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$的所有有穷句子集 s 的集合使得 $s = s_1 \cup s_2 \subseteq Y_\varphi \cup Y_{\neg\psi}$且满足下列条件：

① $s_1 \subseteq Y_\varphi$ 有模型，$s_2 \subseteq Y_{\neg\psi}$有模型，且

② 若 $\theta_1 \in Y_\varphi \cap Y_\psi, \theta_2 \in Y_{\neg\varphi} \cap Y_{\neg\psi}$且 $\models \bigwedge s_1 \to \theta_1$，$\models \bigwedge s_2 \to \theta_2$，则 $\theta_1 \wedge \theta_2$ 有模型.

易证 **S** 是(ω_1, ω)-一致性质：因为 s_1 和 s_2 都有模型，所以对任意 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$-句子 σ，不可能有 $\sigma, \neg\sigma \in s_j$，其中 $j = 1, 2$. (C1)的其它情况和(C2)—(C6)的验证类似 7.2.1 证明中相应部分的验证.

这样，我们看到除了等词规则(C7)之外，**S** 满足(ω_1, ω)-一致性质的(C1)—(C6)，而且 **S** 中没有一个元素包含等词符号. 据 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的无等词的模型存在定理(4.1.13)，每一 $s \in$ **S** 有模型. 因为 $\{\varphi, \neg\psi\}$没有模型，所以$\{\varphi, \neg\psi\} \notin$ **S**. 但据假设 φ 和$\neg\psi$ 都有模

型，所以如 7.2.1 所证，存在 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的句子 θ 使得$\equiv$不在 θ 中出现且 θ 有我们要求的性质(1)和(2). □

二、$\mathscr{L}_{\kappa\omega}$的情况

7.2.3 Lyndon-内插定理(Malitz,[1966]) 令 φ,ψ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$的句子使得$\models\varphi\to\psi$. 若 κ 是正则基数或是共尾度为 ω 的奇异基数，则存在 $\mathscr{L}_{2^{>\kappa},\kappa}$的句子 θ 使得

(1) $\models\varphi\to\theta$, $\models\theta\to\psi$, 且

(2) 在 θ 中正(负)出现的关系符号也在 φ 和 ψ 中正(负)出现.

证明:对 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$的任意句子 σ，令

$X_\sigma=\{\sigma'\in\mathrm{Sent}(\mathscr{L}'_{2^{>\kappa},\kappa})$:$\sigma'$ 中只有$<\kappa$ 个 $c\in C$ 且在 σ' 中正(负)出现的每一关系符号也在 σ 中正(负)出现$\}$,

令 S 是 $\mathscr{L}'_{\kappa\omega}$的所有幂$<\kappa$ 的句子集 s 的集合使得 $s=s_1\cup s_2$ 且满足下列条件:

① $s_1\subseteq X_\varphi$, $s_2\subseteq X_{\neg\psi}$,

② 若 $\theta_1\in X_\varphi\cap X_\psi$, $\theta_2\in X_{\neg\varphi}\cap X_{\neg\psi}$且$\models\bigwedge s_1\to\theta_1$, $\models\bigwedge s_2\to\theta_2$, 则 $\theta_1\wedge\theta_2$ 有模型.

证明 S 是(κ,ω)-一致性质的方法基本上相同于 7.1.3 和 7.2.1 的证明，我们把具体的验证留给读者作为练习. □

7.2.4 Lyndon-无等词内插定理 假设 $\mathscr{L}$ 没有函数和个体常元符号，φ,ψ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$的句子使得等词$\equiv$不在 φ,ψ 中出现，$\models\varphi\to\psi$，且 φ，$\neg\psi$ 都有模型. 若 κ 是正则基数或共尾度为 ω 的奇异基数，则存在 $\mathscr{L}_{2^{>\kappa},\kappa}$的句子 θ 使得$\equiv$不在 θ 中出现且 θ 有定理 7.2.3 的性质(1)—(2).

证明:本证明类似 7.2.2 的证明. □

同样，我们也有 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$ 的 Lyndon-内插定理，其证明也类似上述定理的证明，因此这里就不一一赘述. 下面我们举一个关于 Lyndon-内插定理的反例说明 7.2.1 的某些限制条件不能概括:

7.2.5 反例 令 $\varphi = \exists x(c \equiv x \wedge \neg R(x))$，$\psi = \neg R(x/c)$. 若我们还要求在 7.2.1 中增加下列条件：

(3) 在 θ 中正（负）出现的每一个体常元和函数符号在 φ 和 ψ 中都正（负）出现，

则 $$\models \exists x(c \equiv x \wedge \neg R(x)) \to \neg R(x/c)$$
说明 7.2.1 对增加条件(3)不成立，因为 c 在 $\exists x(c \equiv x \wedge \neg R(x))$ 中是正出现，但在 $\neg R(x/c)$ 中却是负出现.

练　习

7.2.6 补充上述定理证明中省略的细节.

7.2.7 表述和证明 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的 Lyndon-内插定理.

§3 Malitz-内插定理

我们称公式 φ 是全称公式 $\Leftrightarrow$ $\forall$ 在 φ 中的每一出现是正的，$\exists$ 在 φ 中的每一出现是负的. 我们称公式 φ 是存在公式 $\Leftrightarrow$ $\exists$ 在 φ 中的每一出现是正的，$\forall$ 在 φ 中每一出现是负的（参见 1.3.9）.

一、$\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 的情况

7.3.1 Malitz-内插定理 令 $\mathscr{L}$ 没有函数符号，φ，ψ 是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 的句子使得 $\vdash \varphi \to \psi$，

(1)(Malitz，[1969]). 若 ψ 是全称的，则存在 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 的全称句 θ 使得① $\vdash \varphi \to \theta$，$\vdash \theta \to \psi$，且② $\mathrm{Sm}(\theta) \subseteq \mathrm{Sm}(\varphi) \cap \mathrm{Sm}(\psi)$.

(2)(Malitz，Barwise) 若 φ 是全称的且 $\mathscr{L}$ 只有关系符号，则存在 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 的全称句 θ 使得 θ 满足上述①—②.

证明：在此我们只证(1)，而把(2)的证明留给读者作为练习.

不妨设 ψ 不含量词，因为 ψ 中的约束变元可以用新个体常元

来置换从而得到一个新句子 ψ_1. 施归纳于 ψ_1 的复杂度，易证：

$$\models\varphi\to\psi\Rightarrow\models\varphi\to\psi_1,\quad \models\theta\to\psi_1\Rightarrow\models\theta\to\psi.$$

因此若我们得到 φ 和 ψ_1 之间的内插句，则这个内插句就是 φ 和 ψ 之间的内插句.

令 $\mathbf{S}$ 是 $\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$ 的所有有穷句子集 s 的集合使得：

(a) 只有有穷多个 $c\in C$ 在 s 中出现，

(b) s 可以写作 $s_1\cup s_2$ 的形式且 s_2 是无量词公式集，

(c) s_1 和 s_2 都有模型，

(d) 不存在 $\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$-全称句 θ 使得 $\models\bigwedge s_1\to\theta$，$\models\bigwedge s_2\to\neg\theta$，且

$$\mathrm{Sm}'(\theta)\subseteq\mathrm{Sm}'(s_1)\cap\mathrm{Sm}'(s_2).$$

($\mathrm{Sm}'(\varphi)$ 和 $\mathrm{Sm}'(X)$ 表示 φ 和 X 所含的 $\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$ 的非逻辑符号，下同.)

易证 $\mathbf{S}$ 是 (ω_1,ω)-一致性质. 令 $s=s_1\cup s_2\in\mathbf{S}$. 作为说明，我们来验证 s 满足 4.1.2 的(C5)和(C7)(2)—(3)，其余留给读者.

(C5)：假设 $\forall x\sigma(x)\in s$. 我们来证，对所有 $c\in C$，$s\cup\{\sigma(x/c)\}\in\mathbf{S}$. 因为 s_2 是无量词的，所以 $\forall x\sigma(x)\in s_1$. 令

$$s_1^1=s_1\cup\{\sigma(x/c)\},\quad s_2^1=s_2,\quad s^1=s\cup\{\sigma(x/c)\}.$$

显然，s^1 满足上述(a)—(c). 下证 s^1 满足(d).

情况 1 c 在 s_1 和 s_2 中都出现：假设 s^1 不满足(d)，则存在 $\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$ 的全称句 θ 使得

$$\models\bigwedge s_1\wedge\sigma(x/c)\to\theta,\quad \models\bigwedge s_2\to\neg\theta,$$

且 $\mathrm{Sm}'(\theta)\subseteq\mathrm{Sm}'(s_1\cup\{\sigma(x/c)\})\cap\mathrm{Sm}'(s_2)$. 据公理 4 的有效性，有

$$\models\bigwedge s_1\wedge\forall x\sigma(x)\to\theta,$$

所以 $\models\bigwedge s_1\to\theta$. 因为 c 在 s_1 和 s_2 中都出现，所以有 $\mathrm{Sm}'(\theta)\subseteq\mathrm{Sm}'(s_1)\cap\mathrm{Sm}'(s_2)$. 而这与 $s\in\mathbf{S}$ 矛盾.

情况 2 c 不在 s_2 中都出现：据情况 1 相同的证明仍有 $s^1\in\mathbf{S}$，因为这时 c 也不在 θ 中出现.

情况 3　设 c 在 s_2 中出现但不在 s_1 中出现：设 s^1 不满足(d)，则存在 $\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$ 的全称句 θ 使得

$$\models \bigwedge s_1 \wedge \sigma(x/c) \to \theta(c), \quad \models \bigwedge s_2 \to \neg\theta(c),$$

且 $\mathrm{Sm}'(\theta(c)) \subseteq \mathrm{Sm}'(s_1 \cup \{\sigma(x/c)\}) \cap \mathrm{Sm}'(s_2)$. 因为 c 不在 s_1 中出现，所以 $\models \bigwedge s_1 \to \forall x(\sigma(x) \to \theta(c))$，因此 $\models \bigwedge s_1 \to \forall x\theta(x)$. 据公理 4 的有效性，我们又有 $\models \bigwedge s_2 \to \neg\forall x\theta(x)$. 因为 $\forall x\theta(x)$ 中没有 c，所以 $\mathrm{Sm}'(\forall x\theta(x)) \subseteq \mathrm{Sm}'(s_1) \cap \mathrm{Sm}'(s_2)$，因此 $s \notin \mathbf{S}$，矛盾.

(C7)(2)：假设 $d \equiv t, \sigma(t) \in s$，其中 $d \in C$ 且 t 是基本项($\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 没有函数符号，所以 t 也是个体常元). 下证 $s \cup \{\sigma(t/c)\} \in \mathbf{S}$.

情况 1　$\sigma(t), d \equiv t \in s_1$：据公理 6，有 $\models \bigwedge s_1 \to \sigma(t/d)$. 令 $s_1^1 = s_1 \cup \{\sigma(t/d)\}, s_2^1 = s_2$. 则显然 $s \cup \{\sigma(t/d)\}$ 满足条件(a)—(d)，因此 $s \cup \{\sigma(t/d)\} \in \mathbf{S}$. 当 $\sigma(t), d \equiv t \in s_2$ 时也类似可证.

情况 2　$\sigma(t) \in s_1, d \equiv t \in s_2, d$ 在 s_1 中出现：我们令 $s_1^1 = s_1 \cup \{\sigma(t/d)\}, s_2^1 = s_2$. 假设 $s^1 \notin \mathbf{S}$. 显然 s^1 满足条件(a)—(b). 若 s^1 不满足条件(c)，则 $s_1 \cup \{\sigma(t/d)\}$ 没有模型，因此 $\models \bigwedge s_1 \to \neg\sigma(t/d)$. 因为 $\sigma(t) \in s_1$，所以 $\models \bigwedge s_1 \to \sigma(t)$，因此 $\models \bigwedge s_1 \to \sigma(t) \wedge \neg\sigma(t/d)$. 据公理 6 的有效性，$\models \bigwedge s_1 \to \neg(d \equiv t)$. 另一方面，因为 $d \equiv t \in s_2$，所以 $\models \bigwedge s_2 \to \neg\neg(d \equiv t)$. 因为在 $\neg(d \equiv t)$ 中出现的个体常元符号在 s_1 和 s_2 中都出现，所以 $s \notin \mathbf{S}$，矛盾.

若 s^1 不满足(d)，则存在 $\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$ 的全称句 θ 使得

$$\models \bigwedge s_1 \wedge \sigma(t/d) \to \theta, \quad \models \bigwedge s_2 \to \neg\theta,$$

且 $\mathrm{Sm}'(\theta) \subseteq \mathrm{Sm}'(s_1 \cup \{\sigma(t/d)\}) \cap \mathrm{Sm}'(s_2)$. 据公理 6 的有效性，有 $\models \bigwedge s_1 \wedge \sigma(t) \wedge d \equiv t \to \theta$. 因为 $\sigma(t) \in s_1, d \equiv t \in s_2$，所以易得

$$\models \bigwedge s_1 \to (d \equiv t \to \theta), \quad \models \bigwedge s_2 \to \neg(d \equiv t \to \theta). \tag{7.23}$$

因为 $\mathrm{Sm}'(d \equiv t \to \theta) \subseteq \mathrm{Sm}'(s_1) \cap \mathrm{Sm}'(s_2)$. 所以 $s \notin \mathbf{S}$，矛盾.

情况 3　$\sigma(t) \in s_1, d \equiv t \in s_2$，但 d 不在 s_1 中出现：令 s_1^1, s_2^1 如情况 2 所规定. 假设 $s^1 \notin \mathbf{S}$. 若 s^1 不满足条件(c)，则 $s_1 \cup \{\sigma(t/d)\}$ 没

有模型，因此$\models \bigwedge s_1 \to \neg\sigma(t/d)$. 因为$d$不在$s_1$中出现，所以据概括规则的有效性，$\models \bigwedge s_1 \to \forall x \neg\sigma(d/x)$. 因为$t$是个体常元，所以据公理4的有效性，有$\models \bigwedge s_1 \to \neg\sigma(x/t)$. 另一方面，因为$\sigma(t) \in s_1$，所以$\models \bigwedge s_1 \to \sigma(t)$，而这与$s_1$有模型矛盾，所以$s^1$满足条件(c).

若s^1不满足条件(d)，则据(7.23)，易得

$$\models \bigwedge s_1 \to (d \equiv t \to \theta(d)), \quad \models \bigwedge s_2 \to \neg(d \equiv t \to \theta(d)).$$

因为d不在s_1中出现，所以据概括规则和公理4等的有效性，

$$\models \bigwedge s_1 \to \forall x(x \equiv t \to \theta), \quad \models \bigwedge s_2 \to \neg\forall x(x \equiv t \to \theta).$$

因为$\mathrm{Sm}'(\forall x(x \equiv t \to \theta(x))) \subseteq \mathrm{Sm}'(s_1) \cap \mathrm{Sm}'(s_2)$，故$s \notin \mathbf{S}$，矛盾.

情况4　$d \equiv t \in s_1, \sigma(t) \in s_2, d$在$s_2$中出现：令$s_1^1 = s_1, s_2^1 = s_2 \cup \{\sigma(t/d)\}$. 证明类似情况2.

情况5　$d \equiv t \in s_1, \sigma(t) \in s_2, d$不在$s_2$中出现：令$s_1^1 = s_1, s_2^1 = s_2 \cup \{\sigma(t/d)\}$. 如情况3所证，$s^1$满足条件(c). 假设$s^2$不满足条件(d)，则存在$\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$的全称句$\theta(d)$使得

$$\models \bigwedge s_1 \to \theta(d), \quad \models \bigwedge s_2 \wedge \sigma(t/d) \to \neg\theta(d),$$

且$\mathrm{Sm}'(\theta(d)) \subseteq \mathrm{Sm}'(s_1) \cap \mathrm{Sm}'(s_2 \cup \{\sigma(t/d)\})$. 据公理6的有效性，有$\models \bigwedge s_2 \wedge \sigma(t) \wedge d \equiv t \to \neg\theta(d)$. 因为$\sigma(t) \in s_2$，所以

$$\models \bigwedge s_2 \to (d \equiv t \to \neg\theta(d)).$$

因为d不在s_2中出现，所以据概括规则的有效性，有

$$\models \bigwedge s_2 \to \forall x(x \equiv t \to \neg\theta).$$

据公理4的有效性，有$\models \bigwedge s_2 \to (t \equiv t \to \neg\theta(t))$. 据公理5的有效性，有$\models \bigwedge s_2 \to \neg\theta(t)$. 因为$d \equiv t \in s_1$且$\models \bigwedge s_1 \to \theta(d)$，所以据公理6的有效性，有$\models \bigwedge s_1 \to \theta(d/t)$. 因为$\mathrm{Sm}'(\theta(t)) \subseteq \mathrm{Sm}'(s_1) \cap \mathrm{Sm}'(s_2)$，所以$s \notin \mathbf{S}$，矛盾.

(C7)(3) 令t是个体常元，下证对某个$e \in C$，$s \cup \{e \equiv t\} \in \mathbf{S}$.

情况1　t在s_1和s_2中都出现：令$s_1^1 = s_1 \cup \{e \equiv t\}, s_2^1 = s_2$. 显然，$s^1 = s_1^1 \cup s_2^1$满足条件(a)—(b). 若对所有$e \in C$，$s^1$不满足条件(c)，

则对所有 $e\in C$，我们有 $\models \bigwedge s_1 \to \neg(e\equiv t)$. 因为 $t\in C$，所以易见 $\models \bigwedge s_1\to\neg(t\equiv t)$. 这与 s_1 有模型矛盾.

假设对所有 $e\in C$，s^1 不满足条件(d)，则对所有 $e\in C$，

$$\models \bigwedge s_1 \wedge e\equiv t\to\theta(e), \qquad \models \bigwedge s_2\to\neg\theta(e),$$

且 $\mathrm{Sm}'(\theta(e))\subseteq \mathrm{Sm}'(s_1\cup\{e\equiv t\})\cap \mathrm{Sm}'(s_2)$，因为 $s_1\cup s_2$ 只含有穷多个 $c\in C$，所以我们能选择一不在 $s_1\cup s_2$ 中出现的 $d\in C$ 使得

$$\models \bigwedge s_1\wedge d\equiv t\to\theta(d), \quad \models \bigwedge s_2\to\neg\theta(d).$$

因此据概括规则的有效性，

$$\models \bigwedge s_1\to\forall x(x\equiv t\to\theta(x)), \quad \models \bigwedge s_2\to\forall x\neg\theta(x). \tag{7.24}$$

而据公理 4 的有效性，又有

$$\models \bigwedge s_1\to(t\equiv t\to\theta(t)), \quad \models \bigwedge s_2\to\neg\theta(t).$$

据公理 5 的有效性，从前者易得 $\models \bigwedge s_1\to\theta(t)$. 显然 $\mathrm{Sm}'(\theta(t))\subseteq \mathrm{Sm}'(s_1)\cap\mathrm{Sm}'(s_2)$，所以 $s\notin \mathbf{S}$.

情况 2 t 不在 s_2 中出现：这时仍令 $s_1^1=s_1\cup\{e\equiv t\}$，$s_2^1=s_2$. 据情况 1 所证，显然，$s^1=s_1^1\cup s_2^1$ 满足条件(a)—(c). 假设 s^1 不满足条件(d)，据(7.24)，有

$$\models \bigwedge s_1\to(\exists x(x\equiv t)\to\exists x\theta(x)), \quad \models \bigwedge s_2\to\forall x\neg\theta(x).$$

因为据公理 4 的有效性，有 $\models\exists x(x\equiv t)$，所以

$$\models \bigwedge s_1\to\exists x\theta(x), \qquad \models \bigwedge s_2\to\neg\exists x\theta(x).$$

显然 $\mathrm{Sm}'(\exists x\theta(x))\subseteq\mathrm{Sm}'(s_1)\cap\mathrm{Sm}'(s_2)$，所以 $s\notin\mathbf{S}$，矛盾.

情况 3 t 不在 s_1 中出现：这时我们令 $s_1^1=s_1$，$s_2^1=s_2\cup\{e\equiv t\}$，证明类似情况 2.

（注意：在上面的验证中，若 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 有函数符号，则我们会遇到困难，因为若 t 含有若干个函数符号，则有可能其中一部分出现在 s_1 中而另一部分出现在 s_2 中.）

这样我们证明了 $\mathbf{S}$ 是 (ω_1,ω)-一致性质. 据 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 的模型存在定理，每一 $s\in\mathbf{S}$ 有模型，因此 $\{\varphi,\neg\psi\}\notin\mathbf{S}$. 如前所证，存在 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 的句子 θ 使之具有我们要求的性质. □

二、$\mathscr{L}_{\infty\omega}$的情况

7.3.2 Malitz-内插定理(Malitz,[1966]) 设$\mathscr{L}$没有函数符号,令φ,ψ是$\mathscr{L}_{\infty\omega}$-句子,$\psi$是全称句且$\models\varphi\to\psi$,若$\kappa$是正则基数或是共尾度为$\omega$的奇异基数,则存在$\mathscr{L}_{2^{>\kappa},\kappa}$-句子$\theta$使得

(1) $\models\varphi\to\theta$,$\models\theta\to\psi$,且

(2) $\mathrm{Sm}(\theta)\subseteq\mathrm{Sm}(\varphi)\cap\mathrm{Sm}(\psi)$.

证明:不妨假设ψ是无量词公式,因为我们有下列命题:

$\mathscr{L}_{\infty\omega}$的任意全称公式逻辑等价$\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$的全称前束公式,且对$\mathscr{L}_{\infty\omega}$的任意公式$\varphi,\varphi_1$和不在$\varphi$和$\varphi_1$中出现的个体常元$e\in E$,

$$\models\varphi\to\forall\{x_e:e\in E\}\varphi_1 \Leftrightarrow \models\varphi\to\varphi_1(x_e/e:e\in E). \qquad (7.25)$$

这里我们只验证κ是正则基数的情况.另一种情况留给读者.

令$\mathbf{S}$是$\mathscr{L}'_{\infty\omega}$的所有句子集$s$的集合使得$|s|<\kappa$,且

① $s=s_1\cup s_2$,其中s_2中的所有句子是无量词句,

② 不存在$\mathscr{L}'_{2^{>\kappa},\kappa}$-全称句$\theta$使得

(i) $\models\bigwedge s_1\to\theta$且$\models\bigwedge s_2\to\neg\theta$,且

(ii) $\mathrm{Sm}(\theta)\subseteq\mathrm{Sm}(s_1)\cap\mathrm{Sm}(s_2)$.

下面我们来验证$\mathbf{S}$是(κ,ω)-一致性质:任给$s=s_1\cup s_2\in\mathbf{S}$,

(C1):假设$\{\sigma,\neg\sigma\}\subseteq s$.若$\sigma\in s_1$,$\neg\sigma\in s_2$,则令$\theta=\sigma$.因为$\neg\sigma\in s_2$是无量词的,所以$\theta$是全称的且满足(i)和(ii).

若$\neg\sigma\in s_1$,$\sigma\in s_2$也类似可证.

若$\sigma,\neg\sigma\in s_1$,则令$\theta=\forall x\neg(x\equiv x)$;若$\sigma,\neg\sigma\in s_2$,则令$\theta=\forall x(x\equiv x)$.在这两种情况下$\theta$都满足(i)和(ii),与$s\in\mathbf{S}$矛盾.

(C2):假设$\{\neg\sigma:\sigma\in\Sigma\}\subseteq s$.令$s_j^1=s_j\cup\{\sigma\neg:\sigma\in\Sigma,\neg\sigma\in s_j\}$,其中$j=1,2$.假设$s^1=s_1^1\cup s_2^1\notin\mathbf{S}$,则存在$\mathscr{L}'_{2^{>\kappa},\kappa}$-全称句$\theta$满足条件(i)和(ii).据公理2的有效性,易证对$s_1\cup s_2$,θ满足(i)和(ii),因此$s\notin\mathbf{S}$,矛盾.

(C3)：假设$\{\bigwedge\Sigma_i : i\in I\}\subseteq s$. 令$s_j^1=s_j\cup\bigcup\{\Sigma_i : i\in I, \Sigma_i\in s_j\}$，其中$j=1,2$. 据公理3的有效性，易证$s_1^1\cup s_2^1\in\mathbf{S}$.

(C4)：假设$\{\bigvee\Sigma_i : i\in I\}\subseteq s$. 对$j=1,2$，令

$$I_j=\{i\in I : \bigvee\Sigma_i\in s_j\}.$$

对所有$f\in\prod_{i\in I_1}\Sigma_i$，令$s_{1,f}=s_1\cup\{f(i) : i\in I_1\}$，$s_{2,f}=s_2$. 假设$s_{1,f}\cup s_{2,f}\notin\mathbf{S}$，则对每一$f\in\prod_{i\in I_1}\Sigma_i$，存在全称句$\theta_f$对$s_{1,f}$和$s_{2,f}$满足(i)—(ii)，所以对所有$f\in\prod_{i\in I_1}\Sigma_i$，

$$\models\bigwedge s_1\wedge\bigwedge_{i\in I_1}f(i)\to\theta_f,$$

据合取规则，定理2.2.7(3)(a)和4.4.1(1)，有

$$\models\bigwedge s_1\wedge\bigvee\{\bigwedge_{i\in I_1}f(i) : f\in\prod_{i\in I_1}\Sigma_i\}\to\bigvee\{\theta_f : f\in\prod_{i\in I_1}\Sigma_i\}.\quad(7.26)$$

据4.4.1(3)，分配律规则是有效的，所以

$$\models\bigwedge\{\neg\bigwedge_{i\in I_1}f(i) : f\in\prod_{i\in I_1}\Sigma_i\}\to\neg\bigwedge_{i\in I_1}\bigvee\Sigma_i,$$

因此据逆否规则等，

$$\models\bigwedge s_1\wedge\bigwedge_{i\in I_1}\bigvee\Sigma_i\to\bigwedge s_1\wedge\bigvee\{\bigwedge_{i\in I_1}f(i) : f\in\prod_{i\in I_1}\Sigma_i\}.\quad(7.27)$$

联立(7.26)和(7.27)，有$\models\bigwedge s_1\to\bigvee\{\theta_f : f\in\prod_{i\in I_1}\Sigma_i\}$. 令$\theta=\bigvee\{\theta_f : f\in\prod_{i\in I_1}\Sigma_i\}$，易见$\theta$对$s_1$和$s_2$满足(i)和(ii)，矛盾. 所以存在$f\in\prod_{i\in I_1}\Sigma_i$使得$s_{1,f}\cup s_{2,f}\in\mathbf{S}$. 若对每一这样的$f$和每一$g\in\prod_{i\in I_2}\Sigma_i$，考虑

$$s_{1,g}=s_{1,f},\quad s_{2,g}=s_{2,f}\cup\{g(i) : i\in I_2\},$$

则类似上面的证明，我们能找到一个g使得$s_{1,g}\cup s_{2,g}\in\mathbf{S}$.

(C5)：假设$\{\forall x_i\sigma_i(x_i) : i\in I\}\subseteq s$，$C_1\subseteq C$，$|C_1|<\kappa$. 因为$s_2$的所有句子皆无量词，所以$\{\forall x_i\sigma_i(x_i) : i\in I\}\subseteq s_1$. 令

$$s_1^1=s_1\cup\{\sigma_i(x_i/c) : i\in I, c\in C_1\},\quad s_2^1=s_2.$$

假设$s^1=s_1^1\cup s_2^1\notin\mathbf{S}$，则存在$\mathscr{L}^{\prime}_{2^{>\kappa},\kappa}$-全称句$\theta$对$s_1^1$和$s_2^1$满足(i)和(ii). 所以在$\theta$中出现的$\mathscr{L}_{\infty}$的每一关系和个体常元符号也在$s_1$和$s_2$中出现，而在$\theta$中出现的每一$c\in C$在$s_2$中出现但不必然在$s_1$中

出现．令

$$C_2=\{c\in C_1:c\ \text{在}\ \theta\ \text{中出现但不在}\ s_1\ \text{中出现}\}.$$

对每一 $c\in C_2$，令 x_c 是新变元，因为 $\models\bigwedge s_1\to\bigwedge s_1^1$，所以 $\models\bigwedge s_1\to\theta$，且 $\models\bigwedge s_2\to\neg\theta$，据概括规则和公理 4 的有效性，有

$$\models\bigwedge s_1\to\forall\{x_c:c\in C_2\}\theta(c/x_c:c\in C_2),$$

$$\models\bigwedge s_2\to\exists\{x_c:c\in C_2\}\neg\theta(c/x_c:c\in C_2).$$

令 $\theta_1=\forall\{x_c:c\in C_2\}\theta(c/x_c:c\in C_2)$，则 θ_1 是全称句且对 s_1 和 s_2 满足(i)和(ii)，矛盾．

(C6)：假设 $\{\exists x_i\sigma_i(x_i):i\in I\}\subseteq s$，则 $\{\exists x_i\sigma_i(x_i):i\in I\}\subseteq s_1$．令 $\{c_i:i\in I\}$ 是不在 s 中出现的、C 的 $|I|$ 个互不相同的个体常元的集合，$s_1^1=s_1\cup\{\sigma_i(x_i/c_i):i\in I_1\}$，$s_2^1=s_2$．假设 $s^1=s_1^1\cup s_2^1\notin\mathbf{S}$．则存在全称句 θ 对 s_1^1 和 s_2^1 满足(i)和(ii)．因为在 s 中没有 c_i 出现，所以据概括规则的有效性，易证 θ 对 s_1 和 s_2 满足(i)和(ii)，矛盾．

(C7)(1)：假设 $\{c_i\equiv d_i:i\in I\}\subseteq s$，对 $j=1,2$，令

$$s_j^1=s_j\cup\{d_i\equiv c_i:i\in I,c_i\equiv d_i\in s_j\},$$

易证 $s_1^1\cup s_2^1\in\mathbf{S}$．

(2) 假设 $\{c_i\equiv t_i:i\in I\}\cup\{\sigma_i(t_i):i\in I\}\subseteq s$．因为 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$ 没有函数符号，所以每一基本项 t_i 是 $\mathscr{L}'_{\omega\omega}$ 的个体常元．令

$I_1=\{i\in I:\sigma_i(t_i)\in s_1,c_i\equiv t_i\in s_1\}$，

$I_2=\{i\in I:\sigma_i(t_i)\in s_1,c_i\equiv t_i\in s_2,c_i$ 在 s_1 中出现$\}$，

$I_3=\{i\in I:\sigma_i(t_i)\in s_1,c_i\equiv t_i\in s_2,c_i$ 不在 s_1 中出现$\}$，

$I_4=\{i\in I:\sigma_i(t_i)\in s_2,c_i\equiv t_i\in s_2\}$，

$I_5=\{i\in I:\sigma_i(t_i)\in s_2,c_i\equiv t_i\in s_1,c_i$ 在 s_2 中出现$\}$，

$I_6=\{i\in I:\sigma_i(t_i)\in s_2,c_i\equiv t_i\in s_1,c_i$ 不在 s_2 中出现$\}$，

$s_1^1=s_1\cup\{\sigma_i(t_i/c_i):i\in I_1\cup I_2\cup I_3\}\cup\{c_i\equiv t_i:i\in I_2\cup I_3\}$，

$s_2^1=s_2$．

假设 $s^1=s_1^1\cup s_2^1\notin\mathbf{S}$，则存在 $\mathscr{L}'_{2^\kappa,\kappa}$-全称句 θ 对 s_1^1 和 s_2^1 满足条件(i)和(ii)．因为对 $i\in I_1\cup I_2$，$\sigma_i(t_i/c_i)$ 中的 c_i 在 s_1 中出现，所以在 θ 中

出现的$\mathscr{L}'_{\infty}$的个体常元在 s_2 和 $s_1\cup\{c_i:i\in I_3\}$中出现. 显然,

$$\models \bigwedge s_1\wedge\bigwedge\{c_i\equiv t_i:i\in I_2\cup I_3\}\to\bigwedge s_1^1,$$

所以

$$\models \bigwedge s_1\to(\bigwedge\{c_i\equiv t_i:i\in I_2\cup I_3\}\to\theta).$$

令 $\theta_1=\theta(c_j/t_j:j\in I_3)$. 因为对所有 $i\in I_3$,c_i 不在 $s_1\cup\{c_i\equiv t_i:i\in I_2\}$ 中出现,所以代换新个体常元且据全称概括规则的有效性,有

$$\models \bigwedge s_1\to(\bigwedge\{c_i\equiv t_i:i\in I_2\}\wedge\bigwedge\{t_j\equiv t_j:j\in I_3\}\to\theta_1),$$

因此

$$\models \bigwedge s_1\to(\bigwedge\{c_i\equiv t_i:i\in I_2\}\to\theta_1).$$

因为 $i\in I_2$ 蕴涵 $c_i\equiv t_i\in s_2$,所以

$$\models \bigwedge s_2\to\neg(\bigwedge\{c_i\equiv t_i:i\in I_2\}\to\theta).$$

但对 $j\in I_3$,$c_j\equiv t_j\in s_2$,且没有 c_j 在$\{c_i\equiv t_i:i\in I_2\}$中出现,因此据模型的性质,

$$\models \bigwedge s_2\to\neg(\bigwedge\{c_i\equiv t_i:i\in I_2\}\to\theta_1).$$

令 $\theta_2=\bigwedge\{c_i\equiv t_i:i\in I_2\}\to\theta_1$,显然 θ_2 是全称句且对 s_1 和 s_2 满足(i)和(ii),矛盾,所以 $s_1^1\cup s_2^1\in\mathbf{S}$. 令

$$s_1^2=s_1^1,$$

$$s_2^2=s_2^1\cup\{\sigma_i(t_i/c_i):i\in I_4\cup I_5\cup I_6\}\cup\{c_i\equiv t_i:i\in I_5\cup I_6\}.$$

假设 $s_1^2\cup s_2^2\notin\mathbf{S}$,则存在一个全称句 θ 对 $s_1^2\cup s_2^2$ 满足条件(i)和(ii). 类似上面的论证可以证明

$$\theta_2=\bigwedge\{c_i\equiv t_i:i\in I_5\}\to\theta(c_j/t_j:j\in I_6)$$

是全称句且对 s_1^1 和 s_2^1 满足(i)和(ii),而这又与 $s_1^1\cup s_2^1\in\mathbf{S}$ 矛盾.

(3) 假设$\{t_i:i\in I\}$是$\mathscr{L}'_{\infty}$的幂$<\kappa$的基本项集,$\{e_i:i\in I\}\subseteq C$是不在 s 和$\{t_i:i\in I\}$中出现的$|I|$个互不相同的元素的集合. 令

$I_1=\{i\in I:t_i$ 在 s_1 和 s_2 中出现$\}$,

$I_2=\{i\in I:t_i$ 在 s_2 中不出现$\}$,

$I_3=\{i\in I:t_i$ 在 s_1 中不出现$\}$,

$s_1^1=s_1\cup\{e_i\equiv t_i:i\in I_1\cup I_2\}$,

$s_2^1 = s_2$.

假设 $s^1 = s_1^1 \cup s_2^1 \notin \mathbf{S}$，则存在 $\mathscr{L}'_{2^{>\kappa},\kappa}$-全称句 θ 对 s_1^1 和 s_2^1 满足(i)和(ii)．因此

$$\vDash \bigwedge s_1 \wedge \bigwedge\{e_i \equiv t_i : i \in I_1 \cup I_2\} \to \theta.$$

但对 $i \in I_1 \cup I_2$，e_i 只在 $\bigwedge s_1 \wedge \bigwedge\{e_i \equiv t_i : i \in I_1 \cup I_2\} \to \theta$ 的 $e_i \equiv t_i$ 中出现，特别是 e_i 不在 θ 中出现，因为 θ 中每一个体常元符号在 s_1 和 s_2 中都出现，所以代换新个体常元且据全称概括规则的有效性，有

$$\vDash \bigwedge s_1 \wedge \bigwedge\{t_i \equiv t_i : i \in I_1 \cup I_2\} \to \theta,$$

因此 $\vDash \bigwedge s_1 \to \theta$，由此可得 θ 对 s_1 和 s_2 满足(i)和(ii)，矛盾，所以

$$s_1^1 \cup s_2^1 \in \mathbf{S}.$$

令 $s_1^2 = s_1^1$，$s_2^2 = s_2^1 \cup \{e_i \equiv t_i : i \in I_3\}$．假设 $s_1^2 \cup s_2^2 \notin \mathbf{S}$，则存在全称句 θ 对 $s_1^2 \cup s_2^2$ 满足条件(i)和(ii)．对 $i \in I_3$，e_i 只能出现在

$$\bigwedge s_2^1 \wedge \bigwedge\{e_i \equiv t_i : i \in I_3\} \to \neg\theta$$

的 $e_i \equiv t_i$ 中，类似前面的论证可以证明 θ 对 s_1^1 和 s_2^1 满足条件(i)和(ii)，而这又与 $s_1^1 \cup s_2^1 \in \mathbf{S}$ 矛盾．所以 $s_1^2 \cup s_2^2 \in \mathbf{S}$.

这样，我们证明了 $\mathbf{S}$ 是(κ,ω)-一致性质．因为$\vdash \varphi \to \psi$，所以 $\{\varphi, \neg\psi\}$ 没有模型，因此 $\{\varphi, \neg\psi\} \notin \mathbf{S}$，所以存在 $\mathscr{L}'_{2^{>\kappa},\kappa}$-全称句 θ 对$\{\varphi\}$和$\{\neg\psi\}$满足(i)和(ii)．因为 φ 和 $\neg\psi$ 只是 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$ 的句子，所以没有 $c \in C$ 在 φ 和 $\neg\psi$ 中出现，因此据(ii)，没有 $c \in C$ 在 θ 中出现．这样得到的 θ 是 $\mathscr{L}_{2^{>\kappa},\kappa}$-句子且有我们要求的性质．□

说明：(Ⅰ) $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$ 的 Malitz-内插定理也有形如 7.3.1(2)的定理，所以 Malitz-内插定理等价下列形式的定理：

若 φ 是存在句，则内插句 θ 也是存在句．

因为 Malitz-Barwise-内插定理的证明说明：

若 $\mathscr{L}$ 没有函数符号和个体常元符号且 φ 是全称句，则内插句 θ 也是全称句，所以若 ψ 是存在句，则内插句 θ 是存在句．

(Ⅱ) 若 κ 是强不可达基数，则上述定理中的内插句是 $\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$ 的句子且具有前束全称句的形式．

7.3.3 反例 令 $\varphi=R(c)$，$\psi=\exists xR(x)$. 若我们在 7.3.1(2)中取消 $\mathscr{L}$ 没有个体常元的假设，则 $\models R(c)\to\exists xR(x)$ 说明 7.3.1(2)对取消上述假设不成立.

练 习

7.3.4 证明 7.3.1(2).

7.3.5 证明当 κ 是共尾度为 ω 的奇异基数时 7.3.2 成立.

7.3.6 表述和证明 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的 Malitz-内插定理.

§4 内插定理的应用

一、Beth-可定义性定理

Craig-内插定理最重要的应用当是 Beth-可定义性定理. E. W. Beth 原来得到的可定义性定理是有穷逻辑 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$ 中的结果，而且在内插定理发现之前就得到证明. 我们在此讨论的是这个结果向无穷逻辑的概括.

7.4.1 定义 令 $\mathscr{L}\subseteq\mathscr{L}'$ 且 $\mathrm{Form}(\mathscr{L})\subseteq\mathrm{Form}(\mathscr{L}')$，

(1) 称 $\mathscr{L}$ 的 n 元关系符号 R 在 $\mathscr{L}'$ 中相对 $\mathscr{L}$-句子 σ 是**显定义的** $\Leftrightarrow$ 存在 $\mathscr{L}'$-公式 φ(φ 称为 R 相对 σ 的显定义公式)使得：

① $|\mathrm{Fv}(\varphi)|=n$，

② $\mathrm{Sm}(\varphi)\subseteq\mathrm{Sm}(\sigma)-\{R\}$，

③ $\models\sigma\to\forall\vec{x}_n[R(\vec{x}_n)\leftrightarrow\varphi(\vec{x}_n)]$.

(2) 称 n 元关系符号 R 被 $\mathscr{L}$-句子 σ **隐定义** $\Leftrightarrow$

$$\models\sigma\wedge\sigma(R/S)\to\forall\vec{x}_n[R(\vec{x}_n)\leftrightarrow S(\vec{x}_n)],$$

其中 S 是任意 n 元关系符号使得 $S\notin\mathrm{Sm}(\sigma)$ 且 $\sigma(R/S)$ 指称用 S 代换 σ 中 R 的所有出现而得到的句子.

(3) 称 $\mathscr{L}$ 相对 $\mathscr{L}'$ 有 **Beth-可定义性**，记作Beth($\mathscr{L}$,$\mathscr{L}'$)，$\Leftrightarrow$ 若 σ 是 $\mathscr{L}$-句子，R 是 $\mathscr{L}$ 的关系符号且 σ 隐定义 R，则 R 在 $\mathscr{L}'$ 中相对 σ 是显定义的.

注意：上述显定义的意义是一目了然的. 隐定义的意义可以大致表述如下：

R 被 σ 隐定义意味 R 在 σ 的每一模型中被唯一确定.

Beth 在其[1953]证明了 Beth($\mathscr{L}_{\omega\omega}$,$\mathscr{L}_{\omega\omega}$)，后来 Craig 认识到：

$$\text{Interp}_c(\mathscr{L},\mathscr{L}) \Rightarrow \text{Beth}(\mathscr{L},\mathscr{L})$$

几乎可以施于一阶逻辑的任何扩张. 下面定理给出更一般结果.

7.4.2 定理(Malitz,[1966]) 令 $\mathscr{L}$ 满足 7.4.1(1)的限制. 假设 $\mathscr{L}$ 的 n 元关系 R 被 $\mathscr{L}$ 的句子 σ 隐定义，则存在形如 $\varphi\to\psi$ 的 $\mathscr{L}$-有效句使得对所有满足 7.4.1 的语言 $\mathscr{L}'$，下列等价：

(1) φ,ψ 有一个在 $\mathscr{L}'$ 中的 Craig-内插句.

(2) R 在 $\mathscr{L}'$ 中相对 σ 是显定义的.

特别地，　　Interp$_c$($\mathscr{L}$,$\mathscr{L}'$) $\Rightarrow$ Beth($\mathscr{L}$,$\mathscr{L}'$).

证明：假设 R 被 σ 隐定义，因此

$$\mathscr{L}\models\sigma\wedge\sigma(R/S)\to\forall\vec{x}_n[R(\vec{x}_n)\leftrightarrow S(\vec{x}_n)],$$

其中 S 是任意不在 σ 中出现的 n 元关系符号. 我们把 n 个新个体常元 $\vec{c}_n$ 加到 $\mathscr{L}$ 中得到语言 $\mathscr{L}(\vec{c}_n)$，因此

$$\mathscr{L}(\vec{c}_n)\models\sigma\wedge R(\vec{c}_n)\to(\sigma(R/S)\to S(\vec{c}_n)).$$

令 $$\varphi=\sigma\wedge R(\vec{c}_n),\psi=\sigma(R/S)\to S(\vec{c}_n).$$

证 (1) $\Rightarrow$ (2)：令 $\theta=\theta(\vec{c}_n)$是 $\mathscr{L}''=\mathscr{L}'(\vec{c}_n)$的公式且是 φ 和 ψ 的 Craig-内插句，因此

$$\text{Sm}(\theta)\subseteq\text{Sm}(\{\sigma,R(\vec{c}_n)\})\cap\text{Sm}(\{\sigma(R/S),S(\vec{c}_n)\}),$$

即 $\text{Sm}(\theta)\subseteq(\text{Sm}(\sigma)-\{R\})\cup\{\vec{c}_n\}$. 因为 $\mathscr{L}''\models\varphi\to\theta$，所以

$$\mathscr{L}''\models\sigma\to(R(\vec{c}_n)\to\theta).$$

因为 $\mathscr{L}''\models\theta\to\psi$，所以我们用 R 代换 S(显然这种代换是合理的)就得到 $\mathscr{L}''\models\theta\to(\sigma\to R(\vec{c}_n))$，因此 $\mathscr{L}''\models\sigma\to(\theta(\vec{c}_n)\leftrightarrow R(\vec{x}_n))$. 因

为 $\vec{c}_n$ 不在 σ 中出现，所以我们可以用适当的变元来进行量化，因此我们有 $\mathscr{L}'' \models \sigma \to \forall \vec{x}_n(R(\vec{x}_n) \leftrightarrow \theta(\vec{x}_n))$，这就证明了 θ 在 $\mathscr{L}'$ 中相对 σ 是显定义的.

证(2) $\Rightarrow$ (1)：假设 R 在 $\mathscr{L}'$ 中相对 σ 是显定义的，则存在 $\mathscr{L}'$ 的、定义 R 的公式 θ 使得 $\mathrm{Sm}(\theta) \subseteq \mathrm{Sm}(\sigma) - \{R\}$ 且

$$\mathscr{L}' \models \sigma \to \forall \vec{x}_n(R(\vec{x}_n) \leftrightarrow \theta(\vec{x}_n)),$$

因此 $$\mathscr{L}' \models \sigma \to (\forall \vec{x}_n R(\vec{x}_n) \leftrightarrow \forall \vec{x}_n \theta(\vec{x}_n)).$$

据简单的重言式变换，有

$$\mathscr{L}' \models \sigma \wedge \forall \vec{x}_n R(\vec{x}_n) \to \forall \vec{x}_n \theta(\vec{x}_n),$$

$$\mathscr{L}' \models \forall \vec{x}_n \theta(\vec{x}_n) \to (\sigma \to \forall \vec{x}_n R(\vec{x}_n)).$$

因为 $\vec{c}_n$ 不在 σ 中出现，所以易得

$$\mathscr{L}' \models \sigma \wedge R(\vec{c}_n) \to \forall \vec{x}_n \theta(\vec{x}_n),$$

$$\mathscr{L}' \models \forall \vec{x}_n \theta(\vec{x}_n) \to (\sigma(R/S) \to S(\vec{c}_n)). \quad \square$$

7.4.3 推论 (1)(López-Escobar,[1965])

$$\mathrm{Beth}(\mathscr{L}_{\omega_1\omega}, \mathscr{L}_{\omega_1\omega}).$$

(2)(Malitz,[1966]) 若 κ 是正则基数，则

$$\mathrm{Beth}(\mathscr{L}_{\kappa\omega}, \mathscr{L}_{(2^{<\kappa})^+,\kappa});$$

特别地， ① κ 是无穷基数 $\Rightarrow \mathrm{Beth}(\mathscr{L}_{\kappa^+\omega}, \mathscr{L}_{(2^\kappa)^+,\kappa})$.

② $\kappa > \omega$ 是强不可达基数 $\Rightarrow \mathrm{Beth}(\mathscr{L}_{\kappa\omega}, \mathscr{L}_{\kappa\kappa})$.

③ $\mathrm{Beth}(\mathscr{L}_{\infty\omega}, \mathscr{L}_{\infty\infty})$.

(3)(Fridman,[1971];Chang,[1971b]) 若 $\mathrm{cf}(\kappa) = \omega$，则

$$\mathrm{Beth}(\mathscr{L}_{\kappa^+\omega}, \mathscr{L}_{(2^{<\kappa})^+,\kappa});$$

特别地， ① $\mathrm{cf}(\kappa) = \omega \Rightarrow \mathrm{Beth}(\mathscr{L}_{\kappa^+\omega}, \mathscr{L}_{\infty\kappa})$.

② κ 是强极限基数且 $\mathrm{cf}(\kappa) = \omega \Rightarrow \mathrm{Beth}(\mathscr{L}_{\kappa^+\omega}, \mathscr{L}_{\kappa^+\kappa})$.

证明：据 7.4.2 和 §1 的诸结果. $\square$

Beth-可定义性还有许多否定性结果也是令人感兴趣的. 据 7.4.2，了解它们也就在一定的程度上理解内插定理(的否定性结

果)，所以我们来讨论几个反例.

下面我们用$\neg$Beth$(\mathscr{L},\mathscr{L}')$来表示Beth$(\mathscr{L},\mathscr{L}')$不成立.

Malitz 在其[1966]证明了$\neg$Beth$(\mathscr{L}_{\omega_1\omega_1},\mathscr{L}_{\infty\infty})$，从而

$$\neg\text{Beth}(\mathscr{L}_{\infty\omega},\mathscr{L}_{\infty\infty}).$$

Gregory 在其[1974]证明了$\neg$Beth$(\mathscr{L}_{\infty\omega},\mathscr{L}_{\infty\omega})$，且对每一基数$\lambda$，$\neg$Beth$(\mathscr{L}_{\infty\omega},\mathscr{L}_{\infty\lambda})$. 他还证明了若$\kappa$是不可数正则基数，则

$$\neg\text{Beth}(\mathscr{L}_{\kappa^+\omega},\mathscr{L}_{\infty\kappa}).$$

Friedman 在其[1971]证明了若κ是基数使得$\text{cf}(\kappa)>\omega$，则

$$\neg\text{Beth}(\mathscr{L}_{\kappa^+\omega},\mathscr{L}_{\kappa^+\kappa^+}).$$

下面我们来证明上述两个否定性结果.

7.4.4 定理(Malitz，[1966]) 对所有$\kappa\geqslant\lambda\geqslant\omega_1$，

$$\neg\text{Beth}(\mathscr{L}_{\omega_1\omega_1},\mathscr{L}_{\kappa\lambda})，\text{从而}\neg\text{Beth}(\mathscr{L}_{\omega_1\omega_1},\mathscr{L}_{\infty\infty}).$$

(**注意**：据7.4.2，Craig-内插定理也在所有上述语言中不成立.)

证明：令$\mathscr{M}$是所有形如$(\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{B},f)$的结构的类，其中

(1) $\text{Sm}(\mathfrak{A})=\text{Sm}(\mathfrak{B})=\{U,<\}$，

其中U是一元关系符号，$<$是二元关系符号，

(2) $A\cap B\doteq\varnothing$，

(3) $U^{\mathfrak{A}}=A,U^{\mathfrak{B}}=\varnothing$，

(4) $<^{\mathfrak{A}}$良序A，$<^{\mathfrak{B}}$良序B，

(5) $f:\mathfrak{A}\upharpoonright\{<\}\cong\mathfrak{B}\upharpoonright\{<\}$.

显然，条件(3)，(5)可以用含有U和(表述f的)二元关系符号F的$\mathscr{L}_{\omega\omega}$的句子来表述，(4)可以用一个$\mathscr{L}_{\omega_1\omega_1}$的句子来表述. 因此存在$\mathscr{L}_{\omega_1\omega_1}(F,U,<)$的句子$\sigma$使得$\mathscr{M}=\text{Mod}(\sigma)$. 据集合论的定理，

在两个良序集之间至多存在一同构.

所以据后面的练习7.4.14的结果，σ隐定义F.

假设在某个语言$\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$中公式$\varphi$显定义$F$. 令$\sigma^*$是$\sigma(F/\varphi)$(即用$\varphi(x,y)$代换$\sigma$中$F(x,y)$的每一出现得到的公式)，显然，$\sigma^*\in\text{Sent}(\mathscr{L}_{\kappa_1\kappa_1}(U,<))$，其中$\kappa_1=\max=\{\kappa,\lambda,\omega_1\}$，且

$$\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{B}\models\sigma^*\Leftrightarrow(\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{B},\varphi^{\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{B}})\in\mathscr{M}.$$

因此

$$\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{B}\models\sigma^*\Leftrightarrow(3),(4)\text{成立且}\langle A,<^{\mathfrak{A}}\rangle,\langle B,<^{\mathfrak{B}}\rangle\text{有相同序型}. \tag{7.28}$$

令 $\delta\geqslant\kappa_1$ 使得对所有结构 $\mathfrak{A}_i,\mathfrak{B}_i$(其中 $i=1,2$),$A_1\cap A_2=B_1\cap B_2=\varnothing$,下列成立(参见下册 F.1.6 和 F.1.2(这里的 F 表示附录,下同)):

$$\mathfrak{A}_i\equiv_{\delta\delta}\mathfrak{B}_i\Rightarrow(\mathfrak{A}_1\oplus\mathfrak{A}_2\models\sigma\Leftrightarrow\mathfrak{B}_1\oplus\mathfrak{B}_2\models\sigma).$$

现在我们定义:

$\mathfrak{A}_1=\mathfrak{B}_1=\langle 2^{2^\delta},2^{2^\delta},\in\rangle$,

$\mathfrak{A}_2$ 是 $\langle 2^{2^\delta},\varnothing,\in\rangle$ 的不相交的同构摹本(copy).

据(7.28),我们有

$$\mathfrak{A}_1\oplus\mathfrak{A}_2\models\sigma^*. \tag{7.29}$$

考虑 $2^\delta=(2^\delta)^\delta$ 的情况. 据向下-Löwenheim-Skolem-定理(参见后面的有关章节),存在 $\mathfrak{B}_2\prec_{\delta\delta}\mathfrak{A}_2$ 使得 $|B_2|=2^\delta$. 所以据(7.29)和 δ 的性质,我们有 $\mathfrak{B}_1\oplus\mathfrak{B}_2\models\sigma^*$. 据(7.28),

$$\langle 2^{2^\delta},\in\rangle\cong\langle 2^\delta,\in\rangle,$$

矛盾,这证明了 F 在 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$中不是显定义的. □

注意:上述反例并没有解决以下问题:

对 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$(其中 $\kappa\geqslant\omega_2$)和 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$, Beth-可定义性定理是否不成立.

这些问题已由 Friedman 在其[1971]用元递归论方法部分地作了回答,后来 Gregory 在其[1974]用模型论方法完全解决了这个问题. Gregory 的构造证明:

对上述语言以及相关语言,Beth-可定义性定理不成立.

下面的反例 7.4.7 和定理 7.4.8 为此给出一个完全回答.

为了证明 Gregory 的结果,我们还需要下列事实,其中的一些将在后面章节给予证明:

(Ⅰ)(反例 15.1.16) 对每一不可数正则基数 κ,存在幂为 κ

的刚性结构 $\mathfrak{B}$,$\mathfrak{C}$ 和只含关系符号的幂$\leqslant\kappa$ 的语言,使得

$$\mathfrak{B}\not\cong\mathfrak{C},\quad \mathfrak{B}\equiv_{\infty\kappa}\mathfrak{C}.$$

(称结构 $\mathfrak{A}$ 是**刚性**(rigid)**结构** $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{A}$ 的唯一自同构是恒等函数.)

(Ⅰ)(定理 F.1.7) 对任意无穷基数 κ,$\equiv_{\infty\kappa}$对扩张的全基数和(参见 1.1.24 后面的说明)保持.

(Ⅱ)(推论 14.3.21) 对语言 $\mathscr{L}$ 的每一结构 $\mathfrak{A}$,存在 $\mathscr{L}_{\infty\kappa}$的句子 $\varphi_{\mathfrak{A}}$ 使得对 $\mathscr{L}$ 的任意结构 $\mathfrak{B}$,

$$\mathfrak{B}\models\varphi_{\mathfrak{A}}\Leftrightarrow\mathfrak{B}\equiv_{\infty\kappa}\mathfrak{A}.$$

现在我们来证明 Gregory 的结果,为此先证两个引理.

令 L 是形如 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$或 $\mathscr{L}_{\infty\lambda}$的语言,$\mathfrak{A}$ 是 L 的结构,称 $a\in A$ 是 **L-可定义元** $\Leftrightarrow$ 存在(a 的定义)公式 $\varphi\in\mathrm{Form}_1(\mathrm{L})$使得

$$\mathfrak{A}\models\varphi[a]\text{且 }\mathfrak{A}\models\exists!\,x\varphi(x);$$

否则称 $a\in A$ 是 **L-不可定义元**.

7.4.5 引理 令 κ 是无穷基数,$a\in A$ 是 $\mathscr{L}_{\infty\kappa}$-不可定义的 $\Leftrightarrow$ 存在 $b\in A$,$b\neq a$,使得$(\mathfrak{A},a)\equiv_{\infty\kappa}(\mathfrak{A},b)$.

证明:令 $\varphi=\varphi_{(\mathfrak{A},a)}$是由上述(Ⅱ)给出的句子,因此 $\varphi=\varphi(c_a)$是$\mathscr{L}_{\infty\kappa}(c_a)$的句子,其中 c_a 是新个体常元.

"$\Rightarrow$":假设 a 是 $\mathscr{L}_{\infty\kappa}$-不可定义的. 因为$(\mathfrak{A},a)\models\varphi(c_a)$,所以我们有 $\mathfrak{A}\models\varphi_1[a]$,其中 $\varphi_1=\varphi(c_a/x)$. 因为 φ_1 不可能是 a 的定义公式,所以存在 $b\in A$,$b\neq a$,使得 $\mathfrak{A}\models\varphi_1[b]$,即$(\mathfrak{A},b)\models\varphi$,因此

$$(\mathfrak{A},a)\equiv_{\infty\kappa}(\mathfrak{A},b).$$

"$\Leftarrow$":假设$(\mathfrak{A},a)\equiv_{\infty\kappa}(\mathfrak{A},b)$,则对任意 $\varphi\in\mathrm{Form}_1(\mathscr{L}_{\infty\kappa})$,

$$\mathfrak{A}\models\varphi[a]\Rightarrow\mathfrak{A}\models\varphi[b].$$

因为 $b\neq a$,所以 a 是 $\mathscr{L}_{\infty\kappa}$-不可定义的. □

7.4.6 引理 令 $\mathscr{L}$ 只有关系符号且幂$\leqslant\kappa$(其中 κ 是无穷基数),$\mathfrak{B}$,$\mathfrak{C}$ 是 $\mathscr{L}$ 的幂为 κ 的刚性结构,使得

$$\mathfrak{B}\not\cong\mathfrak{C},\quad \mathfrak{B}\equiv_{\infty\kappa}\mathfrak{C},$$

则 $\mathfrak{B}$ 有一个 $\mathscr{L}_{\infty\kappa}$-不可定义的元素.

证明：假设结论不成立，则对每一 $b\in B$，存在 b 的可定义公式 $\varphi_b\in \mathrm{Form}_1(\mathscr{L}_{\infty\kappa})$ 使得对所有 $c\in B$：

$$\mathfrak{B}\models\varphi_b[c]\Leftrightarrow b=c.$$

令 θ 是下列句子的合取：

① $\exists\vec{x}_n[\bigwedge_{i=1}^{n}\varphi_{b_i}(x_i)\wedge R(\vec{x}_n)]$，　　对每一 n 元关系符号 $R\in\mathscr{L}$ 使得 $\mathfrak{B}\models R[\vec{b}_n]$；

② $\exists\vec{x}_n[\bigwedge_{i=1}^{n}\varphi_{b_i}(x_i)\wedge\neg R(\vec{x}_n)]$，　　对每一 n 元关系符号 $R\in\mathscr{L}$ 使得 $\mathfrak{B}\models\neg R[\vec{b}_n]$；

③ $\forall x\bigvee\{\varphi_b(x):b\in B\}$.

显然 θ 是 $\mathscr{L}_{\infty\kappa}$的句子. 易证若 $\mathfrak{D}\models\theta$，则从 $\mathfrak{B}$ 到 $\mathfrak{D}$ 中的映射

$$f(b)=(\varphi_b)^{\mathfrak{D}}\text{ 的唯一元素}$$

是一个同构. 另一方面，$\mathfrak{B}\equiv_{\infty\kappa}\mathfrak{C}$ 蕴涵 $\mathfrak{C}\models\theta$，因此 $\mathfrak{B}\cong\mathfrak{C}$，而这与 $\mathfrak{B}\ncong\mathfrak{C}$ 矛盾. □

7.4.7 反例　若 κ 是不可数正则基数，则

$$\neg\mathrm{Beth}(\mathscr{L}_{\kappa^+\omega},\mathscr{L}_{\infty\kappa}).$$

证明：据上述(Ⅱ)和 7.4.6，不妨选择至少有一 $\mathscr{L}_{\infty\kappa}$-不可定义元素 a_0 的、幂为 κ 的刚性结构 $\mathfrak{A}_0$ 使得$\mathrm{Sm}(\mathfrak{A}_0)=\mathscr{L}_0$ 只包含关系符号且 $|\mathscr{L}_0|\leqslant\kappa$. 令 $\mathscr{L}_1$ 是 $\mathscr{L}_0$ 的不相交摹本，且

$$\mathscr{L}'=(\mathscr{L}_0\cup\{\bar{a}:a\in A_0\}\cup\{P_0\})\cup(\mathscr{L}_1\cup\{P_1\}),$$

其中 P_0,P_1 是两个新的互不相同的一元谓词.（**注意**：$\mathscr{L}'$对 $\mathscr{L}_0\cup\{\bar{a}:a\in A_0\}$和 $\mathscr{L}_0$ 的结构的扩张的全基数和是适当的.）若 S_0 是 $\mathscr{L}_0$ 的符号，则 S_1 指称 $\mathscr{L}_1$ 中对应 S_0 的符号. 最后，考虑不在 $\mathscr{L}'$ 中的两个互不相同的二元关系符号 F,G. 令 $\varphi(F)$是 $\mathscr{L}'_{\kappa^+\omega}(F)$的下列句子的合取：

(1) $\forall x\neg[P_0(x)\wedge P_1(x)]\wedge\forall x[P_0(x)\vee P_1(x)]$,

(2) $\forall x[P_0(x)\leftrightarrow\bigvee\{x\equiv\bar{a}:a\in A_0\}]$,

(3) $\neg(\bar{a}\equiv\bar{b})$，　对 $a,b\in A_0, a\neq b$，

(4) $R_0(\bar{a}_1,\cdots,\bar{a}_n)$，　其中 $R_0\in\mathscr{L}_0$ 是 n 元关系符号，$\vec{a}_n\in A_0$ 且 $\mathfrak{A}_0\models R_0[\vec{a}_n]$，

(5) $\neg R_0(\bar{a}_1,\cdots,\bar{a}_n)$，其中 $R_0\in\mathscr{L}_0$ 是 n 元关系符号，$\vec{a}_n\in A_0$ 且 $\mathfrak{A}_0\models\neg R_0[\vec{a}_n]$，

(6) $\forall xy[F(x,y)\rightarrow P_0(x)\wedge P_1(y)]$，

(7) $\forall x[P_0(x)\rightarrow\exists!\,yF(x,y)]$，

(8) $\forall y[P_1(y)\rightarrow\exists!\,xF(x,y)]$，

(9) $\forall\vec{x}_n\vec{y}_n[\bigwedge_{i=1}^{n}F(x_i,y_i)\rightarrow[R_0(\vec{x}_n)\leftrightarrow R_1(\vec{y}_n)]]$，

对所有 $n<\omega$ 和所有 n 元关系符号 $R_0\in\mathscr{L}_0$.

令 $\varphi(G)$ 指称用 G 置换 $\varphi(F)$ 中的 F 得到的句子．下证：

$$\varphi(F)\wedge\varphi(G)\models\forall xy[F(x,y)\leftrightarrow G(x,y)]. \tag{7.30}$$

(7.30)的证明：令 $\mathfrak{C}\in\mathrm{Mod}(\theta(F)\wedge\varphi(G))$．据上述合取肢(2)—(5)，从 $\mathfrak{A}_0$ 到 $(\mathfrak{C}\upharpoonright P_0^{\mathfrak{C}})\upharpoonright\mathscr{L}_0$ 中的映射 $f(a)=(\bar{a})^{\mathfrak{C}}$ 显然是同构．而据合取肢(6)—(9)，$f\doteq F^{\mathfrak{C}}$ 和 $g=G^{\mathfrak{C}}$ 是从 $(\mathfrak{C}\upharpoonright P_0^{\mathfrak{C}})\upharpoonright\mathscr{L}_1$ 到 $(\mathfrak{C}\upharpoonright P_1^{\mathfrak{C}})\upharpoonright\mathscr{L}_1$ 上的两个同构．因此 $g^{-1}\circ f$ 是 $(\mathfrak{C}\upharpoonright P_0^{\mathfrak{C}})\upharpoonright\mathscr{L}_0$ 上的自同构．因为该结构同构于 $\mathfrak{A}_0$，所以它是刚性结构．据刚性结构的定义，$g^{-1}\circ f=\mathrm{id}_{\mathfrak{C}\upharpoonright P_0^{\mathfrak{C}}}$，因此 $F^{\mathfrak{C}}=f=g=G^{\mathfrak{C}}$，即

$$\mathfrak{C}\models\forall xy[F(x,y)\leftrightarrow G(x,y)].$$

(7.30)断定 F 被 $\varphi(F)$ 隐定义．下证：

F 在 $\mathscr{L}'_{\infty\kappa}$ 中相对 $\varphi(F)$ 不是显定义的，即不存在一个公式 $\theta\in\mathrm{Form}_2(\mathscr{L}'_{\infty\kappa})$ 使得 $\varphi(F)\models\forall xy[F(x,y)\leftrightarrow\theta(x,y)]$. (7.31)

(7.31)的证明：假设存在这样的 θ，令 $\mathfrak{A}_1$ 是 $\mathfrak{A}_0$ 的不相交摹本，f 是从 $\mathfrak{A}_0$ 到 $\mathfrak{A}_1$ 上的摹本同构，$\mathfrak{B}=(\mathfrak{A}_0+\mathfrak{A}_1,f,a)_{a\in A_0}$．因此 $\mathrm{Sm}(\mathfrak{B})=\mathscr{L}'\cup\{F\}$，$(\bar{a})^{\mathfrak{B}}=a$，且 $F^{\mathfrak{B}}=f$．显然，$\mathfrak{B}\models\varphi(F)$.

因为 a_0 是 $\mathscr{L}_{\infty\kappa}$-不可定义的，所以存在 $b\in A_0$ 使得

$$(\mathfrak{A}_0,a_0)\equiv_{\infty\kappa}(\mathfrak{A}_0,b_0),\quad a_0\neq b_0.$$

因为 $f:\mathfrak{A}_0\cong\mathfrak{A}_1$，所以

$$(\mathfrak{A}_1,f(a_0))\equiv_{\infty\kappa}(\mathfrak{A}_1,f(b_0)),\quad f(a_0)\neq f(b_0).$$

因为 $(\mathfrak{A}_0,a)_{a\in A_0}$ 与自身是 $\mathscr{L}_{\infty\kappa}$-等价的，且据上述（Ⅱ），$\mathscr{L}_{\infty\kappa}$-等价性在扩张的全基数和下封闭，所以有

$$(\mathfrak{A}_0,a)_{a\in A_0}\widetilde{+}(\mathfrak{A}_1,f(a_0))\equiv_{\infty\kappa}(\mathfrak{A}_0,a)_{a\in A_0}\widetilde{+}(\mathfrak{A}_1,f(b_0)),$$

或者，等价地，我们有

$$(\mathfrak{B}\upharpoonright\mathscr{L}'',\ a_0,\ f(a_0))\equiv_{\infty\kappa}(\mathfrak{B}\upharpoonright\mathscr{L}'',\ a_0,\ f(b_0)),\quad(7.32)$$

其中 $\mathscr{L}''=\mathscr{L}'-\{\bar{a}_0\}$. 因为 θ 显定义 F，所以

$$\mathfrak{B}\upharpoonright\mathscr{L}'\models\theta[a_0,f(a_0)],$$

据(7.32)，$\mathfrak{B}\upharpoonright\mathscr{L}'\models\theta[a_0,f(b_0)]$. 因为 $f=F^{\mathfrak{B}}$ 是函数且 $f(a_0)\neq f(b_0)$，所以据假设，这与 $F^{\mathfrak{B}}=f:a_0\mapsto f(a_0)$ 是基本同构矛盾. 因此证明了(7.31)，所以 F 在 $\mathscr{L}'_{\infty\kappa}$ 中相对 $\varphi(F)$ 不是显定义的.

因为 $\varphi(F)$ 是 $\mathscr{L}'_{\kappa^+\omega}(F)$ 中的句子，所以

$$\neg\mathrm{Beth}(\mathscr{L}_{\kappa^+\omega},\mathscr{L}_{\infty\kappa}).\quad\square$$

说明：反例 7.4.7 蕴涵 Beth-可定义性定理相对其它几种语言不成立. 事实上，我们有：

7.4.8 定理 （1）对任意无穷基数 κ，$\neg\mathrm{Beth}(\mathscr{L}_{\infty\omega},\mathscr{L}_{\infty\kappa})$.

（2）$\neg\mathrm{Beth}(\mathscr{L}_{\infty\omega},\mathscr{L}_{\infty\omega})$.

（3）若 κ 是奇异基数且 $\omega\leqslant\lambda<\kappa$，则

$$\neg\mathrm{Beth}(\mathscr{L}_{\kappa\omega},\mathscr{L}_{\infty\lambda}),\quad\neg\mathrm{Beth}(\mathscr{L}_{\kappa^+\omega},\mathscr{L}_{\infty\lambda}).$$

（4）若 κ 是奇异基数，则

$$\neg\mathrm{Beth}(\mathscr{L}_{\kappa\omega},\mathscr{L}_{\kappa\omega}),\quad\neg\mathrm{Beth}(\mathscr{L}_{\kappa^+\omega},\mathscr{L}_{\kappa^+\omega}).$$

（5）若 $\kappa>\omega$ 是正则基数，则

$$\neg\mathrm{Beth}(\mathscr{L}_{\kappa^+\omega},\mathscr{L}_{(2^{<\kappa})^+,\kappa}).$$

（6）若 κ 是无穷基数，则

$$\neg\mathrm{Beth}(\mathscr{L}_{\kappa^{++}\omega},\mathscr{L}_{(2^\kappa)^+,\kappa^+}).$$

证明：我们首先注意到 $\neg\mathrm{Beth}(\mathscr{L},\mathscr{L}')$ 在 $\mathscr{L}$ 的增加和 $\mathscr{L}'$ 的

减少下保持不变. 这里的意思是指若 $\mathscr{L}_i,\mathscr{L}_i'$（其中 $i=1,2$）是语言使得 $\mathscr{L}_1$（分别地，$\mathscr{L}_2'$）的每一句子是 $\mathscr{L}_1'$（分别地，$\mathscr{L}_2$）的句子且有相同的结构作为其模型，则

$$\neg\mathrm{Beth}(\mathscr{L}_1,\mathscr{L}_2) \Rightarrow \neg\mathrm{Beth}(\mathscr{L}_1',\mathscr{L}_2').$$

这个蕴涵关系的成立显然依赖于 $\neg\mathrm{Beth}(\mathscr{L},\mathscr{L}')$ 的形式.

因此反例 7.4.7 直接蕴涵(5)和对任意无穷基数 κ，

$$\neg\mathrm{Beth}(\mathscr{L}_{\kappa^{++}\omega},\mathscr{L}_{\infty\kappa^+}). \tag{7.33}$$

而(7.33)蕴涵(1)和(6). 类似地(3) $\Rightarrow$ (4). (2)是(1)的特例.

证(3)：假设 κ 是奇异基数且 $\omega\leqslant\lambda<\kappa$. 因为 $\lambda^{++}<\kappa<\kappa^+$，且 $\lambda<\lambda^+$，所以据反例 7.4.7，

$$\neg\mathrm{Beth}(\mathscr{L}_{\kappa^+\omega},\mathscr{L}_{\infty\kappa}) \Rightarrow \neg\mathrm{Beth}(\mathscr{L}_{\lambda^{++}\omega},\mathscr{L}_{\infty\lambda^+})$$
$$\Rightarrow \neg\mathrm{Beth}(\mathscr{L}_{\kappa\omega},\mathscr{L}_{\infty\lambda}). \quad \square$$

二、保持性定理

保持性定理是模型论的重要定理，它有许多形式，主要研究某个句子集的模型的某些代数性质与这个句子集本身的语法形式之间的关系. 我们以前接触过一些保持性定理（包括练习），以后还要陆续研究，这里只是介绍两个运用内插定理的保持性定理.

我们称句子 φ **相对 σ 在同态下保持** $\Leftrightarrow$ 对任何 $\mathfrak{A},\mathfrak{B}$，若 $\mathfrak{A}\models\sigma\wedge\varphi$，$\mathfrak{B}\models\sigma$，且 $\mathfrak{B}$ 是 $\mathfrak{A}$ 的同态象，则 $\mathfrak{B}\models\varphi$.

7.4.9 定理 令 σ 和 φ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$ 的句子使得 φ 有模型，φ 相对 σ 在同态下保持 $\Leftrightarrow$ 若 $\kappa=\omega_1$，则存在 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 的正句子 θ，若 κ 是大于 ω_1 的正则基数或是共尾度为 ω 的奇异基数，则存在 $\mathscr{L}_{2^{>\kappa},\kappa}$ 的正句子 θ，使得

$$\models\sigma\rightarrow(\varphi\leftrightarrow\theta).$$

证明："$\Rightarrow$"：若 φ 相对 σ 在同态下保持，则我们可以象在 7.1.3 的证明中那样消除 σ 和 φ 中所有的函数和个体常元符号，然后施 Lyndon-无等词内插定理于

$$\psi \wedge \sigma(E) \wedge \varphi(E) \to [\sigma_0 \wedge \psi_1 \wedge \sigma_1(E_1) \to \varphi_1(E_1)],$$

其中 E 是新二元关系符号用于置换 σ 和 φ 中等词符号的每一出现从而形成 $\sigma(E)$ 和 $\varphi(E)$；ψ 是句子相对 σ 和 φ 中每一关系符号表述 E 是一等价且同余(congruence)关系；令 E_1 是一新二元关系符号，且对 $\sigma(E)$ 和 $\varphi(E)$ 中每一符号 R，R_1 是一与 R 同元数的新关系符号，ψ_1，$\sigma_1(E_1)$ 和 $\varphi_1(E_1)$ 是分别用 E_1 置换 E、用 R_1 置换 ψ，$\sigma(E)$，$\varphi(E)$ 中每一 R 得到的公式；对 $\sigma(E)$ 和 $\varphi(E)$ 的每一关系符号 R，σ_0 是所有下列句子的合取：

$\forall xy[E(x,y) \to E_1(x,y)]$，

$\forall \vec{x}_n[R(\vec{x}_n) \to R_1(\vec{x}_n)]$， R 是 $\sigma(E)$ 和 $\varphi(E)$ 中的关系符号.

因为 φ 相对 σ 在同态下保持，所以存在只包含 E 和 $\mathscr{L}$ 的关系符号的句子 $\theta(E)$ 使得

$$\models \psi \wedge \sigma(E) \wedge \varphi(E) \to \theta(E). \tag{7.34}$$

$$\models \theta(E) \to [\sigma_0 \wedge \psi_1 \wedge \sigma_1(E_1) \to \varphi_1(E_1)].$$

因为 θ 的关系符号在 $\sigma_0 \wedge \psi_1 \wedge \sigma_1(E_1) \to \varphi_1(E_1)$ 中只是正出现，所以 θ 是正句子. 用原来的关系符号置换新的关系符号，我们就有

$$\models \theta(E) \to [\psi \wedge \sigma(E) \to \varphi(E)]. \tag{7.35}$$

据(7.34)和(7.35)，我们有

$$\models \psi \wedge \sigma(E) \to [\varphi(E) \leftrightarrow \theta(E)].$$

用等词符号置换 E，ψ 就成为有效式且 $\theta(E)$ 成为正句子，所以我们就得到我们希望的结果：$\models \sigma \to (\varphi \leftrightarrow \theta)$.

"$\Leftarrow$"：施归纳于句子的复杂度易见每一正句子在同态下保持，因此若对正句子 θ，$\models \sigma \to (\varphi \leftrightarrow \theta)$，则 φ 相对 σ 在同态下保持. □

说明：若 κ 是共尾度为 ω 的奇异基数，则我们可以表述 $\mathscr{L}_{\kappa^+\omega}$ 的上述定理且得到 $\mathscr{L}_{2^{>\kappa},\kappa}$-正句子. 若 κ 还是强极限基数，则该正句子是 $\mathscr{L}_{\kappa^+\kappa}$ 中的句子.

我们称 **φ 相对 σ 在子模型(扩张模型)下保持** $\Leftrightarrow$ 若 $\mathfrak{A} \models \varphi \wedge \sigma$，$\mathfrak{B} \models \sigma$ 且 $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ ($\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}$)，则 $\mathfrak{B} \models \varphi$.

7.4.10 保持性定理(Malitz,[1966]) 假设 σ 和 φ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$ 的句子,$\kappa>\omega$,且 κ 是正则基数或 $\mathrm{cf}(\kappa)=\omega$,则 φ 相对 σ 在子模型下保持 $\Leftrightarrow$ 存在 $\mathscr{L}_{2^{>\kappa},\kappa}$(若 $\kappa=\omega_1$,则存在 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$)的全称句 θ 使得

$$\models\sigma\rightarrow(\varphi\leftrightarrow\theta).$$

证明:假设以通常方式(例如,象在 7.1.3 的证明中那样)用关系符号置换函数符号后 $\mathscr{L}$ 没有函数符号,并且给 σ 增加一个表述"新关系符号是函数"的句子. 若 $\kappa>\omega$ 是正则基数,则存在 $\lambda<\kappa$ 使得 σ 和 φ 是 $\mathscr{L}_{\lambda^+\omega}$ 的句子.

令 D 是不在 σ 和 φ 中出现的个体常元集使得若 κ 是正则基数且 $\mathrm{cf}(\kappa)>\omega$,则 $|D|=\lambda$;若 $\mathrm{cf}(\kappa)=\omega$,则 $|D|=\kappa$. 对 $\mathscr{L}_{\lambda^+\omega}$(若 $\mathrm{cf}(\kappa)=\omega$ 时,则对 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$)的公式 ψ,定义 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$ 的无量词公式 ψ^D 如下:

$$\psi^D=\psi,\quad \text{若 }\psi\text{ 是原子公式},$$
$$(\neg\psi)^D=\neg(\psi^D),$$
$$(\bigwedge\Psi)^D=\bigwedge\{\psi^D:\psi\in\Psi\},$$
$$(\bigvee\Psi)^D=\bigvee\{\psi^D:\psi\in\Psi\},$$
$$(\forall x\psi(x))^D=\bigwedge\{\psi^D(x/d):d\in D\},$$
$$(\exists x\psi(x))^D=\bigvee\{\psi^D(x/d):d\in D\}.$$

"$\Rightarrow$":若 φ 相对 σ 在子模型下保持,则 $\models\sigma\wedge\varphi\rightarrow(\sigma^D\rightarrow\varphi^D)$. 因为 $\sigma^D\rightarrow\varphi^D$ 是无量词公式,所以它也是全称公式. 由于已假设 $\mathscr{L}$ 无函数符号,所以我们能运用 Malitz-内插定理于 $\mathscr{L}_{\lambda^+\omega}$ 的上述句子,即存在 $\mathscr{L}_{2^{>(\lambda^+)},\lambda^+}$,从而存在 $\mathscr{L}_{2^{>\kappa},\kappa}$(若 $\kappa=\omega_1$,则存在 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$),的全称句子 θ 使得

$$\models\sigma\wedge\varphi\rightarrow\theta,\quad \models\theta\rightarrow(\sigma^D\rightarrow\varphi^D). \tag{7.36}$$

假设 $\sigma\rightarrow(\theta\rightarrow\varphi)$ 不是有效的,则存在 $\mathfrak{A}\models\sigma\wedge\theta\wedge\neg\varphi$. 据向下-Lōwenheim-Skolem-定理(参见后面有关章节),存在 $\mathfrak{A}$ 的子模型 $\mathfrak{B}$ 使得 $\mathfrak{B}\models\sigma\wedge\neg\varphi$ 且 $|B|\leqslant\lambda$(若 $\mathrm{cf}(\kappa)=\omega$,则 $|B|\leqslant\kappa$). 显然,B 能由 D 枚举使得 $\mathfrak{B}\models\sigma^D\wedge\neg\varphi^D$,所以 $\mathfrak{B}\models\neg\theta$. 但 $\neg\theta$ 是存在句且 $\mathfrak{B}\subseteq\mathfrak{A}$,所以 $\mathfrak{A}\models\neg\theta$,矛盾. 因此我们有 $\models\sigma\rightarrow(\theta\rightarrow\varphi)$. 另一方面,据

(7.36)，有$\models \sigma \to (\varphi \to \theta)$，因此有$\models \sigma \to (\varphi \leftrightarrow \theta)$.

"$\Leftarrow$"：假设存在满足题设要求的θ，且假设$\mathfrak{A} \models \sigma \wedge \varphi$，$\mathfrak{B} \models \sigma$且$\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$，则$\mathfrak{A} \models \theta$. 因为$\theta$是全称的，所以$\mathfrak{B} \models \theta$，因此$\mathfrak{B} \models \varphi$. □

注意：据反例 7.3.3 前的说明，若κ是强不可达基数，上述定理中的全称句也可以具有前束全称的形式. 若κ是共尾度为ω的强极限基数且φ和σ是$\mathscr{L}_{\kappa^+\omega}$的句子，则$\theta$是$\mathscr{L}_{\kappa^+\kappa}$的句子.

7.4.11 推论 令σ, φ, κ规定如 7.4.10，则φ相对σ在扩张模型下保持$\Leftrightarrow$存在$\mathscr{L}_{2^{>\kappa}, \kappa}$(若$\kappa = \omega_1$，则存在$\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$)-存在句$\theta$使得

$$\models \sigma \to (\varphi \leftrightarrow \theta).$$

证明：φ相对σ在扩张模型下保持

$\Leftrightarrow \neg\varphi$相对$\sigma$在子模型下保持. □

7.4.12 推论 令$\mathscr{M}$是$\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的一初等类(见 1.3.15)，则

$$\mathscr{M} = \mathbf{S}(\mathscr{M}) \Leftrightarrow \mathscr{M} \in \mathsf{UC}(\mathscr{L}_{\omega_1\omega}),$$

其中$\mathbf{S}(\mathscr{M})$表示所有同构$\mathscr{M}$的元素的子结构的结构构成的类，$\mathsf{UC}(\mathscr{L}_{\omega_1\omega})$表示$\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的某个全称句的所有的模型的类. □

注意：一个更强的结果在$\mathscr{L}_{\omega\omega}$中有效：

$$\mathscr{M} \in \mathsf{EC}(\mathscr{L}_{\omega\omega}) \Rightarrow \mathbf{S}(\mathscr{M}) \in \mathsf{UC}(\mathscr{L}_{\omega\omega}).$$

但这个结果不能扩张到$\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$. 下面的反例说明了这一点.

7.4.13 反例 令语言$\mathscr{L}$包含二元关系符号R，则存在$\sigma \in \mathrm{Sent}(\mathscr{L}_{\omega_1\omega})$使得对所有无穷基数$\kappa$，

$$\mathbf{S}(\mathrm{Mod}(\sigma)) \notin \mathsf{EC}_\Delta(\mathscr{L}_{\kappa\omega}).$$

证明：令$\mathscr{M}$是所有同构$\langle \omega, S \rangle$的结构的类，其中$S$是集合$\{\langle x, x+1 \rangle : x \in \omega\}$. 令$\sigma$是下列$\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的句子的合取：

$\forall x \exists y R(x, y)$,

$\forall xyz[R(x,y) \wedge R(x,z) \to y \equiv z]$,

$\forall xyz[R(x,y) \wedge R(z,y) \to x \equiv z]$,

$\neg \exists x \bigvee_{n < \omega - \{0\}} [\exists x_0, \cdots, x_n (x_0 \equiv x \wedge x_n \equiv x \wedge \bigwedge_{i=0}^{n-1} R(x_i, x_{i+1}))]$,

$$\forall xy\exists uv[[(x\equiv u\wedge y\equiv v)\vee(x\equiv v\wedge y\equiv u)]\wedge[u\equiv v$$
$$\vee\bigvee_{n<\omega-\{0\}}[\exists\vec{x}_n(x_1\equiv u\wedge x_n\equiv v\wedge\bigwedge_{i=1}^{n-1}R(x_i,x_{i+1}))]]].$$

显然，
$$\mathscr{M}=\mathrm{Mod}(\sigma).$$

令 $\mathfrak{B}=\langle E,\varnothing\rangle$，其中 E 指称所有偶整数的集合，显然 $S\cap E^2=\varnothing$，所以 $\mathfrak{B}\in\mathbf{S}(\mathscr{M})$.

对 $\mathscr{L}_{\infty}$的每一公式 φ，令 φ^* 是用 $x\equiv y\wedge\neg(x\equiv y)$置换 φ 中形如 $R(x,y)$的每一原子公式得到的公式，显然 φ^* 没有非逻辑符号，且对每一集合 C 和每一 $\vec{c}_n\in C$，有

$$\langle C,\varnothing\rangle\models\varphi[\vec{c}_n]\Leftrightarrow\langle C\rangle\models\varphi^*[\vec{c}_n].\qquad(7.37)$$

令 φ 是 $\mathscr{L}_{\infty}$的任意句子使得 $\mathfrak{B}\models\varphi$，据(7.37)，$\langle E\rangle\models\varphi^*$. 据 1.3.10，对每一无穷集 C，有 $\langle C\rangle\models\varphi^*$，所以据(7.37)，有 $\langle C,\varnothing\rangle\models\varphi$. 因此，若对某个基数 κ 和某个 $\Sigma\subseteq\mathrm{Sent}(\mathscr{L}_{\infty})$，$\mathbf{S}(\mathscr{M})=\mathrm{Mod}(\Sigma)$，则对每一无穷集 C，$\langle C,\varnothing\rangle\in\mathrm{Mod}(\Sigma)=\mathbf{S}(\mathscr{M})$，但这显然是荒谬的，因为 $\mathbf{S}(\mathscr{M})$只包含可数结构. □

练　习

7.4.14 对任何 $\mathscr{L}$ 和 $\mathscr{L}$ 的任何句子 σ，证下列命题等价：

(1) n 元关系 R 被 σ 隐定义.

(2) 对 $\mathrm{Sm}(\sigma)-\{R\}$的每一结构 $\mathfrak{A}$ 和 A^n 的每一对子集 P,Q，

$$(\mathfrak{A},P),(\mathfrak{A},Q)\in\mathrm{Mod}(\sigma)\Rightarrow P=Q.$$

(3) 对 $\mathrm{Sm}(\sigma)-\{R\}$的每一对结构 $\mathfrak{A},\mathfrak{B}$，每一 $P\subseteq A^n,Q\subseteq B^n$ 和每一映射 $f:A\to B$，若 $f:\mathfrak{A}\cong\mathfrak{B}$ 且$(\mathfrak{A},P),(\mathfrak{B},Q)\in\mathrm{Mod}(\sigma)$，则

$$f:(\mathfrak{A},P)\cong(\mathfrak{B},Q).$$

7.4.15(Barwise, Makkai, J. Weinstein)

令 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 是 $\mathscr{L}$ 的可数模型，则

$\mathfrak{A}$ 同构嵌入 $\mathfrak{B}$

$\Leftrightarrow$ $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的每一在 $\mathfrak{B}$ 中成立的全称句在 $\mathfrak{A}$ 中成立.

第 8 章　其它构造结构的方法

我们知道经典模型论有四种主要的构造结构的方法，它们是 Henkin 式的个体常元方法、链并方法(主要指初等链方法)、Skolem-函数和不可辨元(indiscernible)方法、超积方法．无穷逻辑也相应有这四种方法，只是形式和内容有所不同，有的方法至今取得的成果较为贫乏，有待进一步发展．

在第 1 章 § 3，我们初步介绍了链并方法(参见 1.3.25—1.3.29)，在后面的有关章节，我们还要对此进行深入的讨论．第 3 章的**模型存在定理**的证明实质上就是 Henkin-个体常元方法的运用．但众所周知，这种方法构造的结构(模型)的基数受到一定的限制，不能得到更大基数的模型．所以我们在展开无穷逻辑模型论之前，有必要先在本章简略地介绍其它三种构造结构的方法，为后面的模型论奠定基础．

本章 § 1 讨论如何用 Skolem-函数构造 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$和 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$的片段以及 $\mathscr{L}_{\kappa^+\lambda}$的 Skolem-语言和结构，并且用 Skolem-函数方法证明可数片段的 Löwenheim-Skolem-定理及其概括、不可数片段的完全性定理和链并引理． § 2 讨论如何把 Skolem-函数运用于不可辨元集．首先讨论 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$和 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$的片段的不可辨元集，证明关于它们的基本定理．然后把不可辨元的概念推广到 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$和 $\mathscr{L}_{\infty\lambda}$上，证明 $\mathscr{L}_{\infty\lambda}$-不可辨元的存在．最后运用不可辨元的方法证明集合论的一个较重要的定理． § 3 分别讨论 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的片段 $\mathscr{L}_{\mathbb{A}}$ 和 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$中的超积基本定理和其它一些基本性质，特别是关于超幂的一些基本性质．

§1 用 Skolem-函数构造结构

Skolem-函数方法在无穷逻辑中主要运用于有穷量词语言. 本章以后我们主要考虑这里讨论的两种特殊但又很重要的语言：$\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$和 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$的某些片段的相应结果. 用 Skolem-函数方法可以证明许多模型论结果，本节除了给出 Skolem-函数及其语言和结构的定义之外，作为说明，还初步运用 Skolem-函数方法得到一些结果，其它的有关结果将在后面有关章节中分别讨论.

在分情况讨论前，我们先给出下列定义：令 $\mathscr{L}$ 是无穷语言，$\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是 $\mathscr{L}$ 的任意片段(**注意**：本节的 $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \cdots$ 不必然指称可容集)，$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ 是 $\mathscr{L}$ 的任意结构. 称 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathfrak{B}$ 的 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$-**初等子结构**，记作 $\mathfrak{A} \prec_{\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}} \mathfrak{B}$，$\Leftrightarrow$ $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ 且对每一公式 $\varphi(\vec{x}_n) \in \mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 和 $\vec{a}_n \in A$，

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}_n] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[\vec{a}_n].$$

称 $\mathfrak{A}$ $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$-**初等嵌入** $\mathfrak{B}$，记作 $\mathfrak{A} \preceq_{\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}} \mathfrak{B}$，$\Leftrightarrow$ $\mathfrak{A}$ 同构于 $\mathfrak{B}$ 的某个 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$-初等子结构.

注意：上述定义与 1.3.20 是一致的.

一、$\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的可数片段中的 Skolem-函数

8.1.1 定义 令 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$-可数片段，$\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的 **Skolem-语言** $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}^*$ 递归构造如下：

第一步构造语言 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}^{(1)}$. $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}^{(1)}$ 有 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的所有符号且对每一存在公式$\exists x\varphi(\vec{y}_n) \in \mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$(其中诸变元 $\vec{y}_n$ 不约束出现)，$\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}^{(1)}$ 有一新 n 元函数符号 $F_{\exists x\varphi}$(称为 **Skolem-函数符号**). 我们定义片段 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}^{(1)}$ **是包含** $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的所有公式和所有新函数符号 $F_{\exists x\varphi}$的最小可数片段. 对每一 $n<\omega, n\geqslant 1$，定义 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}^{(n+1)} = \mathscr{L}_{\mathfrak{M}}^{(n)(1)}$. 最后定义

$$\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}^{*}=\bigcup_{n<\omega}\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}^{(n)}.$$

我们称 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}^{*}$ 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的 **Skolem-膨胀（片段）**.

注意：$\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}^{*}$ 也是可数片段.

8.1.2 定义 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的 **Skolem-理论**，记作 T_{Skolem}，是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}^{*}$ 中的理论，其公理是所有 $F_{\exists x\varphi}$的下列形式的定义公理：

$$\exists x\varphi(\vec{y}_n)\rightarrow\varphi(F_{\exists x\varphi}(\vec{y}_n),\vec{y}_n),$$

其中$\exists x\varphi$是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}^{*}$ 的公式，$\vec{y}_n$ 在$\exists x\varphi$中不约束出现.

注意：上述定义公理都是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}^{*}$ 的公式，因为若$\exists x\varphi$在 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}^{(n)}$ 中，则其定义公理在 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}^{(n+1)}$ 中.（因为片段在有穷联结词，量词和代换下封闭.）

8.1.3 定义 令 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathscr{L}$ 的结构，称 $\mathfrak{A}^{*}$ 是 $\mathfrak{A}$ 的 **Skolem-膨胀（结构）** $\Leftrightarrow$ 语言 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}^{*}$ 的下列结构是 T_{Skolem}的模型：

$$\mathfrak{A}^{*}=(\mathfrak{A},G_{\exists x\varphi})_{\exists x\varphi\in\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}^{*}},$$

其中 $G_{\exists x\varphi}$是 $\mathfrak{A}$ 对 $F_{\exists x\varphi}$的解释.

为了得到有关 Skolem-膨胀结构的基本结果，我们首先来证明关于初等子模型的一个有用的引理.

8.1.4 引理 令 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的一片段，$\mathfrak{A}$，$\mathfrak{B}$ 是 $\mathscr{L}$ 的结构，则 $\mathfrak{B}\prec_{\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}}\mathfrak{A}\Leftrightarrow\mathfrak{B}\subseteq\mathfrak{A}$ 且对所有$\exists x\varphi(\vec{y}_n)\in\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 和所有 $\vec{b}_n\in B$，

$$\mathfrak{A}\models\exists x\varphi[\vec{b}_n]\Rightarrow\text{存在 }a\in B\text{ 使得 }\mathfrak{A}\models\varphi[a,\vec{b}_n].$$

证明：施归纳于公式的复杂度，我们来证明对所有公式 $\psi(\vec{y}_n)\in\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 和所有 $\vec{b}_n\in B$，

$$\mathfrak{A}\models\psi[\vec{b}_n]\Leftrightarrow\mathfrak{B}\models\psi[\vec{b}_n].$$

因为 $\mathfrak{B}\subseteq\mathfrak{A}$，所以当 ψ 是原子公式时，上述关系成立. 因为含有穷多个自由变元的公式的子公式也只含有穷多个自由变元，因此我们只须考虑这样的公式. 若 ψ 形如$\neg\theta$或$\bigwedge\Theta$，则据归纳假设，θ 或 Θ 中每一元有上述性质，因此易证 ψ 也具有上述性质. 设 ψ 形

如$\exists x\theta(\vec{y}_n)$. 若$\mathfrak{B}\models\psi[\vec{b}_n]$,则存在$a\in B$使得$\mathfrak{B}\models\theta[a,\vec{b}_n]$,据归纳假设,$\mathfrak{A}\models\theta[a,\vec{b}_n]$,即$\mathfrak{A}\models\psi[\vec{b}_n]$. 设$\mathfrak{A}\models\psi[\vec{b}_n]$,则据题设,存在$a\in B$使得$\mathfrak{A}\models\theta[a,\vec{b}_n]$,因此据归纳假设,$\mathfrak{B}\models\psi[\vec{b}_n]$. □

8.1.5 定理

令$\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$是$\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$-可数片段,$\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}^*$是$\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$的 Skolem-语言,

(1) $\mathscr{L}$的每一结构$\mathfrak{A}$有一相对$\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}^*$的 Skolem-膨胀.

(2) 令$\mathfrak{A}^*$是$\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}^*$的$T_{\text{Skolem}}$的模型,则每一子模型$\mathfrak{B}^*\subseteq\mathfrak{A}^*$是$\mathfrak{A}^*$的$\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}^*$-初等子模型,即

$$\mathfrak{B}^*\prec_{\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}^*}\mathfrak{A}^*.$$

证明:(1) 令$\mathfrak{A}^{(0)}=\mathfrak{A}$,$\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}^{(0)}=\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$. 假设$n<\omega$且$\mathfrak{A}^{(n)}$是$\mathfrak{A}$相对$\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}^{(n)}$的膨胀使得$\mathfrak{A}^{(n)}$是$T_{\text{Skolem}}\cap\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}^{(n)}$的模型. 令$\exists x\varphi(\vec{y}_n)$是$\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}^{(n)}$中的公式且$\vec{y}_n$不在其中约束出现. 不妨选择函数$F_{\exists x\varphi}$使得对所有$\vec{b}_n\in A$,

$$\mathfrak{A}^{(n)}\models\exists x\varphi[\vec{b}_n]\Rightarrow\mathfrak{A}^{(n)}\models\varphi[a,\vec{b}_n],$$

其中$a=F_{\exists x\varphi}^{\mathfrak{A}^{(n)}}(\vec{b}_n)$,这使$\mathfrak{A}^{(n+1)}$成为$T_{\text{Skolem}}\cap\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}^{(n+1)}$的模型,因此

$$\mathfrak{A}^*=\bigcup_{n<\omega}\mathfrak{A}^{(n)}\models T_{\text{Skolem}}.$$

(2) 在此我们要用引理 8.1.4,但用片段$\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}^*$来代替$\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$. 令$\exists x\varphi(\vec{y}_n)$是$\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}^*$的公式,选择一不在$\exists x\varphi$中出现的变元$\vec{u}_n$代换$\exists x\varphi(\vec{y}_n)$中自由出现的$\vec{y}_n$,从而得到$\exists x\varphi(\vec{u}_n)$. 假设$\vec{b}_n\in B$且

$$\mathfrak{A}^*\models\exists x\varphi(\vec{y}_n)[\vec{b}_n],$$

据可满足定义,$\mathfrak{A}^*\models\exists x\varphi(\vec{u}_n)[\vec{b}_n]$. 因为$\mathfrak{A}^*\models T_{\text{Skolem}}$,所以

$$\mathfrak{A}^*\models\exists x\varphi(\vec{u}_n)\rightarrow\varphi(F_{\exists x\varphi}(\vec{u}_n),\vec{u}_n)[\vec{b}_n],$$

因此$\mathfrak{A}^*\models\varphi(F_{\exists x\varphi}(\vec{u}_n),\vec{u}_n)[\vec{b}_n]$. 令$a=F_{\exists x\varphi}^{\mathfrak{A}^*}(\vec{b}_n)$,则

$$\mathfrak{A}^*\models\varphi(x,\vec{u}_n)[a,\vec{b}_n],$$

因此

$$\mathfrak{A}^*\models\varphi(x,\vec{y}_n)[a,\vec{b}_n].$$

因为 $\mathfrak{B}^* \subseteq \mathfrak{A}^*$ 且 $\vec{b}_n \in B$，所以 $a \in B$，因此据引理 8.1.4，

$$\mathfrak{B}^* \prec_{\mathscr{L}^*_{\mathfrak{M}}} \mathfrak{A}^*. \quad \square$$

用 Skolem-函数方法，易得下列定理；它是对 Tarski-Vaught 的[1957]中一结果的扩张：

8.1.6 向下-Löwenheim-Skolem-定理 令 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 的可数片段，$\mathfrak{A}$ 是 $\mathscr{L}$ 的结构，$X \subseteq A$，且 δ 是无穷基数使得 $|X| \leqslant \delta \leqslant |A|$，则 $\mathfrak{A}$ 有 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$-初等子结构 $\mathfrak{B} \prec_{\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}} \mathfrak{A}$ 使得 $X \subseteq B$ 且 $|B| = \delta$.

证明：选择幂为 δ 的 Y 使 $X \subseteq Y \subseteq A$. 令 $\mathfrak{A}^*$ 是 $\mathfrak{A}$ 的 Skolem-膨胀，$\mathfrak{B}^*$ 是由 Y 生成的 $\mathfrak{A}$ 的子结构，则据 8.1.5(2)，$\mathfrak{B}^* \prec_{\mathscr{L}^*_{\mathfrak{M}}} \mathfrak{A}^*$. 令 $\mathfrak{B}$ 是 $\mathfrak{B}^*$ 对 $\mathscr{L}$ 的归约，易证 $\mathfrak{B} \prec_{\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}} \mathfrak{A}$. 因为 B 是由 Y 生成的，所以 $|B| \geqslant |Y| = \delta$. 因为 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是可数片段，δ 又是无穷基数，所以 $|B| \leqslant \delta$，因此 $|B| = |Y| = \delta$. $\square$

二、$\mathscr{L}_{\kappa^+\lambda}$ 的 Skolem-函数

8.1.7 向下-Löwenheim-Skolem-定理（W. Hanf，[1962]）

假设 $|\mathscr{L}| \leqslant \kappa$ 且选择公理成立，令 σ 是 $\mathscr{L}_{\kappa^+\lambda}$ 的句子，δ 是基数使得 $\kappa \leqslant \delta = \delta^{<\lambda}$，则对任意结构 $\mathfrak{A}$ 和任意 $A_0 \subseteq A$ 使得 $|A_0| \leqslant \delta \leqslant |A|$，存在 $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ 使得 $A_0 \subseteq B$，$|B| = \delta$，且对 σ 的每一子公式 φ 和每一 $f \in B^{\mathrm{Fv}(\varphi)}$，

$$\mathfrak{B} \models \varphi[f] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi[f].$$

特别地，
$$\mathfrak{B} \models \sigma \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \sigma.$$

证明：本定理的证明类似 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$ 的相应定理的证明，即我们对 σ 中的量词如前定义 Skolem-函数，然后在这些函数下封闭 A_0. 当然，这里的证明的细节更加技巧，因为无穷句本身的结构更复杂，此外还必须考虑基数问题.

不妨设 $\lambda \geqslant \omega$，且 σ 不包含全称量词. 令 $\Sigma = \mathrm{Sub}(\sigma)$，据 1.3.2，

$|\Sigma|\leqslant\kappa$ 且 Σ 中每一公式有 $<\lambda$ 个自由变元. 考虑 Σ 中任意形如 $\varphi=\exists X\psi(Y)$ 的公式,其中 $Y=\mathrm{Fv}(\varphi)$ 是 $\tau<\lambda$ 个自由变元的序列,X 是 $\mu<\lambda$ 个变元的序列. 定义 $\langle F_{\varphi,\xi}:\xi<\mu\rangle$ 是 φ 的 μ 个 Skolem-函数的序列使得每一函数 $F_{\varphi,\xi}$ 有 τ 个变目. 对任意 $f\in A^Y$,

$$\mathfrak{A}\models\varphi[f]\Leftrightarrow \text{存在映射 } g\in A^X \text{ 使得 } \mathfrak{A}\models\psi[f*g],$$

其中对所有 $\xi<\mu, x_\xi\in X, g(x_\xi)=F_{\varphi,\xi}(\mathrm{Ran}(f))$. 显然,据选择公理,这是容易做到的. 令 $\mathbf{F}=\{F_{\varphi,\xi}:\varphi\in\Sigma,\xi<\mu\}$,因为 Σ 中每一公式至多对 $\mathbf{F}$ 贡献 κ 个函数,所以 $|\mathbf{F}|\leqslant\kappa$.

若 $\mathfrak{B}\subseteq\mathfrak{A}$ 使得 B 在 $\mathbf{F}$ 的所有函数下封闭,则施归纳于 Σ 易证,对 Σ 中所有 φ 和所有 $g\in B^{\mathrm{Fv}(\varphi)}$,

$$\mathfrak{B}\models\varphi[g]\Leftrightarrow\mathfrak{A}\models\varphi[g].$$

假设 A_0 和 δ 如题设规定,不妨就设 $|A_0|=\delta$. 令 B 是 A_0 在 $\mathbf{F}$ 中的函数和 $\mathscr{L}$ 的函数符号的解释下封闭的集合. 因为这样的函数至多有 δ 个(其中每一函数有 $<\lambda$ 个变目)且 $\delta=\delta^{<\lambda}$,所以 $|B|=\delta$. 因此 $\mathfrak{A}$ 的、个体域为 B 的子结构 $\mathfrak{B}$ 就是我们要求的结构. □

下列推论是上述定理的简化形式,但对许多目的来说,它已包含足够的信息.

8.1.8 推论 若 $\mathscr{L}_{\kappa^+\omega}$ 的句子 σ 有模型,则它有幂至多为 κ 的模型. 若 $\mathscr{L}_{\kappa^+\lambda^+}$ 的句子 σ 有模型,则它有基数至多为 κ^λ 的模型. □

注意:若 $\mathscr{L}_{\kappa^+\omega}$ 的句子 σ 有幂为 λ(其中 $\kappa<\lambda$)的模型,则对 κ 和 λ 之间所有的基数 δ,σ 有幂为 δ 的模型. 这个性质对 $\mathscr{L}_{\infty\lambda}$(其中 $\lambda>\omega$)不成立. 例如,我们能找到 $\sigma\in\mathrm{Sent}(\mathscr{L}_{\omega_1\omega_1})$ 使 σ 有幂为 κ 的模型 $\Leftrightarrow\kappa^\omega=\kappa$. 关于这些问题,我们以后在有关章节还要详细讨论.

8.1.9 推论 令 $\mathscr{L}$ 至多有 κ 个符号,$\mathfrak{A}$ 是 $\mathscr{L}$ 的结构,则存在 $\mathfrak{B}\prec_{\kappa^+\kappa^+}\mathfrak{A}$ 使得 $|B|\leqslant 2^\kappa$.

证明:因为

$$|\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\kappa^+\kappa^+})|=(\kappa^+)^{<\kappa^+}=2^\kappa,$$

所以 $\mathscr{L}_{\kappa^+\kappa^+}$ 至多有 2^κ 个不逻辑等价的句子(见 1.3.32). 令 σ 是所

有这样的句子的合取，则 σ 是 $\mathscr{L}_{(2^\kappa)^+,\kappa^+}$ 的句子. 假设 $|A|\geqslant 2^\kappa$，则我们可以令上述定理 8.1.7 的 $\delta=2^\kappa$. 因为 $(2^\kappa)^{<\kappa^+}=2^\kappa$，所以我们有 $\mathfrak{B}\subseteq\mathfrak{A}$ 使得 $|B|\leqslant 2^\kappa$. 又因为 $\mathscr{L}_{\kappa^+\kappa^+}$ 的每一公式等价 σ 的一子公式，所以 8.1.7 的结论恰好说明 $\mathfrak{B}\prec_{\kappa^+\kappa^+}\mathfrak{A}$. □

三、$\mathscr{L}_{\infty\omega}$ 的任意片段中的 Skolem-函数

下面我们在 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$ 的片段中定义 Skolem-函数，这与第 1 小节的定义没有本质上的区别.

8.1.10 定义 令 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$ 的任意片段，C 是 $\mathscr{L}$ 的个体常元集(可以是空的)使得 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的每一公式至多包含有穷个 $c\in C$，

(1) 称 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是**带常元集 C 的 Skolem-片段** $\Leftrightarrow$ 存在一单射把 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的每一形如 $\exists x\varphi(x,\vec{y}_n)$（其中 φ 不包含 C 的常元且 $\vec{y}_n$ 不在 φ 中约束出现）的公式映射到一个不在 φ 中出现的 $\mathscr{L}$ 的 n 元函数符号 $F_{\exists x\varphi}$；这样的 $F_{\exists x\varphi}$ 称为 $\exists x\varphi(x,\vec{y}_n)$ 的 **Skolem-函数符号**. 若 $C=\varnothing$，则称 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是 **Skolem-片段**.

(2) 令 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是带常元集 C 的 Skolem-片段，$\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的 **Skolem-理论** T_{Skolem} 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 中所有下列形式的句子集：

$$\{\forall\vec{y}_n[\exists x\varphi(x,\vec{y}_n)\rightarrow\varphi(F_{\exists x\varphi}(\vec{y}_n),\vec{y}_n)]:\exists x\varphi \text{ 如(1)规定}\}.$$

(3) $\mathscr{L}$-结构 $\mathfrak{A}$ 称为 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的 **Skolem-结构** $\Leftrightarrow \mathfrak{A}\models T_{\text{Skolem}}$.

在第 4 章我们还没有证明 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$ 的任意片段的完全性定理，下面我们用上述定义的带 Skolem-函数符号的语言来证明之.

8.1.11 引理 令 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$ 的带常元集 C 的 Skolem-片段，D 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的任意有效性质(参见 2.1.14)使得 $T_{\text{Skolem}}\subseteq$D，则对 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的任意公式 $\exists x\varphi(x,\vec{y}_n,\vec{c}_m)$，下列句子 σ

$$\forall\vec{y}_n[\exists x\varphi(x,\vec{y}_n,\vec{b}_m)\rightarrow\varphi(F(\vec{y}_n,\vec{c}_m),\vec{y}_n,\vec{c}_m)]$$

在 D 中，其中 F 是 $\exists x\varphi(x,\vec{y}_{n+m})$ 的 Skolem-函数符号.

证明： 据 T_{Skolem} 的定义，

$$\forall \vec{y}_{n+m}[\exists x\varphi(x,\vec{y}_{n+m})\to\varphi(F(\vec{y}_{n+m}),\vec{y}_{n+m})]\in T_{\mathrm{Skolem}}\subseteq \mathsf{D}.$$

据公理 4 和分离规则以及 D 的性质，易见 $\sigma\in\mathsf{D}$. □

假设 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是片段，C 是新个体常元集. 我们用 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}(C)$ 指称用 C 的有穷个个体常元代入 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的公式得到的所有代入特例组成的片段：

$$\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}(C)=\{\varphi(\vec{x}_n/\vec{c}_n):\varphi(\vec{x}_n)\in\mathscr{L}_{\mathfrak{M}},\vec{c}_n\in C,n<\omega\}.$$

8.1.12 引理 令 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是带个体常元集 C_0 的 Skolem-片段，C 是新个体常元集，则 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}(C)$ 是带 $C_0\cup C$ 的 Skolem-片段.

证明：据定义直接可得. □

下一个定理说明，就模型存在而言，我们把自己限制在 Skolem-片段和 Skolem-结构上不仅不会失去什么，反而大有收获.

8.1.13 定理 令 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$ 的片段，则存在 $\mathscr{L}$ 的膨胀语言 $\mathscr{L}^*$ 使得 $\mathscr{L}^*$ 包含下列性质的新函数符号：

(1) 令 $\mathscr{L}^*_{\mathfrak{M}}=\{\varphi(\vec{x}_n/\vec{t}_n):\varphi(\vec{x}_n)\in\mathscr{L}_{\mathfrak{M}},n<\omega,\vec{t}_n$ 是 $\mathscr{L}^*$ 的项$\}$，则 $\mathscr{L}^*_{\mathfrak{M}}$ 是 Skolem-片段，$|\mathscr{L}^*_{\mathfrak{M}}|=|\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}|$，且每一 Skolem-函数符号在 $\mathscr{L}^*-\mathscr{L}$ 中.

(2) $\mathscr{L}$ 的每一结构有一相对 $\mathscr{L}^*_{\mathfrak{M}}$ 的 Skolem-膨胀 $\mathfrak{A}^*$.

(3) 若 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是可容片段，则我们可以定义语言 $\mathscr{L}^*$ 是 $\mathfrak{M}$ 上的 Δ_1，且符号 $F_{\exists x\varphi}$ 是 $\exists x\varphi(x,\vec{y}_m)$ 的 $\mathfrak{M}$-递归函数. 特别地，T_{Skolem} 是 $\mathscr{L}^*_{\mathfrak{M}}$ 的 $\mathfrak{M}$-递归集(参见后面 10.1.19).

证明：令语言 $\mathscr{L}^{(0)}=\mathscr{L}$，$\mathscr{L}^{(0)}_{\mathfrak{M}}=\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$. 对 $\mathscr{L}^{(n)}_{\mathfrak{M}}$ 的每一公式 $\exists x\varphi(x,\vec{y}_n)$，其中 $\vec{y}_n$ 不约束出现，增加一新函数符号 $F_{\exists x\varphi}$ 给 $\mathscr{L}^{(n)}$ 且令 $\mathscr{L}^{(n+1)}_{\mathfrak{M}}$ 就是如此得到的片段(参见 8.1.1).

令 $\mathscr{L}^*=\bigcup\limits_{n<\omega}\mathscr{L}^{(n)}$，所以 $\mathscr{L}^*_{\mathfrak{M}}=\bigcup\limits_{n<\omega}\mathscr{L}^{(n)}_{\mathfrak{M}}$. 据这样的构造，(2)是显然的(参见 8.1.5). 若我们有诸如$\langle 17,\exists x\varphi\rangle$的表达式(参见 1.1.27)对 $F_{\exists x\varphi}$ 进行编码，则(3)也是显然的. □

下面我们引入超有效性质(supervalidity property)的概念.

8.1.14 定义 令 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是带常元集 C 的 Skolem-片段. 称 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的有效性质 D 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$(或更精确地说,是$(\mathscr{L}_{\mathfrak{M}},C)$)的**超有效性质** $\Leftrightarrow T_{\text{Skolem}}\subseteq$D 且下列**析取规则**成立:

$\bigvee\Phi$ 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的句子且 $\bigvee\Phi\in$ D $\Rightarrow$ 存在 $\varphi\in\Phi$ 使得 $\varphi\in$ D.

这个析取规则使超有效性质较之普通的有效性质有很大的不同. 例如,它使 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的所有超有效性质的交不再是超有效性质(对照 2.1.21(2)). 下一个定理将说明析取规则倒底有多强.

8.1.15 引理 令 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是带常元集的 Skolem-片段,D 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的有效性质使得 $T_{\text{Skolem}}\subseteq$D,则 D 是超有效性质 $\Leftrightarrow$ D 是完全的(即对 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的每一句子 ψ,$\psi\in$ D 或 $\neg\psi\in$ D).

证明:假设 D 是超有效性质. 因为 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的所有公理都在 D 中,所以 $\psi\vee\neg\psi\in$ D,因此据析取规则,$\psi\in$ D 或 $\neg\psi\in$ D. 反之,假设 D 是完全的,$\bigvee\Phi$ 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的句子且 $\bigvee\Phi\in$ D. 若对每一 $\varphi\in\Phi$,$\varphi\notin$ D,则对每一 $\varphi\in\Phi$,$\neg\varphi\in$ D,所以据有效性质的合取规则,

$$\bigwedge\{\neg\varphi:\varphi\in\Phi\}\in \mathrm{D},$$

但这个句子就是 $\neg\bigvee\Phi$,因此 $\neg\bigvee\Phi\in$ D. 因为 D 是有效性质,所以它不能把 $\bigvee\Phi$ 和 $\neg\bigvee\Phi$ 都作为它的元素,矛盾. 因此对某个 $\varphi\in\Phi$,$\varphi\in$ D. □

注意:若 D 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的超有效性质且 $\varphi(\vec{v}_n)\in\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$,则

$$\varphi(\vec{v}_n)\in \mathrm{D} \Leftrightarrow \forall\vec{v}_n\varphi(\vec{v}_n)\in \mathrm{D}.$$

(其实 D 是有效性质就有上述等价关系.)因此 D 由它的元素确定.

8.1.16 定义 令 $\mathfrak{A}$ 是 Skolem-片段 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$(带某个常元集)的 Skolem-结构,**由 $\mathfrak{A}$ 给定的超有效性质** $\mathrm{D}_{\mathfrak{A}}$ 定义如下:

$$\mathrm{D}_{\mathfrak{A}}=\{\varphi(\vec{v}_n)\in\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}:\mathfrak{A}\models\forall\vec{v}_n\varphi(\vec{v}_n)\}.$$

说明:据 2.1.22,$\mathrm{D}_{\mathfrak{A}}=\Phi_{\mathfrak{A}}$. 显然 $\mathrm{D}_{\mathfrak{A}}$ 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的超有效性质. 若句子 $\varphi\in\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 在所有超有效性质中,则它在所有 $\mathrm{D}_{\mathfrak{A}}$ 中;因此它在 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的所有 Skolem-结构中真. 这就给出下列定理平凡的一半.

8.1.17 Skolem-片段的弱完全性定理(Barwise,[1975])

令 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是带常元集 C 的 Skolem-片段,

(1) $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的句子 φ 在 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的所有 Skolem-结构中真 $\Leftrightarrow$ 它在 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的每一超有效性质中.

(2) 令 T 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的理论,φ 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的句子,则 φ 在每一是 T 的模型的 Skolem-结构 $\mathfrak{A}$ 中真 $\Leftrightarrow$ φ 在 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的每一超有效性质 D 中真使得 $T\subseteq\mathsf{D}$.

证明:当 $T=\varnothing$ 时,(1)就是(2)的特例.

证(2):"$\Leftarrow$"的证明直接根据本定理前面的说明.

"$\Rightarrow$"的证明的大部分工作已经在 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$ 的可数片段的模型存在定理 4.3.6 的证明中做过了. 这里我们把"$\Rightarrow$"的证明分成下面两个引理,这一方面是为了使证明更加清楚,另一方面我们在后面还需要其中一个作他用.

请比较下面引理和 4.3.2 关于 $(\infty,\omega)_M$-一致性质的关系.

8.1.18 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$-弱模型存在定理

令 $\mathscr{L}$ 至少有一个体常元符号,$\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$ 的任意片段,$\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的任意满足下列规则的句子集 Σ 有模型:

一致规则:若 φ 是原子句且 $\varphi\in\Sigma$,则 $\neg\varphi\notin\Sigma$.

否定规则:若 $\neg\varphi\in\Sigma$,则 $\varphi\neg\in\Sigma$.

合取规则:若 $\bigwedge\Phi\in\Sigma$,则对所有 $\varphi\in\Phi$,$\varphi\in\Sigma$.

析取规则:若 $\bigvee\Phi\in\Sigma$,则对某个 $\varphi\in\Phi$,$\varphi\in\Sigma$.

全称规则:若 $\forall x\varphi(x)\in\Sigma$,则对 $\mathscr{L}$ 的每一闭项 t,$\varphi(x/t)\in\Sigma$.

存在规则:若 $\exists x\varphi(x)\in\Sigma$,则对 $\mathscr{L}$ 的某个闭项 t,$\varphi(x/t)\in\Sigma$.

等词规则:对 $\mathscr{L}$ 的所有闭项 t_1,t_2:

若 $t_1\equiv t_2\in\Sigma$,则 $t_2\equiv t_1\in\Sigma$,且

若 $\varphi(t_1)$,$t_1\equiv t_2\in\Sigma$,则 $\varphi(t_1/t_2)\in\Sigma$.

证明:我们知道 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$ 的可数片段的模型存在定理 4.3.6 的证明也分成两个阶段. 第一阶段是构造具有上述性质(加上某些其它涉及 C 的个体常元的性质)的句子集 s_ω,第二阶段是从这样的句子

集构造模型，这个阶段就构成了本引理的证明. □

8.1.19 另一种形式的 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$-弱完全性定理 令 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是带常元集 C 的 Skolem-片段，D 是($\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$,$C$)的超有效性质，$\Sigma$ 是 D 中句子的集合，则 Σ 在 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的某个 Skolem-结构中真，即 D 有模型.

证明：因为 D 是超有效性质，所以 $T_{\text{Skolem}}\subseteq$D，据 Σ 的构造，Σ 的任意模型是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的 Skolem-结构，所以我们只须证明 Σ 满足 8.1.18 的诸规则. 因为 D 包含 2.1.14 的公理 1—6 且在规则 1—3 下封闭，所以除了析取规则和存在规则，其它规则的验证都是例行公事. 又因为关于 Σ 的析取规则可以从关于 D 的析取规则中推出，所以剩下只须验证存在规则.

假设$\exists x\varphi(x,\vec{c}_n)\in\Sigma$，据 8.1.11，对适当的函数符号 F，

$$[\exists x\varphi(x,\vec{c}_n)\rightarrow\varphi(F(\vec{c}_n),\vec{c}_n)]\in\Sigma.$$

所以 $\varphi(F(\vec{c}_n),\vec{c}_n)\in\Sigma$，而这正是存在规则要求的. □

现在我们回过头来证明 8.1.17(2)的"$\Rightarrow$". 设 $T\cup T_{\text{Skolem}}\vdash\varphi$，我们要证若D 是超有效性质使得 $T\subseteq$D，则 $\varphi\in$D. 假设 $\varphi\notin$D，则据 8.1.15，$\neg\varphi\in$D，所以据 8.1.19，我们得到 $T\cup\{\neg\varphi\}$ 的一个 Skolem-模型，矛盾. □

下面我们用一有意思的结果来结束本节，此结果允许我们先构造超有效性质，然后据弱完全性定理，得到令人感兴趣的模型. 这通常给我们以 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的普通紧致性定理的效果.

任给带常元集 C_0 的 Skolem-片段 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 和带常元集 C_1 的 Skolem-片段 $\mathscr{L}_{\mathfrak{N}}'$，我们用($\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$,$C_0$)$\subseteq$($\mathscr{L}_{\mathfrak{N}}'$,$C_1$)指称若 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}\subseteq\mathscr{L}_{\mathfrak{N}}'$，$C_0\subseteq C_1$ 且 $F_{\exists x\varphi}$是指派给 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的$\exists x\varphi(x,\vec{y}_n)$的 Skolem-函数符号，则它也是指派给 $\mathscr{L}_{\mathfrak{N}}'$ 的$\exists x\varphi(x,\vec{y})$的 Skolem-函数符号.

8.1.20 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$-链并引理(Barwise,[1975]) 令 I 是被线序的指标集，对每一 $i\in I$，$\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}^{(i)}$ 是带常元集 C_i 的 Skolem-片段，D$_i$ 是($\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}^{(i)}$,$C_i$)的超有效性质. 设对所有 $i,j\in I$ 使得 $i<j$，

$$(\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}^{(i)}, C_i) \subseteq (\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}^{(j)}, C_j), \quad \mathsf{D}_i \subseteq \mathsf{D}_j.$$

令 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}' = \bigcup_{i \in I} \mathscr{L}_{\mathfrak{M}}^{(i)}$，$C_\infty = \bigcup_{i \in I} C_i$，$\mathsf{D}_\infty = \bigcup_{i \in I} \mathsf{D}_i$，则 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}'$ 是带常元集 C_∞ 的 Skolem-片段且 D_∞ 是 $(\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}', C_\infty)$ 的超有效性质.

证明：简单验证 8.1.10 就能证明 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}'$ 是带常元集 C_∞ 的 Skolem-片段，所以 $(\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}', C_\infty)$ 的 Skolem-理论是诸 $(\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}^{(i)}, C_i)$ 的 Skolem-理论的并，因此 $(\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}', C_\infty)$ 的 Skolem-理论包含在 D_∞ 中. 类似地，$\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}'$ 的公理 1—6 也都在 D_∞ 中. 对规则 1、规则 3 和析取规则的验证是例行公事. 这里，需要说明一下的倒是合取规则：

设 $\bigwedge \Phi \in \mathscr{L}_{\mathfrak{M}}'$ 且对每一 $\varphi \in \Phi$，$\varphi \in \mathsf{D}_\infty$，下证 $\bigwedge \Phi \in \mathsf{D}_\infty$. 选择 i 使 $\bigwedge \Phi \in \mathscr{L}_{\mathfrak{M}}^{(i)}$，我们断定对每一 $\varphi \in \Phi$，$\varphi \in \mathsf{D}_i$，从而 $\bigwedge \Phi \in \mathsf{D}_i \subseteq \mathsf{D}_\infty$. 假设断定不成立，则 Φ 中存在 $\varphi = \varphi(\vec{v}_n) \notin \mathsf{D}_i$，因此 $\forall \vec{v}_n \varphi(\vec{v}_n) \notin \mathsf{D}_i$. 据 8.1.15，$\mathsf{D}_i$ 是完全的，所以 $\neg \forall \vec{v}_n \varphi(\vec{v}_n) \in \mathsf{D}_i$. 但因为 $\varphi(\vec{v}_n) \in \mathsf{D}_\infty$，所以对某个 $j > i$，$\varphi(\vec{v}_n) \in \mathsf{D}_j$，因此 $\forall \vec{v}_n \varphi(\vec{v}_n) \in \mathsf{D}_j$. 因为 $\mathsf{D}_i \subseteq \mathsf{D}_j$，所以 $\neg \forall \vec{v}_n \varphi(\vec{v}_n) \in \mathsf{D}_j$，而这与有效性质 D_j 的一致性矛盾. □

对 8.1.20 的所有已知的运用都是从下面非常特殊的情况中得到的，它揭示了个体常元在 Skolem-片段中的作用.

8.1.21 特殊形式的 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$-链并引理 令 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是 Skolem-片段，$C = \{c_n : 0 < n < \omega\}$ 是可数新个体常元集，对其中每一 n，D_n 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}(\{\vec{c}_n\})$ 的超有效性质，且对 $n < m$，$\mathsf{D}_n \subseteq \mathsf{D}_m$，$\mathsf{D}_\infty = \bigcup_{n < \omega - \{0\}} \mathsf{D}_n$，则 D_∞ 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}(C)$ 的超有效性质.

证明：对 $n \leqslant m$，$(\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}(\{\vec{c}_n\}), \{\vec{c}_n\}) \subseteq (\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}(\{\vec{c}_m\}), \{\vec{c}_m\})$，因此据 8.1.20 立得本引理. □

说明：本节诸结果的广泛运用将在后面有关章节中出现.

练 习

8.1.22 令 $\mathfrak{M}$ 是可数可容集，$\mathfrak{M} \subseteq \mathbf{H}(\omega_1)$. 证明 8.1.1 给出

的公式集 $\mathscr{L}^*_{\mathfrak{M}}$ 是 $\mathfrak{M}$ 上的 Δ，而且 T_{Skolem}的公理集也是 $\mathfrak{M}$ 上的 Δ.

[**注意**：一般地说，若 $\mathscr{L}'$ 是含 $\mathscr{L}^*_{\mathfrak{M}}$-符号的一阶语言，则 $\mathscr{L}^*_{\mathfrak{M}}$ 是 $\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}\cap\mathfrak{M}$ 的真子集.]

8.1.23 令 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$的片段，且对 $\alpha<\beta<\gamma$，$\mathfrak{A}_\alpha\prec_{\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}}\mathfrak{A}_\beta$. 证明对所有 $\beta<\gamma$，

$$\mathfrak{A}_\beta\prec_{\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}}(\bigcup_{\beta<\gamma}\mathfrak{A}_\beta).$$

8.1.24 令 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$的带常元集的 Skolem-片段，$\mathfrak{A}$，$\mathfrak{B}$ 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的 Skolem-结构. 证明

$$\mathfrak{A}\subseteq\mathfrak{B}\Rightarrow\mathfrak{A}\prec_{\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}}\mathfrak{B}.$$

8.1.25（$\mathscr{L}_{\infty\omega}$的片段的**向下-Löwenheim-Skolem-定理**）

令 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$的片段，$\delta\geqslant|\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}|$，$\mathfrak{A}$ 是 $\mathscr{L}$ 的结构，$X\subseteq A$，$\delta\leqslant|A|$，$|X|\leqslant\delta$. 证明存在 $\mathfrak{B}$ 使得

$$\mathfrak{B}\prec_{\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}}\mathfrak{A},\quad |B|=\delta,\quad X\subseteq B.$$

§2 用不可辨元构造结构

A. Ehrenfeucht 和 A. Mostowski 在其[1956]最早提出不可辨元的概念，他们证明了每一一阶理论有一个包含无穷多个不可辨元的集合的模型；若理论 T 有无穷模型，则任给序型 α，T 有模型 $\mathfrak{A}$ 使得 $\mathfrak{A}$ 包含序型为 α 的不可辨元集. 从那时起，关于不可辨元的技术已被证明对构造具有各种不同性质的结构是相当有用的. 例如，用来证明向上-Löwenheim-Skolem-定理.

本节主要引入不可辨元的概念，证明相关的基本定理及其直接推论. 对它的许多重要的运用将在以后有关章节展开.

8.2.1 定义 令 $\mathfrak{A}^*$ 是 T_{Skolem}的模型且 $X\subseteq A$，我们称由 X 生

成的 $\mathfrak{A}^*$ 的子模型是 $\mathfrak{A}^*$ 中 X 的 **Skolem-包**，且用 $\mathrm{Hull}(X,\mathfrak{A}^*)$ 来指称．若不致造成混乱，则用 $\mathrm{Hull}(X)$ 来表示 $\mathrm{Hull}(X,\mathfrak{A}^*)$．

说明：$\mathfrak{A}$ 中 X 的 Skolem-包 $\mathfrak{B}$ 就是 $\mathfrak{B}\subseteq\mathfrak{A}$ 使得 B 是 X 在 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}^*$ 的 Skolem-函数下封闭的集合．

令 $\langle X,<\rangle$ 是线序，我们用 $x_1<\cdots<x_n\in X$ 表示 $x_1,\cdots,x_n\in X$ 且 $x_1<\cdots<x_n$．也称 $x_1<\cdots<x_n$ 是 X 的(严格)递增 n 元组．

8.2.2 定义

令 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$-片段，$\mathfrak{A}$ 是 $\mathscr{L}$-结构，$\langle X,<\rangle$ 是线序使 $X\subseteq A$，

(1) 称 $\langle X,<\rangle$ 是($\mathfrak{A}$ 中)$\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$-**不可辨元集** $\Leftrightarrow$ 对任意 $n<\omega$ 和任意两组 $x_1<\cdots<x_n,y_1<\cdots<y_n\in X$，

$$(\mathfrak{A},\vec{x}_n)\equiv_{\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}}(\mathfrak{A},\vec{y}_n),$$

即 n 元组 $\langle\vec{x}_n\rangle$ 和 $\langle\vec{y}_n\rangle$ 在 $\mathfrak{A}$ 中实现 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的相同的型．(实现和型的概念在普通模型论意义上理解．)

(2) 若 $\mathfrak{A}=\langle A,U,\cdots\rangle$，则我们称 $\langle X,<\rangle$ 是($\mathfrak{A}$ 中)U **上的** $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$-**不可辨元集** $\Leftrightarrow$ 对每一有穷集 $\vec{u}_m\in U$ 和所有 $x_1<\cdots<x_n$，$y_1<\cdots<y_n\in X$，

$$(\mathfrak{A},\vec{u}_m,\vec{x}_n)\equiv_{\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}}(\mathfrak{A},\vec{u}_m,\vec{y}_n).$$

注意：(Ⅰ) 上述(2)实际上是(1)的特例．因为若我们令 $\mathfrak{A}=\langle A,U,\cdots\rangle$ 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的结构，$C=\{C_u:u\in U\}$ 是新个体常元集，$\mathfrak{A}_1=(\mathfrak{A},u)_{u\in U}$ 是 $\mathfrak{A}$ 对 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}(C)$-结构的典范膨胀，则

$\langle X,<\rangle$ 是($\mathfrak{A}$ 中)U 上的 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$-不可辨元集

$\Leftrightarrow$ $\langle X,<\rangle$ 是 $\mathfrak{A}_1$ 中 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}(C)$-不可辨元集．

(Ⅱ) 据上述定义，这里的序关系在 A 上不必然有定义．

(Ⅲ) 据 8.1.5 和练习 8.2.10，有

$$\mathrm{Hull}(X,\mathfrak{A}^*)\prec_{\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}}\mathfrak{A}^*.$$

当 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}^*$ 是可数时，$|\mathrm{Hull}(X)|=\omega+|X|$．因此若 $\langle X,<\rangle$ 是 $\mathfrak{A}^*$ 中的不可辨元集，则它也是 $\mathrm{Hull}(X)$ 的不可辨元集．

8.2.3 定理 (1)($\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$-**初等嵌入定理**) 假设 $\mathfrak{A}^*$,$\mathfrak{B}^*$ 是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$-可数片段 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的 T_{Skolem}的两个模型,$\langle X,<\rangle$和$\langle Y,<\rangle$是 $\mathfrak{A}^*$,$\mathfrak{B}^*$ 中两个 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$-不可辨元集,且 X 和 Y 中的有穷递增序列实现 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}^*$ 中相同的型,则从$\langle X,<\rangle$到$\langle Y,<\rangle$中的每一单射 f 能够唯一地扩张到从 Hull$(X,\mathfrak{A}^*)$到 Hull$(Y,\mathfrak{B}^*)$中的初等嵌入 $\overline{f}$.

(2)($\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$-**伸缩变换**(stretching)**定理**) 令 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$-可数片段 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的 T_{Skolem}的模型,$\langle X,<\rangle$是 $\mathfrak{A}$ 中(基数)无穷的 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$-不可辨元集,$\langle Y,<\rangle$是任意无穷线序集,则存在结构 $\mathfrak{B}^*$ 使得$\langle Y,<\rangle$是 $\mathfrak{B}^*$ 的 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$-不可辨元集,且 X 和 Y 中的有穷递增序列实现相同的型. 特别地,

$$\mathfrak{A}^* \equiv_{\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}^*} \mathfrak{B}^*.$$

证明:(1) 我们可以把 Hull(X)中任意元素 a 写作 $a=t(\vec{x}_n)$,其中 t 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}^*$ 中的项且 $x_1<\cdots<x_n$ 在$\langle X,<\rangle$中. 假设 t_1 和 t_2 是任意两个项使得 $t_1(\vec{x}_n)=t_2(\vec{x}_n)$,且 $\vec{y}_n$ 是$\langle Y,<\rangle$中任意递增 n 元组,则据假设,$\langle\vec{x}_n\rangle$和$\langle\vec{y}_n\rangle$实现相同的型,所以 $t_1(\vec{y}_n)=t_2(\vec{y}_n)$. 因此存在函数 $\overline{f}$:Hull$(X)\to$Hull(Y)使得对所有 n 个变元的项 t 和所有的 $x_1<\cdots<x_n\in X$,

$$\overline{f}(t(\vec{x}_n))=t(f(x_1),\cdots,f(x_n)). \tag{8.1}$$

令 $\varphi(\vec{v}_m)$是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}^*$ 的公式,$\vec{a}_m\in$Hull(X). 对 $i=1,\cdots,m$,假设 $a_i=t_i(\vec{x}_n)$,其中 $x_1<\cdots<x_n$,则易证下列等价:其中 $\vec{u}_n$ 是些新变元,

Hull$(X)\models\varphi[\vec{a}_m]$,

Hull$(X)\models\varphi(t_1(\vec{u}_n),\cdots,t_m(\vec{u}_n))[\vec{x}_n]$,

Hull$(Y)\models\varphi(t_1(\vec{u}_n),\cdots,t_m(\vec{u}_n))[f(x_1),\cdots,f(x_n)]$,

Hull$(Y)\models\varphi[\overline{f}(a_1),\cdots,\overline{f}(a_m)]$.

这就证明了 $\overline{f}$ 是初等嵌入. 因为任何把 f 扩张到一初等嵌入必然满足(8.1)且 $\overline{f}$ 是满足(8.1)的仅有的扩张,所以 $\overline{f}$ 是唯一的.

(2) 令 Term 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}^*$ 中所有项的集合. 设 $t_1(\vec{v}_n),t_2(\vec{v}_n)\in$

Term，我们称 $t_1 \sim t_2 \Leftrightarrow$ 对任意 $x_1 < \cdots < x_n \in X$，在 $\mathfrak{A}'$ 中

$$t_1(\vec{x}_n) = t_2(\vec{x}_n).$$

令 $t_1/\sim$ 是 t_1 的等价类，且令

$$\overline{B} = \{t(\vec{y}_n) : t(\vec{v}_n) \in \mathrm{Term}, \mathrm{Fv}(t(\vec{v}_n)) \subseteq \vec{v}_n, y_1 < \cdots < y_n \in Y\}.$$

下面定义 $\overline{B}$ 上的等价关系$\approx$. 令 $t(y_1, \cdots, y_n), t'(y_1', \cdots, y_{n'}') \in \overline{B}$，其中 $t(v_1, \cdots, v_n), t'(v'_1, \cdots, v'_{n'}) \in \mathrm{Term}$. 因为$\langle Y, < \rangle$是线序，所以这些 y_i 和 y_i' 可以构成$\langle Y, < \rangle$中单个递增序列 $z_1 < \cdots < z_m$，其中 $y_1 = z_{i_1}, \cdots, y_n = z_{i_n}, y_1' = z_{j_1}, \cdots, y_{n'}' = z_{j_{n'}}$. 用 $v_{i_1}, \cdots, v_{i_n}$和 $v_{j_1}, \cdots, v_{j_{n'}}$ 分别置换 t 和 t' 中的 $v_1, \cdots, v_n$ 和 $v_1', \cdots, v_{n'}'$，构成项 $t_0(v_1, \cdots, v_m)$ 和 $t_0'(v_1, \cdots, v_m)$，则我们定义$\approx$如下：

$$t(y_1, \cdots, y_n) \approx t'(y_1', \cdots, y_{n'}') \Leftrightarrow t_0 \sim t_0'.$$

显然，关系$\approx$是自返和对称的，下证$\approx$是传递的. 为此先证：

假设 $t(y_1, \cdots, y_n), t'(y_1', \cdots, y_{n'}') \in \overline{B}$，$w_1 < \cdots < w_p \in Y$，且 $y_r = w_{k_r}, y_r' = w_{l_r}$. 用 v_{k_r} 和 v_{l_r} 分别置换 y_r 和 y_r' 得到 $t_1(v_1, \cdots, v_p)$，$t_1'(v_1, \cdots, v_p)$，则 $t_1 \sim t_2' \Leftrightarrow t(y_1, \cdots, y_n) \approx t'(y_1', \cdots, y_{n'}')$. $\quad$ (8.2)

对(8.2)的证明：我们注意到(8.2)和$\approx$的定义之间的差别在于，$z_1, \cdots, z_m$ 是包含那些 y_i 和 y_i' 的最小序列，而 $w_1 < \cdots < w_p$ 则是任意序列. 因为 X 是无穷的，所以我们可以找到 $x_1 < \cdots < x_p \in X$. 假设 $t_0 \sim t_0'$，则据$\sim$的定义，$t_0(x_1, \cdots, x_m) = t_0'(x_1, \cdots, x_m)$，据$\langle X, < \rangle$的不可辨性，

$$t_0(x_{q_1}, \cdots, x_{q_m}) = t_0'(x_{q_1}, \cdots, x_{q_m}),$$

其中诸 q_r 被定义使得

$$\langle z_1, \cdots, z_m \rangle = \langle w_{q_1}, \cdots, w_{q_m} \rangle.$$

但 $t_1(x_1, \cdots, x_p) = t_0(x_{q_1}, \cdots, x_{q_m}), t_1'(x_1, \cdots, x_p) = t_0'(x_{q_1}, \cdots, x_{q_m})$，所以

$$t_1(x_1, \cdots, x_p) = t_1'(x_1, \cdots, x_p). \quad (8.3)$$

据$\langle X, < \rangle$的不可辨性，(8.3)对$\langle X, < \rangle$的所有递增 p 元组都成

立，因此$t_1\sim t'_1$. 把上述证明倒过来，也能证明$t_1\sim t'_1 \Rightarrow t_0\sim t'_0$，这就证明了(8.2).

$\approx$的传递性易从(8.2)得到.

令$B=\{a_{\approx}:a\in\overline{B}\}$，其中$a_{\approx}$是$a$的$\approx$-等价类. 我们把每一$y\in Y$等同$t(y)_{\approx}$，其中$t(v_1)$是只由$v_1$构造起来的项，从而把$Y$作成$B$的子集，由(8.2)可得

对任意$a_1,\cdots,a_n\in B$，对某个$m<\omega$，存在项$t_1(\vec{v}_m),\cdots,t_n(\vec{v}_m)\in \mathrm{Term}$和$y_1<\cdots<y_m\in Y$使得$a_1=t_1(\vec{y}_m)_{\approx},\cdots,a_n=t_n(\vec{y}_m)_{\approx}$.

(8.4)

通过如下定义关系、函数和个体常元，可以从B构造$\mathscr{L}^*_{\mathfrak{M}}$的模型$\mathfrak{B}^*$：

$$\mathfrak{B}^*\models R(t_1(\vec{y}_m)_{\approx},\cdots,t_n(\vec{y}_m)_{\approx})$$

$$\Leftrightarrow \mathfrak{A}^*\models R(t_1(\vec{x}_m),\cdots,t_n(\vec{x}_m)),\quad 对所有\ x_1<\cdots<x_m\in X.$$

(这里用R既表示$\mathfrak{A}^*$的关系，又表示$\mathfrak{B}^*$的对应的关系是不严谨的，好在细心的读者不会搞错.)

$$G(t_1(\vec{y}_m)_{\approx},\cdots,t_n(\vec{y}_m)_{\approx})=[G(t_1(\vec{v}_m),\cdots,t_n(\vec{v}_m))(\vec{y}_m)]_{\approx}.$$

(这里用G既表示B上的函数，又表示$\mathscr{L}^*_{\mathfrak{M}}$中对应的符号.)

每一个体常元$c\in\mathscr{L}^*_{\mathfrak{M}}$用$\mathfrak{B}^*$中的$c_{\approx}$来解释.

可以验证，上述定义不依赖$\approx$-等价类的代表元的选取.

施归纳于公式的复杂度，易证：

Y中一递增n元组在$\mathfrak{B}^*$中满足$\mathscr{L}^*_{\mathfrak{M}}$的公式$\theta(\vec{v}_n)$

$\Leftrightarrow X$中每一递增n元组在$\mathfrak{A}^*$中满足$\theta(\vec{v}_n)$.

注意：在此Skolem-函数只用于θ形如$\forall x\psi$或$\exists x\psi$时候. 这样，我们证明了Y是$\mathfrak{B}^*$的不可辨元集，且X和Y的递增n元组实现$\mathscr{L}^*_{\mathfrak{M}}$中相同的型. □

注意：在上述证明中，$\mathfrak{B}^*$也是Y的Skolem-包.

8.2.4 推论 令$\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$是$\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的可数片段，$T$是Skolem-语言$\mathscr{L}^*_{\mathfrak{M}}$中的理论. 若$T$有模型$\mathfrak{A}^*$使得$\mathfrak{A}^*\models T_{\mathrm{Skolem}}$且$\mathfrak{A}^*$有一个无穷

$\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$-不可辨元集，则 T 有任意大基数的模型. 对 T_{Skolem} 的任意有无穷不可辨元集 $\langle X,<\rangle$ 的模型 $\mathfrak{A}^*$，Hull$(X,\mathfrak{M}^*)$ 有任意大基数的初等扩张 $\mathfrak{B}^*$ 使得 Hull$(X,\mathfrak{A}^*)\prec_{\mathscr{L}^*_{\mathfrak{M}}}\mathfrak{B}^*$.

证明：考虑具有我们需要基数的线序集 $\langle Y,<\rangle$ 使得 $\langle X,<\rangle\subseteq\langle Y,<\rangle$. 然后再用 8.2.3. □

定理 8.2.3 可以概括到 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$ 的任意 Skolem-片段上.

8.2.5 定理

(1)(**$\mathscr{L}_{\infty\omega}$-初等嵌入定理**) 设 $\mathfrak{A}^*$，$\mathfrak{B}^*$ 是 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$ 的任意带常元集的 Skolem-片段 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的 T_{Skolem} 的两个结构，$\langle X,<\rangle$ 和 $\langle Y,<\rangle$ 是 $\mathfrak{A}^*$，$\mathfrak{B}^*$ 的两个 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$-不可辨元集，且 X 和 Y 中的有穷递增序列实现 $\mathscr{L}^*_{\mathfrak{M}}$ 中相同的型，则从 $\langle X,<\rangle$ 到 $\langle Y,<\rangle$ 中的每一单射 f 能够唯一地扩张到从 Hull$(X,\mathfrak{A}^*)$ 到 Hull$(Y,\mathfrak{B}^*)$ 中的初等嵌入 $\bar{f}$.

(2)(**$\mathscr{L}_{\infty\omega}$-伸缩变换定理**) 令 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是带常元集的 Skolem-片段，$\mathfrak{A}$ 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的 Skolem-结构，$\langle X,<\rangle$ 是 $\mathfrak{A}$ 中无穷 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$-不可辨元集，则对任意无穷线序集 $\langle Y,<\rangle$，存在 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的 Skolem-结构 $\mathfrak{B}$ 使

① $\langle Y,<\rangle$ 是 $\mathfrak{B}$ 的 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$-不可辨元集，

② 若 $x_1<\cdots<x_n\in X$ 且 $y_1<\cdots<y_n\in Y$，则

$$(\mathfrak{A},\vec{x}_n)\equiv_{\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}}(\mathfrak{B},\vec{y}_n),$$

③ 特别地，$|B|\geqslant|Y|$ 且 $\mathfrak{A}\equiv_{\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}}\mathfrak{B}$.

证明：(1)的证明类似 8.2.3(1)的证明.

(2) 当 $n=0$ 时，③就是②. 因为 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的互不相同的个体常元在这个证明中不起任何作用，所以我们只假设 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是 Skolem-片段. 令 $C=\{c_y:y\in Y\}$ 是新个体常元符号集，构造 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}(C)$ 如 8.1.12 前，则据 8.1.12，$\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}(C)$ 是带常元集 C 的 Skolem-片段.

我们定义 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}(C)$ 的公式集 D 如下：因为 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的任意公式能写作下列形式：

$$\varphi(\vec{v}_n,v_{n+1}/c_{y_1},\cdots,v_{n+m}/c_{y_m}),\tag{8.5}$$

其中 $y_1<\cdots<y_m\in Y$，所以(8.5)$\in$D $\Leftrightarrow$ 对某个 $x_1<\cdots<x_m\in X$，

$$(\mathfrak{A},\vec{x}_m)\models\forall\vec{v}_n\varphi(\vec{v}_n,\vec{c}_{y_m}),\quad 其中\ x_i\ 解释\ c_{y_i}. \tag{8.6}$$

下证：

$$\mathrm{D}\ 是\ \mathscr{L}_{\mathfrak{M}}(C)的超有效性质. \tag{8.7}$$

若(8.5)是逻辑公理，显然(8.6)成立，因此(8.5)$\in$D. 下证：

$$\varphi(\vec{v}_n,\vec{c}_{y_m})\in \mathrm{D}\Rightarrow \neg\varphi(\vec{v}_n,\vec{c}_{y_m})\notin \mathrm{D}.$$

假设不成立，则我们有

$$(\mathfrak{A},\vec{x}_m)\models\forall\vec{v}_n\varphi(\vec{v}_n,\vec{c}_m),\quad (\mathfrak{A},\vec{z}_m)\models\forall\vec{v}_n\neg\varphi(\vec{v}_n,\vec{c}_m),$$

其中 $x_1<\cdots<x_m, z_1<\cdots<z_m\in X$. 但这与$\langle X,<\rangle$的不可辨性矛盾.

下面只验证超有效性质的析取规则，把其余几个规则的平凡验证留给读者.

设 $\psi(\vec{c}_m)=\bigvee\Phi$ 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}(C)$的句子且 $\psi(\vec{c}_m)\in$D，则$(\mathfrak{A},\vec{x}_m)\models\bigvee\Phi$，因此对某个 $\varphi\in\Phi$，$(\mathfrak{A},\vec{x}_m)\models\varphi$，所以 $\varphi\in$D，因此 D 是超有效性质.

下证：

若 $\varphi(\vec{v}_n)$是 $\mathscr{L}$ 的公式，且 $y_1<\cdots<y_n, y'_1<\cdots<y'_n\in Y$，则 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的形如 $\varphi(c_{y_1},\cdots,c_{y_n})\leftrightarrow\varphi(c_{y'_1},\cdots,c_{y'_n})$的公式在 D 中. (8.8)

(8.8)的证明：为了简化不妨假设 φ 是 $\varphi(v_1,v_2,v_3)$且

$$y_1<y_2<y_3,\quad y'_1<y'_2<y'_3.$$

先按序关系$<$排列$\langle Y,<\rangle$中的这些元素. 例如假设

$$y_1<y'_1<y'_2<y_2=y'_3<y_3.$$

在这种情况下只有 5 个元素. 令

$$\psi(v_1,\cdots,v_5)=\varphi(v_1,v_4,v_5)\leftrightarrow\varphi(v_2,v_3,v_4),$$

对某些 $x_1<\cdots<x_5\in X$，据不可辨性，有

$$\mathfrak{A}\models\varphi[x_1,x_4,x_5]\Leftrightarrow\mathfrak{A}\models\varphi[x_2,x_3,x_4].$$

因此对 $x_1<\cdots<x_5\in X$，$\mathfrak{A}\models\psi[x_1,\cdots,x_5]$，据 D 的构造，

$$\varphi(c_{y_1},c_{y_2},c_{y_3})\leftrightarrow\varphi(c_{y'_1},c_{y'_2},c_{y'_3})\in \mathrm{D}.$$

这就证明了(8.8)(的一个典型例子). 据弱完全性定理 8.1.17，我

们得到 D 的模型$(\mathfrak{B},a_y)_{y\in Y}$. 因为对 $y\neq y'$, $\neg(c_y\equiv c_{y'})\in$ D, 所以我们可以把 a_y 等同 y, 因此 $\mathfrak{B}$ 就有(2)的性质①和②. □

上面我们给出了 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$-不可辨元, 且证明了与之相关的基本性质. 事实上, 我们还可以把不可辨元的概念扩张到无穷量词的语言, 证明 $\mathscr{L}_{\infty\lambda}$的不可辨元的存在.

8.2.6 定义 令 $\mathscr{L}$ 是有可数多个关系、函数和个体常元符号的语言, $\mathfrak{A}$ 是 $\mathscr{L}$ 的结构, λ 是无穷正则基数, 称 $\mathfrak{A}$ 的有序子集 X 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$-**不可辨元集** $\Leftrightarrow$ 对 X 的每一基数$<\lambda$ 的子集 Y 和任意保序单射 $h: Y\to X$,

$$(\mathfrak{A},y)_{y\in Y}\equiv_{\kappa\lambda}(\mathfrak{A},h(y))_{y\in Y}.$$

若 $\mathscr{L}_{\infty\lambda}$是所有无穷语言 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$的并, 其中 κ 跑遍所有的基数, 则我们可以类似地定义 $\mathscr{L}_{\infty\lambda}$-**不可辨元**.

令 T 是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的可数理论, 我们知道存在可数片段 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 使得 $T\subseteq\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$. 下面我们只考虑这样的 T 和 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 使得 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 有足够的函数符号且 T 包含 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的所有定义 Skolem-函数的公理. 显然, T 有带任意序型的 $\mathscr{L}_{\infty\lambda}$-不可辨元集的模型的必要条件是 T 有任意大基数的模型(参见 8.2.4), 下列定理说明这也是充分条件.

8.2.7 定理(P. C. Eklof [1970]) 令 $T\subseteq\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 使得 T 有任意大基数的模型. 若 μ 是任意序型, 则存在 T 的模型 $\mathfrak{A}$ 使得 $\mathfrak{A}$ 有一序型为 μ 的 $\mathscr{L}_{\infty\lambda}$-不可辨元集.

证明: 不妨设 $|\mu|\leqslant\lambda$, 因为若 $\kappa\geqslant\lambda$, 则 $\mathscr{L}_{\infty\kappa}$-不可辨元集就是 $\mathscr{L}_{\infty\lambda}$-不可辨元集. 设 $\lambda=\aleph_\alpha$. 因为 μ 能嵌入 X(参见 K. Kuratowski 和 Mostowski 的[1968], pp. 334—338.), 所以只须证 T 有模型 $\mathfrak{A}$ 使得 $X\subseteq A$ 是序型为 η_α(参见 11.1.7)的 $\mathscr{L}_{\infty\lambda}$-不可辨元集.

假设 T 的模型对 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的所有公式有 Skolem-函数. 因为 T 有任意大基数的模型, 所以据 8.2.3(2), 存在 T 的模型 $\mathfrak{A}$ 包含序型为 η_α 的 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$-不可辨元集 X. 不妨假设 $\mathfrak{A}=\text{Hull}(X)$. 下证 X 就是 $\mathfrak{A}$ 中的 $\mathscr{L}_{\infty\lambda}$-不可辨元集. 令 $Y\subseteq X$ 的基数$<\lambda=\aleph_\alpha$, $h: Y\to X$ 是保序单射, 且 I 是 $\mathfrak{A}$ 的任意子结构 $\mathfrak{B}_1,\mathfrak{B}_2$ 的所有下列同构的集合:

$$f:\mathfrak{B}_1\cong\mathfrak{B}_2,$$

使得 $Y\subseteq B_1$，$f\upharpoonright Y=h$，且存在 $U_1,U_2\subseteq X$ 使得 $|U_1|<\lambda$，$\mathfrak{B}_1=\mathrm{Hull}(U_1)$，$\mathfrak{B}_2=\mathrm{Hull}(U_2)$且 $f\upharpoonright U_1$ 是从 U_1 到 U_2 上的序同构. 若令 $\mathfrak{B}_1=\mathrm{Hull}(Y)$，$\mathfrak{B}_2=\mathrm{Hull}(h[Y])$，则存在扩张 h 的同构 $f:\mathfrak{B}_1\cong\mathfrak{B}_2$，因此 $\mathbf{I}\neq\varnothing$. 下证 $\mathbf{I}$ 有下列 back and forth-性质(关于这个性质及其对无穷逻辑的大量运用，我们将在下册用两章的篇幅详细讨论)：

对所有 $C\subseteq A$ 使得 $|C|<\lambda$，对任意 $f\in\mathbf{I}$，存在 $f_1,f_2\in\mathbf{I}$ 使得 $f\subseteq f_1$，$f\subseteq f_2$，$C\subseteq\mathrm{Dom}(f_1)$，$C\subseteq\mathrm{Ran}(f_2)$. (8.9)

(8.9)的证明：假设 $f:\mathfrak{B}_1\cong\mathfrak{B}_2$ 在 $\mathbf{I}$ 中，且 U_1,U_2 如 $\mathbf{I}$ 的定义中所规定. 任给 $C\subseteq A$，$|C|<\lambda$，则存在 $D\subseteq X$，$|D|<\lambda$，使得 $C\subseteq\mathrm{Hull}(U_1\cup D)$. 显然为了证明(8.9)所要求的 f_1 存在，只须证明我们能把满射序同构 $f\upharpoonright U_1:U_1\to U_2$ 扩张到序单射：$U_1\cup D\to X$. 不妨假设 $D\cap U_1=\varnothing$，我们来定义 D 上的等价关系 $\approx$ 如下：

$$x\approx y\Leftrightarrow x\text{ 和 }y\text{ 确定 }U_1\text{ 的同一个割集(cut)}.$$

把 D 写作下列两两不相交的等价类 D_ξ(其中 $\xi<\delta<\lambda$)的并

$$D=\bigcup_{\xi<\delta}D_\xi.$$

对任意 $\xi<\delta$，令 $U_1=A_\xi\cup B_\xi$(其中 $A_\xi<D_\xi<B_\xi$，参见 11.1.7)，则 $f[A_\xi]<f[B_\xi]$，$|f[A_\xi]|<\lambda$ 且 $|f[B_\xi]|<\lambda$. 因此若

$$E_\xi=\{x\in X:f[A_\xi]<x<f[B_\xi]\},$$

则 E_ξ 是 η_α-集. 因此存在嵌入 $g_\xi:D_\xi\to E_\xi$. 定义 $f_1:U_1\cup D\to X$：

$$f_1(x)=\begin{cases}f(x), & \text{若 } x\in U_1;\\ g_\xi(x), & \text{若 } x\in D_\xi.\end{cases}$$

这就给出我们所要求的 f 的扩张 f_1.

类似地我们能够证明存在扩张 f 的 f_2 使得 $C\subseteq\mathrm{Ran}(f_2)$.

施归纳于 $\mathscr{L}_{\infty\lambda}$的公式，从(8.9)易得

$$(\mathfrak{A},y)_{y\in Y}\equiv_{\infty\lambda}(\mathfrak{A},h(y))_{y\in Y}.\quad\square$$

说明：(Ⅰ) 若假设 GCH 成立，则上述证明就变得简单得多，因为存在基数为 $\aleph_\alpha$ 的 η_α-集 X. 因此若 $h:Y\to X$ 是保序单射且 $|Y|$

$<\lambda$，则 h 能扩张为同构 $h_1:X\to X$. 由此立得：

$$(\mathfrak{A},y)_{y\in Y}\equiv_{\infty\lambda}(\mathfrak{A},h(y))_{y\in Y}.$$

（Ⅱ）若 $\lambda=\aleph_\alpha$ 且 $\lambda\geq|\mu|$，则还可以选择上述定理中的 $\mathfrak{A}$ 使之具有下列性质：

$$|A|=\begin{cases}2^{\aleph_\beta}, & 若\ \alpha=\beta+1;\\ \sum\limits_{\beta<\alpha}2^{\aleph_\beta}, & 若\ \alpha\ 是极限序数.\end{cases}$$

在结束本节前，我们来看不可辨元方法的一个运用，即用不可辨元构造集合论模型的真终端扩张.

下面我们用 **ZFL** 指称

ZF$\cup${**可构成公理**(the axiom of constructability)}.

给定结构 $\mathfrak{M}=\langle M,E,\cdots\rangle$，其中 E 是二元关系. 据 0.6.2，我们称结构 $\mathfrak{N}=\langle N,F,\cdots\rangle$是 $\mathfrak{M}$ 的**真终端扩张** $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{N}$ 是 $\mathfrak{M}$ 的真扩张且对所有 $b\in N$ 和 $a\in M$，若 bFa，则 $b\in M$.

8.2.8 定理(Keisler 和 M. D. Morley，[1968]) 令 $\mathfrak{M}$ 是 **ZF** 的可数模型，则 $\mathfrak{M}$ 有任意大基数的初等真终端扩张.

证明：为了简单，我们在此只证下列特例：

*若 $\mathfrak{M}$ 是 **ZFL** 的可数模型，则 $\mathfrak{M}$ 有任意大基数的初等真终端扩张.*

对每一 $a\in M$，增加个体常元符号 e_a 给 $\mathfrak{M}$ 的语言 Sm($\mathfrak{M}$)，且构造 $\mathfrak{M}_1$ 如下：

$$\mathfrak{M}_1=\langle M,E,a\rangle_{a\in M}.$$

令 $\mathscr{L}$ 是 $\mathfrak{M}_1$ 的语言，增加两个可数新个体常元集 C 和 $D=\{d_1,\cdots,d_n,\cdots\}$给 $\mathscr{L}$，构成语言 $\mathscr{L}'$. 令 Θ 是

$$\{\varphi:\varphi\in \mathrm{Sent}(\mathscr{L}_{\omega\omega}),\mathfrak{M}_1\models\varphi\}\cup\{\forall x\bigvee_{bEa}(x\in e_a\to x\equiv e_b):a\in M\} \tag{8.10}$$

因此 Θ 是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的可数句子集且 $\mathfrak{M}_1$ 是 Θ 的模型. 令 Σ 是由下列句子组成的集合：

"d_i是序数",

$d_i \in d_j$，其中 $1 \leqslant i < j < \omega$，

$\theta(d_{i_1}, \cdots, d_{i_p}) \leftrightarrow \theta(d_{j_1}, \cdots, d_{j_p})$；

其中 $\theta(v_1, \cdots, v_p)$ 是 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$ 的句子且 $\langle i_1, \cdots, i_p \rangle$ 和 $\langle j_1, \cdots, j_p \rangle$ 是递增序列．下证：

$$\Theta \cup \Sigma \text{ 有模型.} \tag{8.11}$$

(8.11)的证明：据 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$-扩张的模型存在定理，只须找到 $\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$ 的 (ω_1, ω)-一致性质 $\mathbf{S}$ 使得 $\mathbf{S} \neq \varnothing$ 且对所有 $\varphi \in \Theta \cup \Sigma$ 和 $s \in \mathbf{S}$，$s \cup \{\varphi\} \in \mathbf{S}$．定义 $\mathbf{S}$ 是 $\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$ 的所有有穷句子集 s 的集合使得

(1) 每一 $\sigma \in s$ 或是 $\mathscr{L}'_{\omega\omega}$ 的句子，或是下列集合中的句子：

$$\{\forall x \bigvee_{bEa} (x \in e_a \rightarrow x \equiv e_b) : a \in M\}$$

$$\cup \{\bigvee_{bEa} (c \in e_a \rightarrow c \equiv e_b) : a \in M, c \in C\}；$$

(2) s 只含有穷多个 $c \in C$ 和 $d \in D$，例如 s 可表述为

$$s = s(\vec{c}_m, \vec{d}_n)；$$

(3) $\mathfrak{M}_1 \models \forall \alpha \exists x[\alpha \text{ 是基数} \rightarrow x \text{ 是序数集} \wedge |x| = \alpha$

$$\wedge \forall \vec{\beta}_n \in x(\beta_1 < \cdots < \beta_n \rightarrow \exists \vec{u}_m \wedge s(\vec{u}_m, \vec{\beta}_n))].$$

我们来验证 $\mathbf{S}$ 是 (ω_1, ω)-一致性质．非平凡的步骤是对(C4)的验证，而它可以化归为对下面两个命题的证明：

$$\bigvee_{bEa} (c \in e_a \rightarrow c \equiv e_b) \in s \in \mathbf{S} \Rightarrow \text{对某个 } bEa, \{c \in e_a \rightarrow c \equiv e_b\} \cup s \in \mathbf{S}. \tag{8.12}$$

$$\varphi \vee \psi \in s \in \mathbf{S} \Rightarrow s \cup \{\varphi\} \in \mathbf{S} \text{ 或 } s \cup \{\psi\} \in \mathbf{S}. \tag{8.13}$$

对(8.12)和(8.13)的证明，我们要用到在模型 $\mathfrak{M}$ 中成立的 Erdös-Rado-定理(参见 Keisler [1971], p. 75).

对(8.12)的证明：假设(8.12)的前提成立．令 α 是 $\mathfrak{M}$ 的个体域 M 中一基数且

$$\mathfrak{M}_1 \models \gamma = \beth_n(|a \cup \alpha|).$$

对某个 $y \in M$，用 γ, y 置换条件(3)中的 α, x，则(3)成立．据在 $\mathfrak{M}$

中成立的划分关系（参见 9. 3. 17(4)—(5)）

$$\gamma \to (\alpha)^{n}_{|\alpha|},$$

对某个 bEa，用 $s\cup\{c\in e_a\to c\equiv e_b\}$ 置换条件(3)中的 s，则条件(3)对 α 成立，因此

$$\mathfrak{M}_1 \models \forall\alpha\,\exists b\exists x[\alpha\text{ 是基数}\to b\in c_a \wedge x\text{ 是序数集}\wedge |x|=\alpha$$
$$\wedge \forall\vec{\beta}_n\in x(\beta_1<\cdots<\beta_n\to\exists\vec{u}_m \wedge s(\vec{u}_m,\vec{\beta}_n)$$
$$\wedge (u_i\in e_a\to u_i\equiv e_b))],$$

其中 $c=c_i$. 用 $\mathfrak{M}$ 中成立的置换公理模式，我们可以固定元素 bEa 使得 b 独立于上述公式中的 α，因此 $s\cup\{c\in e_a\to c\equiv e_b\}\in \mathbf{S}$.

对(8. 13)的证明也类似，只是涉及两个部分而不是 $|a|$ 个部分的划分.

这样我们证明了 $\mathbf{S}$ 是 (ω_1,ω)-一致性质. 显然，$\mathscr{L}$ 的任意逻辑真的有穷句子集属于 $\mathbf{S}$，所以 $\mathbf{S}\neq\emptyset$. 若 $s\in\mathbf{S}$ 且 $\varphi\in\Theta$，则因为 $\mathfrak{M}_1\models\varphi$，所以 $s\cup\{\varphi\}\in\mathbf{S}$. 为了证明：

$$s\in\mathbf{S}\text{ 且 }\varphi\in\Sigma \Rightarrow s\cup\{\varphi\}\in\mathbf{S},$$

我们须再次使用在 $\mathfrak{M}$ 中成立的 Erdös-Rado-定理. 这里证明的细节类似定理 13. 1. 1 证明的最后一部分. 由此我们证明了(8. 11).

假设 $\Theta\cup\Sigma$ 有下列模型：

$$\mathfrak{B}_2=(\mathfrak{B}_1,d_1,d_2,\cdots)=\langle B,F,e_a,d_1,d_2,\cdots\rangle_{a\in A}.$$

则相对 $\mathscr{L}$，带有自然序关系的集合 $\{d_1,d_2,\cdots\}$ 是 $\mathfrak{B}_1$ 中一无穷不可辨元集. 因为 $\mathfrak{A}\models\mathbf{ZFL}$，所以 $\mathfrak{B}=\langle B,F\rangle\models\mathbf{ZFL}$. 因为 $\mathbf{ZFL}$ 中存在论域上的可定义良序，所以 $\mathfrak{B}$ 有 Skolem-膨胀 $\mathfrak{B}^*$ 使得对 $\mathscr{L}^*$ 的每一公式 ψ，存在 $\mathscr{L}$ 的公式 φ 使得 $\mathfrak{B}^*\models\varphi\leftrightarrow\psi$. 因此 $\{d_1,d_2,\cdots\}$ 在下列模型中是不可辨的：

$$\mathfrak{B}'^*=(\mathfrak{B}^*,e_a)_{a\in A}.$$

令 $\kappa\geqslant\omega$. 据 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$-伸缩扩张定理，存在由幂为 $|Y|=\kappa$ 的不可辨元集 $\langle Y,<\rangle$ 生成的结构 $\mathfrak{C}'^*$ 使得 $\mathfrak{B}'^*$ 和 $\mathfrak{C}'^*$ 实现 $\mathscr{L}^*$ 中相同的型. 因此 $\mathfrak{B}'$ 和 $\mathfrak{C}'$ 实现 $\mathscr{L}$ 中相同的型. 尤其，因为 $\mathfrak{B}'\models\Theta$，所以我们有

$\mathfrak{C}' \vDash \Theta$. 据 Θ 的构造，这意味 $\mathfrak{C}$ 同构 $\mathfrak{A}$ 的一初等真终端扩张. 因为 $\mathfrak{C}'$ 由 Y 生成，所以 $\mathfrak{C}$ 有幂为 $|Y|=\kappa$. □

说明：当 $\mathfrak{M}$ 是 ZFC 的可数模型时，上述定理也不难证明，只要根据 R. M. Solovay 用力迫法构造证明的下列引理：

8.2.9 引理(Solovay，[1970]) 令 $\mathfrak{M}=\langle M,E\rangle$ 是 ZFC 的可数模型，则存在 M 的线序 $\leqslant$ 使得 $\langle M,E,\leqslant\rangle$ 是 ZFC 的模型，其中置换公理模式对所有包含 $\in$ 和新关系符号 $\leqslant$ 的公式成立，且

$$\langle M,E,\leqslant\rangle \vDash \forall x(\leqslant\restriction x^2 \text{ 是良序}),$$

即每一非空集由 $\leqslant$ 良序. □

说明：(Ⅰ) 不用力迫法证明 8.2.9 由 H. Gaifman 在其[1968]提出.

(Ⅱ) 我们对 8.2.8 的证明也证明了如下命题：

每一满足 8.2.8 条件的模型 $\langle M,E,\leqslant\rangle$ 有基数任意大的初等真终端扩张.

(Ⅲ) 对 $\langle M,E,\leqslant\rangle$ 的每一初等真终端扩张 $\langle N,F,\leqslant_1\rangle$，$\langle N,F\rangle$ 是 $\langle M,E\rangle$ 的初等真终端扩张. 因此 ZFC 的每一可数模型 $\langle M,E\rangle$ 有基数任意大的初等真终端扩张. 当 $\langle M,E\rangle$ 只是 ZF 的模型时，证明思路也一样，只是更复杂一些.

(Ⅳ) 8.2.8 对具有其它关系符号的 ZF 的可数模型也成立，只要置换公理模式对包含这些关系符号的公式成立.

(Ⅴ) 8.2.8 对 ZF 的不可数模型 $\mathfrak{M}=\langle M,E\rangle$ 使得线序集 $\langle o(\mathfrak{M}),E\rangle$ 有共尾度 ω 也成立. 但要注意：8.2.8 并不是对 ZF 的所有不可数模型成立，甚至不是对 ZFL 的所有不可数模型成立(参见 Keisler 和 J. H. Silver[1971]).

练　习

8.2.10 令 $\mathfrak{A}^*$ 是 $\mathscr{L}^*_{\mathfrak{M}}$ 的 Skolem-结构，$X\subseteq A$，

(1) 证明：$|\mathrm{Hull}(X,\mathfrak{A}^*)|=\max\{\aleph_0,|\mathscr{L}|,|X|\}$.

(2) 证明：$\mathrm{Hull}(X,\mathfrak{A}^*)\prec_{\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}}\mathfrak{A}^*$.

8.2.11 令 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 的可数片段，$\mathfrak{A}^*$ 是 T'_{Skolem} 的模型使得 $\mathfrak{A}^*$ 含有 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$-不可辨元集 $\langle X,<\rangle$. 证明 $\langle X,<\rangle$ 的任意自同构可以扩张为 $\mathrm{Hull}(X)$ 的自同构.

8.2.12 令 $\mathfrak{A}^*$，$\langle X,<\rangle$ 同上，$\mathfrak{B}$ 是 T_{Skolem} 的另一个模型且 $\langle Y,<\rangle$ 是 $\mathfrak{B}^*$ 的 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$-不可辨元集使得 X 和 Y 的每一递增 n 元组实现相同的型. 假设 X 和 Y 无穷，证明 $\mathrm{Hull}(X)$ 和 $\mathrm{Hull}(Y)$ 恰好实现 $\mathscr{L}^*_{\mathfrak{M}}$ 中相同的型.

8.2.13(Chang, [1968b]) 令 $\mathscr{L}'$ 是包含 $\mathscr{L}^*_{\mathfrak{M}}$ 的符号的一阶语言，$\mathfrak{A}^*$，$\langle X,<\rangle$，$\mathfrak{B}^*$，$\langle Y,<\rangle$ 同上. 证明

$$\langle X,<\rangle\prec_{\mathscr{L}_{\omega_1\omega}}\langle Y,<\rangle\Rightarrow \mathrm{Hull}(X)\prec_{\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}}\mathrm{Hull}(Y).$$

8.2.14 证明对 $\mathscr{L}^*_{\mathfrak{M}}$ 的每一公式 $\varphi(\vec{v}_n)$，存在 $\mathscr{L}'_{\omega_1\omega}$ 的全称公式 $\psi(\vec{v}_n)$ 使得 $T_{\text{Skolem}}\vdash\varphi\leftrightarrow\psi$.

§3 用超积构造结构

运用超积方法构造无穷语言的结构很受限制，这是由于只有当超滤具有强完全性质时，超积基本定理(即 Łos-定理)才能运用于无穷语言. 本节初步介绍超积的概念及其基本定理以及一两个运用，在以后的有关章节中我们还能进一步看到它们的作用.

一、$\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 的 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$-超积构造

在 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$ 的模型论中超积用于作为紧致性定理的替代物；在那里，有许多结果的证明只有用超积方法才显得合理. 但是在 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 的模型论中超积只能偶尔用作模型存在定理的替代物；在这里，很

少有结果的证明用超积方法令人满意．由于这样的原因，我们在证明定理时大多选择模型存在定理而不是超积方法．

但是，超积方法在 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$（乃至更大的无穷语言）中仍有它的地位，有些定理首先是用超积方法发现的，还有一些结果说明只能用超积而不能用别的方法加以证明．

令 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathscr{L}$ 的结构，$X\subseteq A$，$\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的片段，$\mathscr{L}(X)=\mathscr{L}\cup\{c_a:a\in X\}$，我们用 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}(X)$表示用 $\mathscr{L}(X)$的有穷个个体常元代换 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 中的公式中的自由变元而得到的公式的集合．$\mathfrak{A}_X$ 表示结构 $(\mathfrak{A},a)_{a\in X}$．

令 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的可数片段，$\mathfrak{A}$ 是结构，$\varphi(x)\in\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}(A)$，我们称集合

$$\varphi(\mathfrak{A})=\{a\in A:\mathfrak{A}_A\models\varphi[a]\}.$$

是 $\mathfrak{A}$ **中（相对 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$）的一个类**．类似地，若 $\varphi(x,y)\in\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}(A)$且 $\mathfrak{A}_A\models\varphi(x,y)\wedge\varphi(x,z)\rightarrow y\equiv z$，则部分函数

$$f_{\varphi,\mathfrak{A}}(a)=b\Leftrightarrow\mathfrak{A}_A\models\varphi[a,b]$$

称为 $\mathfrak{A}$ **中（相对 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$）的可定义函数**．因此 $f_{\varphi,\mathfrak{A}}$的定义域是类 $(\exists y\varphi)(\mathfrak{A})$．

本小节固定 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是可数片段．

8.3.1 定义 令 $\varphi(\mathfrak{A})$是 $\mathfrak{A}$ 中相对 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的类，称 $\mathfrak{A}$ 是 $\varphi(\mathfrak{A})$**上（相对 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$）的 Skolem-结构** $\Leftrightarrow$ 对 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}(A)$的每一公式 $\psi(x,y)$，存在一个 $\mathfrak{A}$ 中相对 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的可定义函数 $f_{\psi,\mathfrak{A}}$，其定义域为类 $\varphi(\mathfrak{A})$使得对所有 $x\in\varphi(\mathfrak{A})$，

$$\mathfrak{A}_A\models\exists y\psi(x,y)\Rightarrow\mathfrak{A}_A\models\psi(x,f_{\psi,\mathfrak{A}}(x)).$$

8.3.2 定义 设 $\mathfrak{A}$ 是 $\varphi(\mathfrak{A})$上的 Skolem-结构，$\mathscr{D}$ 是 $\varphi(\mathfrak{A})$上的超滤，定义 **Skolem-超幂** $\prod_{\mathscr{D}}\mathfrak{A}$ 如下：令 B 是 $\mathfrak{A}$ 中定义域为 $\varphi(\mathfrak{A})$的所有可定义函数的集合．任给 $f_{\psi,\mathfrak{A}}$和 $f_{\theta,\mathfrak{A}}\in B$，定义$\approx_{\mathscr{D}}$ 如下

$$f_{\psi,\mathfrak{A}}\approx_{\mathscr{D}}f_{\theta,\mathfrak{A}}\Leftrightarrow\{x\in\varphi(\mathfrak{A}):f_{\psi,\mathfrak{A}}(x)=f_{\theta,\mathfrak{A}}(x)\}\in\mathscr{D}.$$

对 $f\in B$，令 $f_{\mathscr{D}}$ 是 f 在$\approx_{\mathscr{D}}$ 下的等价类，$\prod_{\mathscr{D}}\mathfrak{A}$ 的个体域$\prod_{\mathscr{D}}A$ 是下

列集合：

$$\prod_{\mathscr{D}} A=\{f_{\mathscr{D}}: f\in B\}.$$

$\prod_{\mathscr{D}}\mathfrak{A}$ 的关系定义如下：对所有 $f^1,\cdots,f^n\in B$ 和 n 元关系 R，

$$\langle f^1_{\mathscr{D}},\cdots,f^n_{\mathscr{D}}\rangle\in R_{\mathscr{D}}\Leftrightarrow\{x\in\varphi(\mathfrak{A}):\langle f^1(x),\cdots,f^n(x)\rangle\in R\}\in\mathscr{D}.$$

如普通超积的情况那样，我们可以验证 $\approx_{\mathscr{D}}$ 是等价关系且关系 $R_{\mathscr{D}}$ 是良定义的.

$\prod_{\mathscr{D}}\mathfrak{A}$ 的函数定义如下：对所有 $f^1,\cdots,f^n,f\in B$ 和 n 元函数 F，定义 $\prod_{\mathscr{D}}\mathfrak{A}$ 上的函数 $F_{\mathscr{D}}:(\prod_{\mathscr{D}}A)^n\to\prod_{\mathscr{D}}A$：

$$F_{\mathscr{D}}(f^1_{\mathscr{D}},\cdots,f^n_{\mathscr{D}})=f_{\mathscr{D}}$$
$$\Leftrightarrow\{x\in\varphi(\mathfrak{A}):F(f^1(x),\cdots,f^n(x))=f(x)\}\in\mathscr{D}.$$

$\prod_{\mathscr{D}}\mathfrak{A}$ 的常元定义如下：对个体常元 c，定义 $c_{\mathscr{D}}$ 是某个 $f_{\mathscr{D}}\in B$ 使得

$$\{x\in\varphi(\mathfrak{A}):f(x)=c^{\mathfrak{A}_A}\}\in\mathscr{D}.$$

如上就定义了结构 $\prod_{\mathscr{D}}\mathfrak{A}$.

称函数 $h:\mathfrak{A}\to\prod_{\mathscr{D}}\mathfrak{A}$ 是从 $\mathfrak{A}$ 到 $\prod_{\mathscr{D}}\mathfrak{A}$ 的**自然嵌入** $\Leftrightarrow$ h 把每一 $a\in A$ 映射到以 a 为常值的常值函数的等价类 $\{\langle x,a\rangle:x\in\varphi(\mathfrak{A})\}_{\mathscr{D}}$，即映射到某个 $f_{\mathscr{D}}$ 使得 $\{x\in\varphi(\mathfrak{A}):f(x)=a^{\mathfrak{A}_A}\}\in\mathscr{D}$. 显然，所有常值函数在 $\mathfrak{A}$ 中是可定义的.

8.3.3 定义 令 $\varphi(\mathfrak{A})$ 是 $\mathfrak{A}$ 中的一个类，称 $\varphi(\mathfrak{A})$ 上的超滤 $\mathscr{D}$ 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$-**完全超滤** $\Leftrightarrow$ 对 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}(A)$ 的每一公式 $\bigwedge_{m<\omega}\theta_m(\vec{y}_n)$，若定义域为 $\varphi(\mathfrak{A})$ 的 $f^1,\cdots,f^n$ 在 $\mathfrak{A}$ 中是可定义函数且对所有 $m<\omega$，

$$\{x:\mathfrak{A}_A\models\theta_m(f^1(x),\cdots,f^n(x))\}\in\mathscr{D},$$

则

$$\{x:\mathfrak{A}_A\models\bigwedge_{m<\omega}\theta_m(f^1(x),\cdots,f^n(x))\}\in\mathscr{D}.$$

下面我们要证明两个定理，它们不仅对可数结构 $\mathfrak{A}$ 成立，对不可数 $\mathfrak{A}$ 也成立.

8.3.4 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$-超积基本定理 令 $\varphi(\mathfrak{A})$ 是 $\mathfrak{A}$ 中相对 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的一个类，$\mathfrak{A}$ 是 $\varphi(\mathfrak{A})$ 上的相对 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的 Skolem-结构，$\mathscr{D}$ 是 $\varphi(\mathfrak{A})$ 上 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$-

完全超滤，则

(1) 对 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的所有公式 $\psi(x_1,\cdots,x_n)$ 和 $\mathfrak{A}$ 中相对 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的所有定义域为 $\varphi(\mathfrak{A})$ 的可定义函数 $f^1,\cdots,f^n$，有

$$\prod_{\mathscr{D}}\mathfrak{A}\models\psi[f^1_{\mathscr{D}},\cdots,f^n_{\mathscr{D}}]$$

$$\Leftrightarrow\{x\in\varphi(\mathfrak{A}):\mathfrak{A}\models\psi[f^1(x),\cdots,f^n(x)]\}\in\mathscr{D}.$$

(2) 自然嵌入 h 是初等嵌入：

$$h:\mathfrak{A}\prec_{\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}}\prod_{\mathscr{D}}\mathfrak{A}.$$

(3) h 是真嵌入(proper embedding) $\Leftrightarrow$ $\mathscr{D}$ 是非主超滤.

证明：(1)的证明是施归纳于公式的复杂度，这类似 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$ 的超积基本定理的证明，在此我们只给出与其不同的两个归纳部分：

假设(1)对 $\psi(x_0,\cdots,x_n)$ 成立，下证(1)对 $\exists x_0\psi(x_0,\cdots,x_n)$ 成立. 令 $f^1,\cdots,f^n$ 是 $\mathfrak{A}$ 中定义域为 $\varphi(\mathfrak{A})$ 的可定义函数，假设

$$\{x\in\varphi(\mathfrak{A}):\mathfrak{A}\models\exists x_0\psi[f^1(x),\cdots,f^n(x)]\}\in\mathscr{D}. \tag{8.14}$$

令 $a_1,\cdots,a_m$ 是 φ 和 $f^1,\cdots,f^n$ 的定义中出现的所有个体常元，则存在一公式 $\theta(x,x_0,a_1,\cdots,a_m)\in\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}(A)$ 使得对 A 中所有的 x 和 x_0，

$$\mathfrak{A}\models\psi[x_0,f^1(x),\cdots,f^n(x)]\Leftrightarrow\mathfrak{A}\models\theta[x,x_0,a_1,\cdots,a_m].$$

因为 $\mathfrak{A}$ 是 $\varphi(\mathfrak{A})$ 上的 Skolem-模型，所以存在 $\mathfrak{A}$ 中定义域为 $\varphi(\mathfrak{A})$ 的可定义函数 f^0 使得对所有 $x\in\varphi(\mathfrak{A})$，

$$\mathfrak{A}\models\exists x_0\psi[f^1(x),\cdots,f^n(x)]\Rightarrow\mathfrak{A}\models\psi[f^0(x),\cdots,f^n(x)],$$

所以，

$$\{x\in\varphi(\mathfrak{A}):\mathfrak{A}\models\psi[f^0(x),\cdots,f^n(x)]\}\in\mathscr{D}.$$

据归纳假设，$\prod_{\mathscr{D}}\mathfrak{A}\models\psi[f^0_{\mathscr{D}},\cdots,f^n_{\mathscr{D}}]$，因此，

$$\prod_{\mathscr{D}}\mathfrak{A}\models\exists x_0\psi[f^1_{\mathscr{D}},\cdots,f^n_{\mathscr{D}}]. \tag{8.15}$$

反之，易证(8.15) $\Rightarrow$ (8.14).

现假设 $\bigwedge_{m<\omega}\psi_m(x_1,\cdots,x_n)\in\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 且(1)对每一 ψ_m 成立，下证(1)对 $\bigwedge_{m<\omega}\psi_m$ 成立. 假设

$$\prod_{\mathscr{D}}\mathfrak{A} \models \bigwedge_{m<\omega} \psi_m[f^1_{\mathscr{D}}, \cdots, f^n_{\mathscr{D}}], \tag{8.16}$$

则对每一 $m<\omega$, $\prod_{\mathscr{D}}\mathfrak{A} \models \psi_m[f^1_{\mathscr{D}}, \cdots, f^n_{\mathscr{D}}]$，据归纳假设，

$$\{x \in \varphi(\mathfrak{A}) : \mathfrak{A} \models \psi_m[f^1(x), \cdots, f^n(x)]\} \in \mathscr{D}.$$

据 $\mathscr{D}$ 的 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$-完全性，

$$\{x \in \varphi(\mathfrak{A}) : \mathfrak{A} \models \bigwedge_{m<\omega} \psi[f^1(x), \cdots, f^n(x)]\} \in \mathscr{D}. \tag{8.17}$$

反之，易证(8.17) ⇒ (8.16).

(2)和(3)易从(1)得到. □

注意：上述定理不难概括到 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$的情况.

8.3.5 例 若 $\mathscr{D}$ 是可数完全超滤，则 $\mathscr{D}$ 对每一 $\mathfrak{M}$ 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$-完全超滤，因此我们总有 $\mathfrak{A} \prec_{\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}} \prod_{\mathscr{D}}\mathfrak{A}$. 事实上，$\mathfrak{A} \prec_{\mathscr{L}_{\omega_1\omega}} \prod_{\mathscr{D}}\mathfrak{A}$，其中$\prod_{\mathscr{D}}\mathfrak{A}$ 是通常的超幂.

8.3.6 定理 假设 $\mathfrak{A}$ 是 $\varphi(\mathfrak{A})$ 上的 Skolem-结构，则下列等价：

(1) 存在初等扩张 $\mathfrak{B}$ 使得 $\mathfrak{A} \prec_{\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}} \mathfrak{B}$ 且 $\varphi(\mathfrak{B}) - \varphi(\mathfrak{A}) \neq \varnothing$.

(2) $\varphi(\mathfrak{A})$ 上存在 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$-完全的非主超滤 $\mathscr{D}$.

证明：据基本定理 8.3.4，(2) ⇒ (1).

(1) ⇒ (2)：假设(1)成立，令 $b \in \varphi(\mathfrak{B}) - \varphi(\mathfrak{A})$，$E$ 是集合：

$$E = \{\psi(\mathfrak{A}) : \psi(\mathfrak{A}) \subseteq \varphi(\mathfrak{A}) \text{ 且 } b \in \psi(\mathfrak{B})\}.$$

易证 E 有有穷交性质，所以能扩张到 $\varphi(\mathfrak{A})$上一超滤. 显然 $\mathscr{D}$ 是非主超滤，因为对每一 $a \in \varphi(\mathfrak{A})$，有

$$b \in (\neg(x \equiv a) \wedge \varphi(x))(\mathfrak{B}),$$

因此 $$(\neg(x \equiv a) \wedge \varphi(x))(\mathfrak{A}) = \varphi(\mathfrak{A}) - \{a\} \in \mathscr{D}.$$

下证 $\mathscr{D}$ 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$-完全的：令

$$\bigwedge_{n<\omega} \theta_n(y_1, \cdots, y_m) \in \mathscr{L}_{\mathfrak{M}},$$

$f^1_{\mathfrak{A}}, \cdots, f^m_{\mathfrak{A}}$ 是 $\mathfrak{A}$ 中定义域为 $\varphi(\mathfrak{A})$的可定义函数. 设对每一 $n<\omega$,

$$\{x : \mathfrak{A}_A \models \theta_n(f^1_{\mathfrak{A}}(x), \cdots, f^m_{\mathfrak{A}}(x))\} \in \mathscr{D}.$$

因为诸 $f^i_{\mathfrak{A}}$ 在 $\mathfrak{A}$ 中可定义，所以，

$$\mathfrak{B}_B \models \theta_n(f^1_{\mathfrak{B}}(b),\cdots,f^m_{\mathfrak{B}}(b)),\quad \text{对所有 } n<\omega,$$

因此 $$\mathfrak{B}_B \models \bigwedge_{n<\omega}\theta_n(f^1_{\mathfrak{B}}(b),\cdots,f^m_{\mathfrak{B}}(b)).$$

所以存在公式 $\psi(y_1,\cdots,y_m,x)\in\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}(A)$ 使得该公式述说：

$$(y_1=f^1_{\mathfrak{A}}(x))\wedge\cdots\wedge(y_m=f^m_{\mathfrak{A}}(x)).$$

因此

$$\mathfrak{B}_B\models\exists y_1\cdots y_m[\psi(y_1,\cdots,y_m,b)\wedge\bigwedge_{n<\omega}\theta_n(y_1,\cdots,y_m)].$$

显然上述句子是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}(A\cup\{b\})$ 中的句子，所以据 $\mathscr{D}$ 的构造，

$$\{x:\mathfrak{A}_A\models\exists y_1\cdots y_m[\psi(y_1,\cdots,y_m,x)\wedge\bigwedge_{n<\omega}\theta_n(y_1,\cdots,y_m)]\}\in\mathscr{D},$$

因此 $$\{x:\mathfrak{A}_A\models\bigwedge_{n<\omega}\theta_n(f^1_{\mathfrak{A}}(x),\cdots,f^m_{\mathfrak{A}}(x))\}\in\mathscr{D}.$$

这说明 $\mathscr{D}$ 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$-完全的. □

下一个推论描述了 8.3.6 中的结构 $\mathfrak{B}$ 与 $\prod_{\mathscr{D}}\mathfrak{A}$ 之间的关系.

8.3.7 推论

假设 $\mathfrak{A}$ 是 $\varphi(\mathfrak{A})$ 上的 Skolem-结构，$\mathfrak{B}$ 是结构使得 $\mathfrak{A}\prec_{\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}}\mathfrak{B}$，$b\in\varphi(\mathfrak{B})$，且 $\mathscr{D}$ 是 $\varphi(\mathfrak{A})$ 上的超滤使得对每一类 $\psi(\mathfrak{A})\subseteq\varphi(\mathfrak{A})$，

$$b\in\psi(\mathfrak{B})\Leftrightarrow\psi(\mathfrak{A})\in\mathscr{D}.$$

令 $h:\prod_{\mathscr{D}}\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ 是如下定义的映射：对 $\mathfrak{A}$ 中每一定义域为 $\varphi(\mathfrak{A})$ 的可定义函数 $f_{\mathfrak{A}}$，$h(f_{\mathfrak{A}\mathscr{D}})=f_{\mathfrak{B}}(b)$，则 h 是初等嵌入：

$$h:\prod_{\mathscr{D}}\mathfrak{A}\prec_{\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}}\mathfrak{B}.$$

证明：根据 8.3.6 的证明，$\mathscr{D}$ 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$-完全的，因此对所有 $\theta(x_1,\cdots,x_n)\in\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 和所有可定义函数 $f^1_{\mathfrak{A}},\cdots,f^n_{\mathfrak{A}}$，下列等价：

$$\prod_{\mathscr{D}}\mathfrak{A}\models\theta[f^1_{\mathfrak{A}\mathscr{D}},\cdots,f^n_{\mathfrak{A}\mathscr{D}}].$$

$$\Leftrightarrow\{x\in\varphi(\mathfrak{A}):\mathfrak{A}\models\theta[f^1_{\mathfrak{A}}(x),\cdots,f^n_{\mathfrak{A}}(x)]\}\in\mathscr{D}.$$

$$\Leftrightarrow\mathfrak{B}\models\theta[f^1_{\mathfrak{B}}(b),\cdots,f^n_{\mathfrak{B}}(b)].\ \square$$

二、$\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$的超积构造

8.3.8 定义

令$\{A_i:i\in I\}$是诸集合的聚合，$\mathscr{D}$是I上的真滤，$\prod_{i\in I}A_i$的元素之间的等价关系$\approx_{\mathscr{D}}$定义如下：对任意$f,g\in\prod_{i\in I}A_i$，

$$f\approx_{\mathscr{D}}g\Leftrightarrow\{i\in I:f(i)=g(i)\}\in\mathscr{D}.$$

对任意f，f的等价类用$f_{\mathscr{D}}$来指称．聚合$\{A_i:i\in I\}$的、模为$\mathscr{D}$的**归约集**$\{f_{\mathscr{D}}:f\in\prod_{i\in I}A_i\}$用$\prod_{\mathscr{D}}A_i$来指称．

当$\mathscr{D}$是I上的超滤时，称$\prod_{i\in I}A_i$是**超积**．

若对所有$i\in I$，$A_i=A$，则$\prod_{i\in I}A_i$可写作$\prod_{\mathscr{D}}A$，称为**归约幂**．

若$\mathscr{D}$还是超滤，则$\prod_{\mathscr{D}}A$称为A的、模为$\mathscr{D}$的**超幂**．

众所周知，严格地说，记号$\prod_{\mathscr{D}}A_i$不完全精确，容易产生歧义，所以更精确的记号应该是$\prod_{\mathscr{D}}\langle A_i:i\in I\rangle$．但是，为了简单，在不致混淆之处，我们还是用大家习惯的$\prod_{\mathscr{D}}A_i$．

注意：在8.3.8中存在如下定义的函数$h:A\to\prod_{\mathscr{D}}A$：

$$h(a)=\bar{a}_{\mathscr{D}},$$

其中$\bar{a}:I\to A$是值为a的常值函数(即对所有$i\in I,\bar{a}(i)=a$)，所以

$$h(a)=\bar{a}_{\mathscr{D}}=\langle a:i\in I\rangle_{\mathscr{D}}.$$

这样的h称为**自然嵌入**或**典范映射**．显然h是单射．

现假设$\{R_i:i\in I\}$是n元关系的聚合使得对所有$i\in I,R_i\subseteq(A_i)^n$，则$\{R_i:i\in I\}$的模为$\mathscr{D}$的归约集是下列$\prod_{\mathscr{D}}A_i$上的关系$R$：对$f^1,\cdots,f^n\in\prod_{i\in I}A_i$，

$$\langle f^1_{\mathscr{D}},\cdots,f^n_{\mathscr{D}}\rangle\in R\Leftrightarrow\{i\in I:\langle f^1(i),\cdots,f^n(i)\rangle\in R_i\}\in\mathscr{D}.\tag{8.18}$$

我们还须验证 R 是良定义的，即

$$f^i \approx_{\mathscr{D}} g^i (i=1,\cdots,n) \text{且} \langle f^1_{\mathscr{D}},\cdots,f^n_{\mathscr{D}}\rangle \in R \Rightarrow \langle g^1_{\mathscr{D}},\cdots,g^n_{\mathscr{D}}\rangle \in R,$$

但这是较容易的练习，我们把它留给读者.

在归约幂 $\prod_{\mathscr{D}} A$ 和关系 $S \subseteq A^n$ 的情况下，易证 h 是从 $\langle A,S\rangle$ 到 $\langle \prod_{\mathscr{D}} A,R\rangle$ 中的单射，即对 $a_1,\cdots,a_n \in A$，

$$\langle a_1,\cdots,a_n\rangle \in S \Leftrightarrow \langle h(a_1),\cdots,h(a_n)\rangle \in R.$$

或者等价地：$$h[S]=R\cap (h[A])^n.$$

同样，当 $\{F_i:i\in I\}$ 是 n 元函数 $F_i:(A_i)^n \to A_i$ 的聚合时，我们能定义它们的模为 $\mathscr{D}$ 的归约集是下列运算 $F:(\prod_{\mathscr{D}} A_i)^n \to \prod_{\mathscr{D}} A_i$：

$$F(f^1_{\mathscr{D}},\cdots,f^n_{\mathscr{D}})=f_{\mathscr{D}}, \tag{8.19}$$

其中对每一 $i\in I$，$f(i)=F_i(f^1(i),\cdots,f^n(i))$. 验证 F 不依赖(8.19)中的等价类的代表元仍是例行公事. 易证 h 对上述函数仍是单射. 通过用通常的方法把 n 元函数化归为 $n+1$ 元关系，不难证明(8.19)是(8.18)的特例.

同样我们也能把个体常元的聚合 $\{c_i:i\in I\}$（其中 $c_i\in A_i$）的归约积定义为 $\prod_{\mathscr{D}} A_i$ 的元素 $c_{\mathscr{D}}$，其中对所有 $i\in I$，$c(i)=c_i$.

由此我们得到个体域为 $\prod_{\mathscr{D}} A_i$ 且关系、函数和个体常元如上定义的**归约积（结构）**$\prod_{\mathscr{D}} \mathfrak{A}_i$.

下面我们来证明 $\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$ 的超积基本定理.

8.3.9 记号：若 f 指称属于 $\prod_{i\in I} A_i$ 的诸映射的序列 $\langle f^j:j\in J\rangle$（指标集 I,J 不必然相同）且 $i\in I$，则 $f(i)$ 指称 A_i 的诸元素的序列 $\langle f^j(i):j\in J\rangle$. 若 $\mathscr{D}$ 是 I 上的滤子，则 $f_{\mathscr{D}}$ 指称 $\prod_{\mathscr{D}} A_i$ 的元素的序列 $\langle f^j_{\mathscr{D}}:j\in J\rangle$. 若 $g=\langle a_j:j\in J\rangle$ 是集合 A 的元素的序列，则 $\bar{g}$ 指称映射序列 $\langle \bar{a}_j:j\in J\rangle$ 使得每一 $\bar{a}_j:I\to A$ 是常值为 a_j 的函数.

8.3.10 $\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$-超积基本定理 令 $\{\mathfrak{A}_i:i\in I\}$ 是 $\mathscr{L}$ 的结构族，$\mathscr{D}$ 是 I 上 $<\kappa$-完全超滤，φ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$ 的公式，$f\in (\prod_{i\in I} A_i)^{\mathrm{Fv}(\varphi)}$，则

$$\prod_{\mathscr{D}}\mathfrak{A}_i \models \varphi[f_{\mathscr{D}}] \Leftrightarrow \{i\in I:\mathfrak{A}_i \models \varphi[f(i)]\}\in\mathscr{D}. \tag{8.20}$$

证明:施归纳于 φ 的复杂度. 若 φ 是原子公式,则据超积构造的定义,(8.20)成立. 若 $\varphi=\neg\psi$,也同样易证. 若 φ 是 $<\kappa$ 个公式的合取,则据 $\mathscr{D}$ 的 $<\kappa$-完全性,(8.20)成立.

设 $\varphi=\exists X\psi$,其中 $X\subseteq\mathrm{Var}$,$|X|<\kappa$,据可满足关系的定义,

$$\prod_{\mathscr{D}}\mathfrak{A}_i \models \varphi[f_{\mathscr{D}}] \Leftrightarrow \text{存在 } g:X\to\prod_{i\in I}A_i \text{ 使得} \prod_{\mathscr{D}}\mathfrak{A}_i \models \psi[f_{\mathscr{D}} * g_{\mathscr{D}}]. \tag{8.21}$$

令
$$M_g=\{i\in I:\mathfrak{A}_i\models\psi[(f*g)(i)],\text{且}$$
$$N=\{i\in I:\mathfrak{A}_i\models\varphi[f(i)].\}$$

因为对 $i\in I$,$(f*g)(i)=f(i)*g(i)$,所以 $M_g\subseteq N$. 因此,若(8.20)的左边成立,据(8.21),对某个 g,$M_g\in\mathscr{D}$. 因为 $\mathscr{D}$ 是滤子,所以 $N\in\mathscr{D}$,因此(8.20)的右边也成立.

反之,设 $N\in\mathscr{D}$,据 φ 的形式,对每一 $i\in N$,存在映射 $g_i:X\to A_i$ 使得 $\mathfrak{A}_i\models\psi[f(i)*g_i]$. 令 $g:X\to\prod_{i\in I}A_i$ 是序列 $\langle g_x:x\in X\rangle$,其中

$$g_x(i)=\begin{cases} g_i(x), & \text{若 } i\in N;\\ A_i\text{ 的任意元素}, & \text{若 } i\in I-N.\end{cases}$$

显然对这样定义的 g,$N\subseteq M_g$,所以 $M_g\in\mathscr{D}$. 据归纳假设,这蕴涵(8.21)的右边,所以(8.20)的"$\Leftarrow$"也成立. □

8.3.11 推论 若 $\mathscr{D}$ 是 $<\kappa$-完全的,则自然嵌入 $h:\mathfrak{A}\to\prod_{\mathscr{D}}\mathfrak{A}$ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$-单射(参见 1.3.18). 因此在同构意义上,

$$\mathfrak{A}\prec_{\kappa\kappa}\prod_{\mathscr{D}}\mathfrak{A}.$$

证明:对 $a\in A$,$h(a)=\bar{a}_{\mathscr{D}}$,其中 $\bar{a}:I\to A$ 是常值为 a 的映射. 我们要证明对 $\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$ 的每一公式 φ 和每一 $f\in A^{\mathrm{Fv}(\varphi)}$,

$$\mathfrak{A}\models\varphi[f] \Leftrightarrow \prod_{\mathscr{D}}\mathfrak{A}\models\varphi[h(f)],$$

其中: $h(f)=\langle h(f_x):x\in\mathrm{Fv}(\varphi)\rangle=\langle \bar{f}_{x\mathscr{D}}:x\in\mathrm{Fv}(\varphi)\rangle$,且
$f=\langle f_x:x\in\mathrm{Fv}(\varphi)\rangle$.

据 $\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$-超积基本定理,有

$$\prod_{\mathscr{D}}\mathfrak{A} \models \varphi[h(f)] \Leftrightarrow \{i \in I : \mathfrak{A} \models \varphi[\bar{f}(i)]\} \in \mathscr{D}. \qquad (8.22)$$

注意：因为诸 $\bar{f}_s$ 是常值函数，所以

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} \models \varphi[\bar{f}] &\Leftrightarrow \{i \in I : \mathfrak{A} \models \varphi[\bar{f}(i)]\} \neq \varnothing \\ &\Leftrightarrow \{i \in I : \mathfrak{A} \models \varphi[\bar{f}(i)]\} = I.\end{aligned}$$

因为 I 是真滤，所以(8.22)的右边等价 $\mathfrak{A} \models \varphi[f]$. □

注意：据上述推论，除非 $\mathscr{D}$ 是非主超滤使得 $\mathscr{D}$ 是在一幂为 κ 的集合上 $<\kappa$-完全超滤，且 $\mathfrak{A}$ 的幂 $\geqslant\kappa$，否则，$\mathfrak{A}$ 的模为 $\mathscr{D}$ 的超幂就不能给我们任何新东西.

8.3.12 定理 令 $|I|=\kappa$，$\mathscr{D}$ 是 I 上的 $<\kappa$-完全超滤，若 $\mathscr{D}$ 是主超滤或 $\mathfrak{A}$ 的幂 $<\kappa$，则 $h:\mathfrak{A}\to\prod_{\mathscr{D}}\mathfrak{A}$ 是同构.

证明：据 8.3.11，只须证 h 是满射. 令 $f:I\to A$，我们证明在下列(1)和(2)的情况下，存在 $a_0\in A$ 使得 $\{i\in I: f(i)=a_0\}\in\mathscr{D}$（即 f 几乎处处等于 $\bar{a}_0$），因此 $h(a_0)=\bar{a}_{0\mathscr{D}}=f_{\mathscr{D}}$.

(1) 若 $\mathscr{D}$ 是主超滤，则存在 $i_0\in I$ 使得对每一 $X\subseteq I$：

$$X\in\mathscr{D}\Leftrightarrow i_0\in X.$$

因此定义 $a_0=f(i_0)$，则我们有 $\{i\in I: f(i)=a_0\}\in\mathscr{D}$.

(2) 若 $\mathfrak{A}$ 的幂 $<\kappa$. 我们有 $\bigcup_{a\in A}f^{-1}(a)=I\in\mathscr{D}$. 因为 $\mathscr{D}$ 是 $<\kappa$-完全的且 $|A|<\kappa$，所以 $\bigcap_{a\in A}f^{-1}(a)\in\mathscr{D}$，因此存在 $a_0\in A$ 使得

$$f^{-1}(a_0)=\bigcap_{a\in A}f^{-1}(a). \quad \square$$

我们将在下一章§3用上述结果研究紧致基数的问题.

至于 $\mathscr{L}_{\infty\lambda}$ 的超积构造及其重要性质，我们将在后面关于 back and forth-方法的运用一章再讨论.

练 习

8.3.13 证明 8.3.4 的(2)和(3).

8.3.14 把 8.3.4 概括到 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$ 的情况.

第 9 章　无穷语言的紧致性质

本章我们研究无穷逻辑模型论的一个基本问题，即无穷语言的紧致性问题.

我们知道语言 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$有（可数）紧致性. 人们在研究无穷逻辑的模型论时，很自然想把这种性质推广到更大语言上去，这样，我们就有了 γ-紧致性的概念. 有了这个概念，研究语言的紧致性问题在很大程度上转化为研究基数的紧致性问题，所以本章的内容也属于集合论的大基数理论.

我们知道紧致性对模型论极为重要，但不幸的是绝大多数无穷基数在经典集合论的背景下既没有自然概括了的 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$-可数紧致性，也没有推广了的 γ-紧致性. 所以在本章 § 1—2，我们分别研究可达(accessible)基数和不可达(inaccessible)基数丧失紧致性的问题. 在这两个部分，我们主要采用举反例的方法，构造某类句子集 Σ，证明 Σ 的每一幂$<\gamma$ 的子集有模型但 Σ 自身没有模型.

在 § 3，我们讨论基数的紧致性问题.

本节第一小节首先讨论可测基数与紧致基数的关系.

第二小节我们花很大篇幅来讨论弱紧致基数所具有的各种集合论、模型论性质，证明了这些性质之间的等价性. 最后我们讨论强紧致基数和超紧致基数的一些重要的模型论性质.

§ 3 的许多结果的证明用到第 8 章第 3 节阐述的超积方法.

§1　可达基数的非紧致性

我们知道语言 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$ 有下列紧致性质：

对 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$ 的任何句子集 Σ，若 Σ 的每一有穷子集有模型，则 Σ 也有模型.　(9.1)

这个性质是下列 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$-完全性定理

$\mathscr{L}_{\omega\omega}$ 的任意一致的句子集有模型　(9.2)

的一个简单的推论(实际上它们是等价的).

但是(9.1)的纯粹模型论证明可以用选择公理(参见 Frayne-Morel-Scott 的[1962]的定理 2.10；或 Bell-Slomson 的[1969]，ch5，§4，pp. 101—103)；这种方法的优点是用一种统一的代数构造从给定的 Σ 的每一有穷子集的模型中构造出 Σ 的模型来.

但是在研究 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$(其中 $\kappa>\omega$)的模型论时遇到的第一个困难就是(9.1)的自然概括不成立，除非对 κ 的一些非常特殊的值(假如有这样的值的话)，或者是改变通常的集合论背景，就象我们在第 10 章那样. 事实上，是否存在一个基数 $\kappa>\omega$ 使得 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$ 有紧致性质这个问题本质上依赖很强的集合论假设，与集合论基础中一些重要问题密切相关(参见本章 §2—3).

从下面所证的结果和集合论的元数学的已知结果看，假设这样的基数**不存在**倒是与通常的集合论公理一致；另一方面，我们还不知道假设它们存在是否与这些公理一致.

尽管有如此多的不确定性，我们出于理论上的兴趣，还是要研究这样的大基数. 无兴趣的读者可以跳过本章直接阅读后面的章节.

9.1.1 定义　令 κ,λ,γ 是无穷基数且 $\kappa\geqslant\lambda$，我们称 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$ 是 γ-**非紧致语言** $\Leftrightarrow$ 存在 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$ 的句子集 Σ 使得 $|\Sigma|=\gamma$，Σ 没有模型，且 Σ 的每一幂 $<\kappa$ 的子集有模型. 否则，我们称 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$ 是 γ-**紧致语言**.

说明：若 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$是 γ-非紧致的且 $\lambda\leqslant\pi\leqslant\kappa$，则 $\mathscr{L}_{\kappa\pi}$是 γ-非紧致的.

9.1.2 定义　(1) κ 是 **γ-非紧致基数** $\Leftrightarrow$ $\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$是 γ-非紧致的.

(2) κ(和 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$)是**非紧致**的 $\Leftrightarrow$ 对某个 $\gamma\geqslant\kappa$，它是 γ-非紧致的.

(3) κ(和 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$)是**强非紧致**的 $\Leftrightarrow$ 它是 κ-非紧致的.

(4) **I** 和 **SI** 分别指称所有的非紧致基数的类和所有强非紧致基数的类. 非紧致基数有时也称为**弱非紧致基数**.

令 $\mathbf{C}=\mathbf{CN}_1-\mathbf{I}$，$\mathbf{WC}=\mathbf{CN}_1-\mathbf{SI}$，则 **C** 和 **WC** 的元素称为**紧致基数**和**弱紧致基数**. 紧致基数也称为**强紧致基数**. 它们对应的语言也分别称为**紧致语言**或**强紧致语言**.

说明：(Ⅰ) 从上述定义，显然可得下列事实：$\mathbf{SI}\subseteq\mathbf{I}$，因此 $\mathbf{C}\subseteq\mathbf{WC}$. 据(9.1)，我们有 $\omega\in\mathbf{C}$. ω 是否是 **C**(甚至 **WC**)的唯一元这个问题仍悬而未决. 从经典集合论的结果看，假设 $\mathbf{C}=\{\omega\}$倒是一致的. 这里值得一提的是(参见后面的 § 3)：

$$\mathbf{C}\neq\{\omega\}\Rightarrow\mathbf{C}\neq\mathbf{WC}.$$

(Ⅱ) 9.1.2 是(9.1)的自然概括：

$\kappa\in\mathbf{C}$ $\Leftrightarrow$ 对每一语言 $\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$和 $\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$的每一句子集 Σ，若 Σ 的每一幂$<\kappa$ 的子集有模型，则 Σ 有模型.　(9.3)

$\kappa\in\mathbf{WC}$ $\Leftrightarrow$ 对每一语言 $\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$和 $\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$的每一幂$\leqslant\kappa$ 句子集 Σ，若 Σ 的每一幂$<\kappa$ 的子集有模型，则 Σ 有模型.　(9.4)

下面我们要考虑的一些非紧致结果早已为 Tarski 所知，他建立了许多布尔代数和相关论题的定理可运用于可达基数. 后来他又认识到，他所研究的性质密切相关于(其中有一些实际等价于)所涉及的基数的非紧致性. 用这种方法，所有的可达基数被证明都是非紧致的；这些结果已经隐含在 Scott-Tarski 的[1958]中. 对 Tarski 考虑的结果给予广泛明确地揭示是在 Keisler-Tarski [1964]关于不可达基数的论文中. Hanf 在其[1964]对 Tarski 的结果给出一个新的、稍有改进的模型论证明. 当 κ 是可达基数时，Dickmann 在其[1970]对 Hanf 原来的证明做了一些改进，从而把 Hanf 的结果从 $\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$概括到 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$.

9.1.3 定理　若 $\lambda,\gamma<\kappa$ 且 $\kappa\leqslant\lambda^{\gamma}$，则 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$是 λ^{γ}-非紧致语言.

说明：这个结果原是命题语言中的结果. 为了避免用命题符号和关于这些符号的赋值，我们在此给出一稍微不同的证明.

证明：我们这里考虑的语言由下列符号组成：一个一元谓词 R 和个体常元集 $\{c_{\xi,\eta};\xi<\gamma,\eta<\lambda\}$. 集合 Σ 由下列句子组成：

(1) $\bigwedge\limits_{\xi<\gamma}(\bigvee\limits_{\eta<\lambda}R(c_{\xi,\eta}))$，

(2) $\{\neg\bigwedge\limits_{\xi<\gamma}R(c_{\xi,f(\xi)});f\in\lambda^{\gamma}\}$.

显然，Σ 的基数为 λ^{γ}. 下证：

$$\Sigma\text{ 没有模型.}\tag{9.5}$$

(9.5)的证明：假设 Σ 有模型 $\mathfrak{A}$. 据(1)，对每一 $\xi<\gamma$，令 $f_0(\xi)$ 是最小的 $\eta<\lambda$ 使得 $c_{\xi,\eta}^{\mathfrak{A}}\in R^{\mathfrak{A}}$（据(1)，总存在这样一个 η)，因此

$$\mathfrak{A}\models\bigwedge_{\xi<\gamma}R(c_{\xi,f_0(\xi)}).$$

我们令 $f=f_0$，则(2)的元素 $\neg\bigwedge\limits_{\xi<\gamma}R(c_{\xi,f_0(\xi)})$ 也在 $\mathfrak{A}$ 中成立，矛盾. 所以(9.5)证毕. 下证：

任给 $f\in\lambda^{\gamma}$，令 $\Sigma_f=\Sigma-\{\neg\bigwedge\limits_{\xi<\gamma}R(c_{\xi,f(\xi)})\}$，则 Σ_f 有模型.

(9.6)

(9.6)的证明：令 $\mathfrak{A}_f$ 是下列结构

个体域 $A_f=\{0,1\}$；

$$c_{\xi,\eta}^{\mathfrak{A}_f}=\begin{cases}1, & \text{若 }\eta=f(\xi),\\ 0, & \text{否则},\end{cases}\qquad \text{对 }\xi<\gamma;$$

$R^{\mathfrak{A}_f}=\{1\}$.

易证(1)和 $\Sigma_f\cap(2)$中的句子在 $\mathfrak{A}_f$ 中成立. (9.6)证毕. 下证：

$$(2)\text{有模型.}\tag{9.7}$$

令 $\mathfrak{B}$ 是下列结构：

$B=\{0,1\}$；　$R^{\mathfrak{B}}=\{1\}$；

$c_{\xi,\eta}^{\mathfrak{B}}=0$，　对 $\xi<\gamma$，$\eta<\lambda$.

显然，$\mathfrak{B}\models(2)$. 把(9.6)和(9.7)结合起来就证明了 Σ 的每一

真子集都有模型. □

从现在起本节所考虑的结构的语言都有二元关系 R_0；为了直观，我们用 $x<y$ 来表示 $\langle x,y\rangle\in R_0$.

9.1.4 定理 若 κ 是奇异基数，则 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$ 是 κ-非紧致语言.

证明：据假设，存在 $\beta<\kappa$ 和序列 $\langle\gamma_\xi:\xi<\beta\rangle\subseteq\kappa$ 使得 $\kappa=\bigcup\limits_{\xi<\beta}\gamma_\xi$. 令 R_1 是新增一元关系. 考虑下列 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$ 的句子集 Σ：

(3) "个体域被<线序"，

(4) $\bigvee\limits_{\xi<\beta}\forall x[R_1(x)\rightarrow\bigvee\limits_{\eta<\gamma_\xi}\varphi_\eta^{R_1}(x)]$，

(5) $\exists x[\varphi_\eta(x)\wedge R(x)]$， 对 $\eta<\kappa$.

其中 $\varphi_\eta^{R_1}$ 和 φ_η 是例 1.2.5 和 1.2.4 中的 $\varphi_\eta^{R_1(x)}$ 和 $\varphi_\eta^{<}$. 显然，Σ 有基数 κ. 据 1.2.6，句子(4)述说：

在 Σ 的任意模型 $\mathfrak{A}$ 中，存在 $\xi<\beta$ 使得若 a 是 $R_1^{\mathfrak{A}}$ 的元，则由 a 确定的 $R_1^{\mathfrak{A}}$ 中的节 $(S_a\cap R_1^{\mathfrak{A}})$ 以 $\leqslant\gamma_\xi$ 的序型被 $<^{\mathfrak{A}}$ 良序.

因此 $R_1^{\mathfrak{A}}$ 的序型 $<\kappa$. 句子(5)述说：

在 Σ 的每一模型 $\mathfrak{A}$ 中，$R_1^{\mathfrak{A}}$ 包含确定 A 中所有序型 $<\kappa$ 的节的元素.

所以 $|R_1^{\mathfrak{A}}|\geqslant\kappa$，矛盾. 所以 Σ 没有模型.

若 $\Gamma\subseteq\Sigma$ 且 $|\Gamma|<\kappa$，我们构造 Γ 的模型 $\mathfrak{A}_\Gamma$ 如下：

个体域 $A_\Gamma=\kappa$， $<^{\mathfrak{A}_\Gamma}=\in\restriction\kappa$，

$R_1^{\mathfrak{A}_\Gamma}=\{\eta\in\kappa:\exists x[\varphi_\eta(x)\wedge R_1(x)]\in\Gamma\}$.

令 δ_0 是 $R_1^{\mathfrak{A}_\Gamma}$ 的元素以自然序构成的序型，即

$$R_1^{\mathfrak{A}_\Gamma}=\langle\eta_\mu:\mu<\delta_0\rangle,\quad \text{其中 } \mu<\mu_1<\delta_0\ \Rightarrow\ \eta_\mu<\eta_{\mu_1}.$$

显然，$|\delta_0|\leqslant|\Gamma|<\kappa$. 因为 κ 是基数，所以 $\delta_0<\kappa$. 因此存在 $\xi_0<\beta$ 使得 $\delta_0\leqslant\gamma_{\xi_0}$. 下证：

$$\mathfrak{A}_\Gamma\models\forall x[R_1(x)\rightarrow\bigvee_{\eta<\gamma_{\xi_0}}\varphi_\eta^{R_1}(x)]. \tag{9.8}$$

证明：令 $\zeta\in R_1^{\mathfrak{A}_\Gamma}$，则对某个 $\mu<\delta_0\leqslant\gamma_{\xi_0}$，$\zeta=\eta_\mu$，所以据 1.2.6，

$S_\zeta \cap R_1^{\mathfrak{A}_\Gamma}$ 的序型是 μ 且 $\mathfrak{A}_\Gamma \models \varphi_\mu^{R_1}[\zeta]$，因此对所有 $\zeta \in R_1^{\mathfrak{A}_\Gamma}$，

$$\mathfrak{A}_\Gamma \models \bigvee_{\eta < \gamma_{\xi_0}} \varphi_\eta^{R_1}[\zeta].$$

这说明(4)在 $\mathfrak{A}_\Gamma$ 中成立. 而据 $R_1^{\mathfrak{A}_\Gamma}$ 的定义，在 Γ 中出现的(5)(即使得 $\eta \in R_1^{\mathfrak{A}_\Gamma}$ 的句子)也在 $\mathfrak{A}_\Gamma$ 中成立. □

说明：(Ⅰ) 9.1.4 的证明方法非常重要，因为它的精致形式还可以用来证明一大类不可达基数的非紧致性(参见后面的 § 2).

(Ⅱ) 在原来 Hanf 对 $\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$的非紧致性的证明中，他用良序概念来代替线序概念. 为此他还需引入下列句子：

$$\neg \exists v \upharpoonright \omega (\bigwedge_{n<\omega} v_{n+1} < v_n). \tag{9.9}$$

在他的证明中，下列公式(刻画对应的良序结构的第 η 个元素)：

$$\exists v \upharpoonright \eta [\bigwedge_{\zeta<\eta} (\bigwedge_{\xi<\zeta} v_\xi < v_\zeta) \wedge \forall z (z < x \to \bigvee_{\xi<\eta} z \equiv v_\xi)], \quad 对\ \eta < \kappa. \tag{9.10}$$

起着本质的作用. Dickmann 在其[1970]中去掉了(9.9)，用例 1.2.5 引入的公式 $\varphi_\beta^<$ 来代替(9.10). 用这样的公式，Dickmann 改善了 Hanf 所得的结果. 在上述定理中，他证明了当 κ 是可达基数时，不仅 $\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$，而且 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$也是强非紧致的.

9.1.5 定理 若 κ 是后继基数，则 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$是 κ-非紧致语言.

证明：令 κ 是后继基数且 $\kappa = \lambda^+$，句子集 Σ 由 9.1.4 证明中的(3)加上下列句子组成：

(6) $\forall xyz[F(x,y) \wedge F(x,z) \to y \equiv z] \wedge \forall xyz[F(y,x) \wedge F(z,x) \to y \equiv z] \wedge \forall x \exists y[R_1(x) \to F(x,y)]$，

(7) $\forall x[R_1(x) \to \bigvee_{\eta<\lambda} \varphi_\eta(x)]$，

(8) $\exists x[R_1(x) \wedge \forall y(F(x,y) \to \varphi_\eta(y))]$， 对每一 $\eta < \kappa$.

Σ 的非逻辑符号集为$\{<, R_1, F\}$. 显然 Σ 的幂为 κ. 且(6)述说：

$$F\ 是单射使得\ R_1 \subseteq \mathrm{Dom}(f).$$

下证 Σ 没有模型. 假设 Σ 有模型 $\mathfrak{A}$，令 $f = F^{\mathfrak{A}}$，据(6)，$R_1^{\mathfrak{A}} \subseteq \mathrm{Dom}(f)$. 据(8)，对每一 $\eta < \kappa$，在 $\mathrm{Ran}(f \upharpoonright R_1^{\mathfrak{A}})$ 中存在确定序型为 η

的节的元素(参见 1.2.6),所以 $|\mathrm{Ran}(f\upharpoonright R_1^{\mathfrak{A}})|\geqslant\kappa$. 因为

$$|\mathrm{Ran}(f\upharpoonright R_1^{\mathfrak{A}})|=|R_1^{\mathfrak{A}}| \quad (f\upharpoonright R_1^{\mathfrak{A}}\text{ 是这些集合间的单射}),$$

因此 $|R_1^{\mathfrak{A}}|\geqslant\kappa>\lambda$. 另一方面,(7)蕴涵 $R_1^{\mathfrak{A}}$ 的每一元素(在 A 中)确定序型 $<\lambda$ 的一个 $<^{\mathfrak{A}}$-节,因此 $R_1^{\mathfrak{A}}$ 以序型 $\leqslant\lambda$ 被 $<^{\mathfrak{A}}$ 良序,所以 $|R_1^{\mathfrak{A}}|\leqslant\lambda$,矛盾.

令 Γ 是 Σ 的任意幂 $<\kappa$ 的子集,下证 Γ 有模型. 不妨假设形如(8)的句子在 Γ 中出现. 令 $\rho=\sup X$,其中

$$X=\{\eta\in\kappa:\exists x[R_1(x)\wedge\forall y(F(x,y)\rightarrow\varphi_\eta(y))]\in\Gamma\}.$$

显然,$|X|\leqslant|\Gamma|\leqslant\lambda$. 因为 κ 是后继基数,所以 κ 是正则基数,因此 $\rho<\kappa$. 下面我们来构造 Γ 的模型 $\mathfrak{A}_\Gamma$:

$$A_\Gamma=\rho,\quad <^{\mathfrak{A}_\Gamma}=\in\upharpoonright\rho.$$

分两种情况定义 $R_1^{\mathfrak{A}_\Gamma}$ 和 $F^{\mathfrak{A}_\Gamma}$:

情况 1 $\rho\leqslant\lambda$: 则定义 $R_1^{\mathfrak{A}_\Gamma}=\rho$ 且 $F^{\mathfrak{A}_\Gamma}$是 id_ρ(即 ρ 上的恒等函数)的图形. 显然,在这种情况下,(6),(7)和 Γ 中形如(8)的句子在 $\mathfrak{A}_\Gamma$ 中成立.

情况 2 $\lambda<\rho<\kappa$: 因为 $|X|<\lambda$,所以 X 的元素可以排序为序型 $\delta=|X|$的序列,即存在双射 $g\in X^\delta$. 我们定义:

$$R_1^{\mathfrak{A}_\Gamma}=\delta,$$

$$F^{\mathfrak{A}_\Gamma}=g\text{ 的图形}$$

$$=\{\langle\beta,\gamma\rangle:\beta<\delta,\gamma\in X\text{ 且 }g(\beta)=\gamma\}.$$

因此 $\mathrm{Ran}(F^{\mathfrak{A}_\Gamma})=\mathrm{Ran}(g)=X$. 显然,据 g 和 $F^{\mathfrak{A}_\Gamma}$的定义,(6)在 $\mathfrak{A}_\Gamma$ 中成立. 因为 $\delta\leqslant\lambda$,所以(7)也在 $\mathfrak{A}_\Gamma$ 中成立.

若 $\eta<\kappa$ 且 $\exists x[R_1(x)\wedge\forall y(F(x,y)\rightarrow\varphi_\eta(y))]\in\Gamma$,则 $\eta\in X$. 我们写作 $\gamma=g^{-1}(\eta)$,则 $\gamma<\delta$,即 $\gamma\in R_1^{\mathfrak{A}_\Gamma}$ 且 $g(\gamma)=\eta$,所以,

$$\mathfrak{A}_\Gamma\models\varphi_\eta[g(\gamma)],$$

因此在 Γ 中形如(8)的所有句子在 $\mathfrak{A}_\Gamma$ 中成立,所以 $\mathfrak{A}_\Gamma\models\Gamma$. □

综述上面的结果,就有下列推论:

9.1.6 推论 (1) κ 是可达基数 $\Rightarrow \mathscr{L}_{\kappa\omega}$是非紧致语言.

(2) κ 是强可达基数 $\Rightarrow \mathscr{L}_{\kappa\omega}$是强非紧致语言.

(3)(Tarski) κ 是可达基数 $\Rightarrow \kappa$ 是非紧致基数(或表述为

κ 是紧致基数 $\Rightarrow \kappa$ 是强不可达基数).

(4) κ 是强可达基数 $\Rightarrow \kappa$ 是强非紧致基数(或表述为

κ 是弱紧致基数 $\Rightarrow \kappa$ 是弱不可达基数).

证明:(1) 假设 κ 是可达基数,则 κ 是奇异基数或对某个基数 $\lambda<\kappa, \kappa\leqslant 2^{\lambda}$. 在第一种情况下,据 9.1.4,$\mathscr{L}_{\kappa\omega}$是 κ-非紧致语言;在第二种情况下,据 9.1.3,$\mathscr{L}_{\kappa\omega}$是 2^{λ}-非紧致语言. 在这两种情况下,据 9.1.2(2),$\mathscr{L}_{\kappa\omega}$都是非紧致语言.

(2) 假设 κ 是强可达基数,则 κ 是奇异基数或 κ 是后继基数,据 9.1.4 和 9.1.5,$\mathscr{L}_{\kappa\omega}$都是 κ-非紧致语言,所以据 9.1.2(3),$\mathscr{L}_{\kappa\omega}$是强非紧致语言.

(3) 在上述(1)的证明中,若 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$是 κ-非紧致语言,据 9.1.1 后面的说明,$\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$也是 κ-非紧致语言;若 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$是 2^{λ}-非紧致语言,同理,$\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$也是 2^{λ}-非紧致语言. 所以据 9.1.2(2),在这两种情况下,κ 都是非紧致基数.

(4) 证明类似(3). □

说明:(Ⅰ) 据 **GCH**,可达基数类 **AC** 和强可达基数类 **SAC** 重合,所以

(GCH) $\quad\quad$ **AC**$\subseteq$**SI**.

(Ⅱ) 本章一开始就说过,假设"**In**$=\{\omega\}$"和"**WIn**$=\{\omega\}$"(其中 **In** 和 **WIn** 分别指称不可达基数类和弱不可达基数类)可以一致地增加到通常的集合论的公理上. 推论 9.1.6 证明了 **C**$\subseteq$**In**, **WC**$\subseteq$**WIn**,因此下列陈述句也能增加到通常的集合论公理上而不破坏一致性:

(i) "不存在$>\omega$的紧致基数" $\quad$ (**C**$=\{\omega\}$).

(ii) "不存在$>\omega$的弱紧致基数" $\quad$ (**WC**$=\{\omega\}$).

(Ⅲ) 下一章我们将看到在 **KPU** 集合论中人们能找到某种较

弱的紧致性，即 Σ_1-紧致性.

§2　不可达基数的非紧致性

本节主要致力于 9.2.6 的证明，这是 Hanf 关于非紧致性的主要结果. 它说明，对大量 $>\omega$ 的不可达基数，若它们存在，则是强非紧致的. Hanf 原来的证明是对 $\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$做的. Dickmann 对此稍加修改使之适用于 $\mathscr{L}_{\kappa\omega_1}$，但他并没有把这种方法成功地扩张到 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$. 在后面的 § 3，Dickmann 却用不同的方法证明了：

$\mathscr{L}_{\kappa\omega}$是 κ-紧致语言 $\Rightarrow$ κ 是弱紧致基数.

同样，若 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$有强紧致性质，则 $\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$也有这种性质. 因此，

对 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$和 $\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$，强紧致性问题和弱紧致性问题是等价的.

这个事实是 Dickmann 在[1970]第一次明确提到的.

在本节的末尾，我们说明如何修正 Hanf 的证明以便可用于更丰富的基数类. 用这种方法，无需 **GCH**，我们就能证明许多可达和弱不可达基数不仅是非紧致的，而且还是强非紧致的.

Keisler 在其[1962]构造了一个 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$的公式，对 $\lambda<\kappa$，这个公式述说了“*λ 是可达基数*”的性质. 我们在后面的证明中要用到这个公式. 这要求我们在此作一些预备性解释.

假设我们有线序$<$和两个恰好有三个自由变元的公式 φ，ψ. 令 $Fn(x,y,\varphi)$是述说：“*$\varphi(x,\cdot,\cdot)$是从 S_y 的一子集到 S_x 中的映射*”的下列公式：

$$\forall zwv[\varphi(x,z,w)\wedge\varphi(x,z,v)\rightarrow w\equiv v]$$
$$\wedge\forall zw[\varphi(x,z,w)\rightarrow z<y\wedge w<x].$$

下列公式 $\Xi(x,\psi)$述说：“*存在 $y<x$ 使得 F_x 是从 S_x 到 $\mathscr{P}(S_y)$中的单射使得对 $z<x$，$F_x(z)=\{u;\psi(x,z,u)\}$*”，即

$$\exists y[y<x\wedge\forall zu(\psi(x,z,u)\rightarrow z<x\wedge u<y)\wedge\forall zw[z<x$$
$$\wedge w<x\wedge\forall u(\psi(x,z,u)\leftrightarrow\psi(x,w,u))\rightarrow z\equiv w]].$$

下列公式 $\Theta(x,\varphi)$ 述说："存在 $y<x$ 使得 $\varphi(x,\cdot,\cdot)$ 是从 S_y 的一子集到 S_x 中的映射且 $\varphi(x,\cdot,\cdot)$ 的值域与 S_x 共尾"，即：

$$\exists y[y<x \wedge Fn(x,y,\varphi) \wedge \forall u[u<x \rightarrow \exists zw(\varphi(x,z,w) \wedge u<w)]].$$

下面我们来证明本节的主定理，但为此还需引入一个重要的运算 **M** 及其基本性质：

9.2.1 定义 集合 $C\subseteq$ **ON** 称为**相对闭集** $\Leftrightarrow$ 对所有非空子集 $A\subseteq C$，若存在 $x\in C$ 使得对所有 $y\in A$，$y\leqslant x$（这样的 A 称为在 C 中向上有界），则 $\bigcup A\in C$.

9.2.2 定义 若 $X\subseteq$ **ON**，定义 **M** 如下：

$$\mathbf{M}(X)=\{\xi\in\mathbf{ON}：存在相对闭集\ C\subseteq X\ 使得\ \xi=\bigcup C\}.$$

9.2.3 引理 运算 $\mathbf{M}(X)$ 有下列基本性质：

(1) $X\subseteq\mathbf{M}(X)$，

(2) $X\subseteq Y \Rightarrow \mathbf{M}(X)\subseteq\mathbf{M}(Y)$，

(3) $X\subseteq\mathbf{CN}_1 \Rightarrow \mathbf{M}(X)\subseteq\mathbf{CN}_1$，

(4) $\mathbf{M}(\mathbf{AC}\cup(\mathbf{ON}-\mathbf{CN}_1))=\mathbf{M}(\mathbf{AC})\cup(\mathbf{ON}-\mathbf{CN}_1)$，

(5) $\mathbf{M}(\mathbf{AC})=\mathbf{AC}\cup\mathbf{M}(\mathbf{Sing})$，

其中 **Sing** 表示所有奇异基数的类.

证明：据 **M** 的定义. □

若我们把下列公理加到 **ZFC** 上：

存在一足够大的使我们考虑的问题不落空的不可达基数 Ω，

且把"**ON**"解释为"小于 Ω 的所有序数的集合"，则不会出现下列问题：

Ω 上的诸良序关系一一对应序数 α 使得 $\Omega\leqslant\alpha<\Omega^+$.

因此 $\langle\mathbf{ON},R\rangle$ 的序型存在，即存在唯一的序数 α 使得 $\Omega\leqslant\alpha<\Omega^+$ 且 $\langle\mathbf{ON},R\rangle\cong\langle\alpha,\in\restriction\alpha\rangle$. 我们用 τ_R 来指称这个序型.

任给 **ON** 上的良序关系 R，我们用 e 来表示对应的枚举函数，即 e 是 $\langle\tau_R,\in\rangle$ 和 $\langle\mathbf{ON},R\rangle$ 间的（唯一）同构. 为了方便，以下令 $e(\eta)=e_\eta$，当 $R=\in$ 时，对所有 $\eta\in\mathbf{ON}$，$e_\eta=\eta$.

9.2.4 定义 （1）递归定义 $\mathbf{M}^{R,\eta}$ 如下：

$\mathbf{M}^{R,0}(X)=X$,

$\mathbf{M}^{R,\eta+1}(X)=\mathbf{M}^{R,\eta}(X)\cup[\mathbf{M}(\mathbf{M}^{R,\eta}(X))-(e_\eta+1)]$,

若 $\eta\in\mathbf{ON}$.

$\mathbf{M}^{R,\lambda}(X)=\bigcup\limits_{\xi<\lambda}\mathbf{M}^{R,\xi}(X)$， 若 λ 是极限序数且 $\lambda>0$.

$\mathbf{M}^{R}(X)=\bigcup\limits_{\eta\in\mathbf{ON}}\mathbf{M}^{R,\eta}(X)$.

（2）递归定义 $\mathbf{M}^{\eta}$ 如下：

$\mathbf{M}^{0}(X)=X$,

$\mathbf{M}^{\eta+1}(X)=\mathbf{M}^{\eta}(X)\cup[\mathbf{M}(\mathbf{M}^{\eta}(X))-(e_\eta+1)]$， 若 $\eta\in\mathbf{ON}$.

$\mathbf{M}^{\lambda}(X)=\bigcup\limits_{\xi<\lambda}\mathbf{M}^{\xi}(X)$， 若 λ 是极限序数且 $\lambda>0$.

$\mathbf{M}^{\infty}(X)=\bigcup\limits_{\eta\in\mathbf{ON}}\mathbf{M}^{\eta}(X)$.

注意：在上述定义中，$\mathbf{M}^{R,\alpha}$ 是 $\mathbf{M}^{\alpha}$ 的概括，$\mathbf{M}^{R}$ 是 $\mathbf{M}^{\infty}$ 的概括.

9.2.5 说明 在 9.2.4 的第二步加上类 $\mathbf{M}^{R,\eta}$ 是为了使诸 $\mathbf{M}^{R,\xi}$ 的值随 ξ 递增. 减去集合 $e_\eta+1$ 是为了使条件“$\alpha\in\mathbf{M}^{R}(X)$”只依赖限于 $<\alpha$ 的序数上的关系 R.

9.2.6 定理 令 R 是 $\mathbf{ON}$ 上的良序关系且 $\kappa\in\mathbf{In}-\{\omega\}$，则

$$\kappa\in\mathbf{M}^{R}(\mathbf{AC})\Rightarrow\mathscr{L}_{\kappa\omega_1}\text{是 }\kappa\text{-非紧致语言}.$$

证明：令 e 是对应 R 的枚举函数，η 是最小的 ξ 使得 $\kappa\in\mathbf{M}^{R,\xi}(\mathbf{AC})$. 因为 $\kappa\in\mathbf{In}-\{\omega\}$ 且 $\mathbf{M}^{R,0}(\mathbf{AC})=\mathbf{AC}$，所以有 $\eta>0$. 因为 $\mathbf{M}^{R,\lambda}(\mathbf{AC})=\bigcup\limits_{\xi<\lambda}\mathbf{M}^{R,\xi}(\mathbf{AC})$，其中 λ 是极限序数，所以 η 是后继序数（若 η 是极限序数，则它就不是最小的 ξ 使得 $\kappa\in\mathbf{M}^{R,\xi}(\mathbf{AC})$）. 不妨令 $\eta=\zeta+1$，因此 $\kappa\notin\mathbf{M}^{R,\zeta}(\mathbf{AC})$. 因为据 9.2.4，有

$$\mathbf{M}^{R,\zeta+1}(\mathbf{AC})-\mathbf{M}^{R,\zeta}(X)=\mathbf{M}(\mathbf{M}^{R,\zeta}(X))-(e_\zeta+1),$$

所以 $\kappa\in\mathbf{M}(\mathbf{M}^{R,\zeta}(\mathbf{AC}))$. 据 9.2.5，$\kappa>e_\zeta$. 因此存在相对闭集 C 使

$$C\subseteq\mathbf{M}^{R,\zeta}(\mathbf{AC}),\quad \kappa=\bigcup C.$$

现在我们来构造一个句子集 Σ 以证明 $\mathscr{L}_{\kappa\omega_1}$ 的非紧致性，这个 Σ 由（限制于小于 κ 的序数上的）R，e_ζ 和 C 构造起来.

Σ的语言的符号有下列意义：

R_0 是良序关系$<$，

R_1 表示 R 限制在小于 κ 的序数上，

R_2 表示由 $\alpha\in \mathbf{M}^{R,\eta}(\mathbf{AC})$定义的、$\alpha$ 和 η 间的二元关系，

R_3 以序数的相对闭集的元素和它的上确界之间的二元关系的形式表示该相对闭集，

R_4 和 R_5 表达可达性的三元关系，

（R_4 和 R_5 分别起本节一开始考虑的 φ 和 ψ 的作用.）

一元关系 R_6 指称所及论域的所有序数或奇异基数的集合，

一元关系 R_7 指称所有不是强极限基数的基数的集合，

一元关系 R_8 用于与集合 C 相连.

Σ 由下列句子组成：

(1) “个体域被$<$线序”，

(2) $\forall x[R_6(x)\to\Theta(x,R_4)]$，

(3) $\forall x[R_7(x)\to\Xi(x,R_5)]$，

(4) $\forall wx[R_2(w,x)\to R_6(w)\vee R_7(w)$
$\vee\exists y[R_1(y,x)\wedge y<w\wedge\forall z(R_3(w,z)\to R_2(z,y))]]$，

(5) $\forall wx[x<w\to\exists y(x<y\wedge y<w\wedge R_3(w,y))]$，

(6) $\forall wx[x<w\wedge\forall z[z<x\to\exists y(z<y\wedge y<x\wedge R_3(w,y))]$
$\to R_3(w,x)]$，

(7) $\exists x\forall y(y<x\vee y\equiv x)$，

(8) $\forall x[\forall z[z<x\to\exists y(z<y\wedge y<x\wedge R_8(y))]\to R_8(x)]$，

(9) $\exists x[\Phi_{e_\zeta}(x)\wedge\forall y(R_8(y)\to R_2(y,x))]$，

(10) $\exists xy[\Phi_\xi(x)\wedge\Phi_\eta(y)\wedge\neg R_1(x,y))]$，

对 $\xi,\eta<\kappa,\langle\xi,\eta\rangle\notin R$，

(11) $\exists x[\Phi_\eta(x)\wedge R_8(x)]$， 对所有 $\eta\in C$，

(12) $\neg(\exists v\upharpoonright\omega)\bigwedge_{n<\omega}(v_{n+1}<v_n)$.

注意：(Ⅰ) 上述 Φ_{e_ζ}，Φ_ξ和 Φ_η就是 1.2.4 中的 $\varphi^<_{e_\zeta}$，$\varphi^<_\xi$，和 $\varphi^<_\eta$.

（Ⅱ）除了(9)--(12)，Σ 中其它句子都是 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$的句子，(9)—(11)是 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$的句子，只有(12)才是带无穷量词的 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega_1}$-句子.

下面我们分几步证明 Σ 没有模型.

假设 Σ 有模型 $\mathfrak{A}$，据(12)（这是本证明唯一用到(12)之处），$\mathfrak{A}$ 被$<^{\mathfrak{A}}$ 良序，所以不妨假设对某个序数 ρ，$A=\rho$ 且$<^{\mathfrak{A}}=\in\upharpoonright\rho$. 据(7)，$\mathfrak{A}$ 有一最后元(last element)，因此 ρ 是后继序数. 不妨令 $\rho=\delta+1$. 据(11)，对每一 $\eta\in C$，$\mathfrak{A}$ 有序型为 η 的初始节. 因为 $\kappa=\bigcup C$，所以 $\mathfrak{A}$ 有一个序型$\geqslant\kappa$ 的初始节. 因为 κ 是极限序数，ρ 是后继序数，所以 $\kappa<\rho$，因此 $\kappa\leqslant\delta$ 且 $\kappa\in A$. 下证：

$$R_6^{\mathfrak{A}}\cup R_7^{\mathfrak{A}}\subseteq\mathbf{AO}\quad(\mathbf{AO}=(\mathbf{ON}-\mathbf{CN}_I)\cup\mathbf{AC}).\tag{9.11}$$

(9.11)的证明：假设 $\alpha\in R_6^{\mathfrak{A}}$. 据(2)，$\mathfrak{A}\models\Theta[\alpha,R_4^{\mathfrak{A}}]$，据 Θ 的构造，$S_\alpha^{<^{\mathfrak{A}}}=\alpha$ 或者不是基数或者是奇异基数，而在这两种情况下都有 $\alpha\in\mathbf{AO}$. 假设 $\alpha\in R_7^{\mathfrak{A}}$，据(3)，$\mathfrak{A}\models\Xi[\alpha,R_5^{\mathfrak{A}}]$. 对 $\eta<\alpha$，令

$$F_\alpha(\eta)=\{\beta\in A:\langle\alpha,\eta,\beta\rangle\in R_5^{\mathfrak{A}}\}.$$

据 Ξ 的构造，对某个 $\gamma<\alpha$，$F_\alpha:\alpha\to\mathscr{P}(\gamma)$是单射，因此 $\alpha\leqslant2^\gamma$，即 α 是可达基数，所以 $\alpha\in\mathbf{AO}$. (9.11)证毕. 下证：

$$\text{若 }\alpha\leqslant\kappa,e_\eta<\kappa\text{ 且}\langle\alpha,e_\eta\rangle\in R_2^{\mathfrak{A}}\text{，则 }\alpha\in\mathbf{M}^{R,\eta}(\mathbf{AO}).\tag{9.12}$$

(9.12)的证明：施归纳于 η. 假设对所有 $\xi<\eta$，

$$\text{若 }\beta\leqslant\kappa,e_\xi<\kappa\text{ 且}\langle\beta,e_\xi\rangle\in R_2^{\mathfrak{A}}\text{，则 }\beta\in\mathbf{M}^{K,\xi}(\mathbf{AO}).\tag{9.13}$$

令 α 和 e_η 如(9.12)假设所规定，$D_\alpha=\{\beta<\alpha:\langle\alpha,\beta\rangle\in R_3^{\mathfrak{A}}\}$. 先证：

$$\alpha=\bigcup D_\alpha.\tag{9.14}$$

令 $\gamma<\alpha$，据句子(5)，存在 $\beta\in A$ 使得 $\gamma<\beta<\alpha$ 且$\langle\alpha,\beta\rangle\in R_3^{\mathfrak{A}}$，这意味 $\beta\in D_\alpha$，所以 $\gamma\in\bigcup D_\alpha$，因此 $\alpha\subseteq\bigcup D_\alpha$. 而据 D_α的构造，显然有 $\bigcup D_\alpha\subseteq\alpha$. (9.14)证毕. 下证：

$$D_\alpha\text{是相对闭的}.\tag{9.15}$$

令 $B\subseteq D_\alpha$非空且存在 $\beta\in D_\alpha$使得对所有 $\gamma\in B$，$\gamma\leqslant\beta$，即 B 是以 $\beta\in D_\alpha$为上界的集合. 还令 B 没有最后元，要证 $\bigcup B\in D_\alpha$. 据假设

对任意 $z\in\bigcup B$，存在 $y\in B$ 使得 $z\in y$. 因为 $B\subseteq D_\alpha$，所以 $y\in D_\alpha$，而据集合论的基本事实，$y\in B\Rightarrow y\subseteq\bigcup B$. 若 $y=\bigcup B$，则 $y\in y$，矛盾. 所以 $y\subset\bigcup B$. 因为 B 是非空序数集，所以据 Jech 的[1978]，p. 15，$\bigcup B$ 是序数，所以 $y\in\bigcup B$，因此对任意 $z<\bigcup B$，存在 $y<\bigcup B$，$z<y$ 且 $y\in D_\alpha$. 因为 $\bigcup B\leqslant\beta<\alpha$，所以对任意 α 和 $\bigcup B$，若 $\bigcup B<\alpha$ 且任意 $z\in\bigcup B$，则存在 y 使 $z<y<\bigcup B$ 且 $\langle\alpha,\beta\rangle\in R_3^{\mathfrak{A}}$，所以据(6)，$\langle\alpha,\bigcup B\rangle\in R_3^{\mathfrak{A}}$，因此据 D_α 的构造，$\bigcup B\in D_\alpha$，所以 D_α 是相对闭的.

据假设 $\langle\alpha,e_\eta\rangle\in R_2^{\mathfrak{A}}$ 和句子(4)，下列(9.16)和(9.17)总有一个成立：

$$\alpha\in R_6^{\mathfrak{A}}\ \text{或}\ \alpha\in R_7^{\mathfrak{A}}. \tag{9.16}$$

存在 $e\in A$ 使得 $e<\alpha$，$\langle e,e_\eta\rangle\in R_1^{\mathfrak{A}}$ 且对每一 $\beta<A$，

$$\langle\alpha,\beta\rangle\in R_3^{\mathfrak{A}}\Rightarrow\langle\beta,e\rangle\in R_2^{\mathfrak{A}}. \tag{9.17}$$

若(9.16)成立，据(9.11)，我们有 $\alpha\in\mathbf{AO}\subseteq\mathbf{M}^{R,\eta}(\mathbf{AO})$，所以(9.12)成立. 假设(9.17)成立，因为 $e<\alpha\leqslant\kappa$ 且 $e_\eta<\kappa$，所以我们有 $\langle e,e_\eta\rangle\in R$，否则据句子(10)，$\langle e,e_\eta\rangle\notin R_1^{\mathfrak{A}}$，这与(9.17)矛盾. 因此对某个 $\xi<\eta$，$e=e_\xi$. 据 D_α 的构造和(9.17)的最后一个断定，有

$$\langle\beta,e_\xi\rangle\in R_2^{\mathfrak{A}},\quad\text{对所有}\ \beta\in D_\alpha.$$

据归纳假设(9.13)，有

$$D_\alpha\subseteq\mathbf{M}^{R,\xi}(\mathbf{AO}).$$

据(9.14)和(9.15)和 $\mathbf{M}$ 的定义，我们有 $\alpha\in\mathbf{M}(\mathbf{M}^{R,\xi}(\mathbf{AO}))$，因为 $e=e_\xi<\alpha$，所以 $\alpha\notin e_\xi+1$，因此 $\alpha\in\mathbf{M}^{R,\xi+1}(\mathbf{AO})$. 因为 $\xi<\eta$，所以 $\alpha\in\mathbf{M}^{R,\eta}(\mathbf{AO})$. 至此(9.12)的证明完毕.

因为 $\mathfrak{A}$ 是 Σ 的模型，所以据句子(11)，$C\subseteq R_8^{\mathfrak{A}}$. 据句子(8)，$R_8^{\mathfrak{A}}$ 是 $<^{\mathfrak{A}}$-闭的(即 $R_8^{\mathfrak{A}}$ 包含它的元素的任何递增序列的极限). 因为 $\kappa=\bigcup C$，所以 $\kappa\in R_8^{\mathfrak{A}}$. 据句子(9)，我们有 $\langle\kappa,e_\zeta\rangle\in R_2^{\mathfrak{A}}$. 据(9.12)，我们有 $\kappa\in\mathbf{M}^{R,\zeta}(\mathbf{AO})$，与 $\kappa\in\mathbf{In}-\{\omega\}$ 矛盾. 这样，我们证明了 Σ 没有

模型. 最后我们来证：

$$\Sigma \text{ 的每一幂} < \kappa \text{ 的子集有模型.} \tag{9.18}$$

令 Γ 是 Σ 的幂 $<\kappa$ 的子集，ρ 是 Γ 中形如(9)—(11)的句子所含的 Φ_η 中出现的所有序数 η 的上确界. 因为 $\kappa\in \mathbf{In}-\{\omega\}$，所以 κ 不是奇异基数，因此 $\rho<\kappa$. 如下构造 Γ 的模型 $\mathfrak{A}_\Gamma$：

$$A_\Gamma=\rho+1, \quad R_1^{\mathfrak{A}_\Gamma}=R\restriction(\rho+1),$$

$$R_2^{\mathfrak{A}_\Gamma}=\{\langle\alpha, e_\eta\rangle: \alpha, e_\eta\leqslant\rho \text{ 且 } \alpha\in \mathbf{M}^{R,\eta}(\mathbf{AC})\}.$$

对每一序数 $\alpha\leqslant\rho$，若对某个 η，

$$\alpha\in \mathbf{M}^{R,\eta-1}(\mathbf{AC})-\mathbf{M}^{R,\eta}(\mathbf{AC}),$$

则选择相对闭集 $D_\alpha\subseteq \mathbf{M}^{R,\eta}(\mathbf{AC})$ 使得 $\alpha=\bigcup D_\alpha$，否则令 $D_\alpha=\alpha$. 令

$$R_3^{\mathfrak{A}_\Gamma}=\{\langle\alpha,\beta\rangle:\beta\in D_\alpha\}.$$

对每一序数 $\alpha\leqslant\rho$，若 $\alpha\in(\mathbf{ON}-\mathbf{CN}_1)\cup\mathbf{Sing}$，则我们选择一特定的函数 f_α 使得 $\mathrm{Dom}(f_\alpha)<\alpha$，$\mathrm{Ran}(f_\alpha)\subseteq\alpha$ 且 $\bigcup\mathrm{Ran}(f_\alpha)=\alpha$；否则，令 $f_\alpha=\varnothing$. 令

$$R_4^{\mathfrak{A}_\Gamma}=\{\langle\alpha,\xi,\eta\rangle:\langle\xi,\eta\rangle\in f_\alpha\}.$$

对每一序数 $\alpha\leqslant\rho$，若对某个 $\gamma<\alpha$，$\alpha\leqslant 2^\gamma$，则令 F_α 是从 α 到 γ 的某个子集族上的双射，否则 F_α 定义如下：

$$F_\alpha(\eta)=\{\eta\}, \quad \text{对每一 } \eta<\alpha.$$

因此令：

$$R_5^{\mathfrak{A}_\Gamma}=\{\langle\alpha,\eta,\xi\rangle:\xi\in F_\alpha(\eta)\},$$

$$R_6^{\mathfrak{A}_\Gamma}=\{\alpha\leqslant\rho:\alpha\in(\mathbf{ON}-\mathbf{CN}_1)\cup\mathbf{Sing}\},$$

$$R_7^{\mathfrak{A}_\Gamma}=\{\alpha\leqslant\rho:\alpha\leqslant 2^\gamma, \text{对某个 } \gamma<\alpha\},$$

$$R_8^{\mathfrak{A}_\Gamma}=C\cap(\rho+1).$$

现在验证 $\mathfrak{A}_\Gamma\vDash\Gamma$ 是例行公事，请读者自己完成. □

令 $\mathbf{H}^\kappa(\mathbf{In})=\mathbf{CN}_1-\mathbf{M}^\kappa(\mathbf{AC})$，$\mathbf{H}^\kappa(\mathbf{In})$的元素称为**序型为 κ 的超不可达**(hyperinaccessible)**基数**；令 $\mathbf{H}^D(\mathbf{In})=\mathbf{CN}_1-\mathbf{M}^\in(\mathbf{AC})$，$\mathbf{H}^D(\mathbf{In})$的元素称为**自为序型的超不可达基数**.

9.2.7 推论 (1) 所有不属于 $\mathbf{H}^\kappa(\mathbf{In})$的非枚举强不可达基数

κ 是强非紧致的.

(2) $\mathbf{H}^D(\mathbf{In})$的前 ω 个基数是强非紧致的.

(3) 若$\langle e_\xi:\xi\in\mathbf{ON}\rangle$,$\langle e'_\xi:\xi\in\mathbf{ON}\rangle$,$\langle e''_\xi:\xi\in\mathbf{ON}\rangle$,…是 **In** 的诸枚举,则所有的 e_ξ,e'_ξ,e''_ξ,…都是强紧致的,除非 $\xi=e_\xi,\xi=e'_\xi,\xi=e''_\xi$,…. 特别是第一个,第二个,…,第 ω 个,…,第 ω_1 个,…,第 ω_ω 个,…强不可达基数是强非紧致的.

证明:(1) 因为 $\alpha\in\mathbf{M}^\epsilon(\mathbf{AC})\Rightarrow\alpha\in\mathbf{M}^\in(\mathbf{AC})$,所以令 $R=\in$,则(1)是 9.2.6 的推论.

(2) 这里我们需要在 **ON** 中定义一良序关系 R 使得 $\mathbf{H}^D(\mathbf{In})$ 的前 ω 个元素在 $\mathbf{M}^R(\mathbf{AC})$中,我们把这一证明作为练习留给读者.

(3) 可以证明所有基数 e_ξ,e'_ξ,e''_ξ,…使得 $\xi<e_\xi,\xi<e'_\xi,\xi<e''_\xi$,…是 $\mathbf{M}(\mathbf{AC})$的元素. □

说明:9.2.7 并没有穷尽 9.2.6 所涉及的具有强非紧致性的所有强不可达基数,读者自己还可以继续这个工作.

令 $\mathbf{BC}=\mathbf{SAC}\cup\{\kappa\in\mathbf{CN}_1:\kappa=\lambda^\gamma$,对某些 $\lambda,\gamma<\kappa\}$,我们在本章§1(参见 9.1.3—9.1.5)已证明 **BC** 中所有基数都是强非紧致的,而且 $\mathbf{BC}\subseteq\mathbf{AC}$. 但一般地说,$\mathbf{BC}\neq\mathbf{AC}$,除非增加其它集合论公理(例如 **GCH**). 在这种情况下,下面的定理 9.2.8 与 9.2.6 相同.

9.2.8 定理 令 R 是 **ON** 上的良序关系且 $\kappa>\omega$,则

$$\kappa\in\mathbf{M}^R(\mathbf{BC})\Rightarrow\mathscr{L}_{\kappa\kappa}\text{是 }\kappa\text{-非紧致语言}.$$

证明:若 $\kappa\in\mathbf{BC}$,则我们已证明了该结果. 在 $\kappa\notin\mathbf{BC}$ 的情况下,本定理的证明非常类似 9.2.6 的证明. 它们之间的主要差异在于对关系 R_6 和 R_7 的选择. 在此,我们想要使 R_6 的每一元素或是一个后继基数或是一个不是基数的序数. 这就需要引入一新公式 $\Theta_1(x,\varphi)$述说:"存在 $y<x$ 使得对所有 $z<x,\varphi(x,z,\cdots)$定义一个从 S_z 到 S_y 中的单射",当然 R_4 也必须作相应地改变.

我们想要 R_7 包含所有形如 β^γ(其中 $\gamma,\beta<\beta^\gamma$)的基数,这也需要引入新公式 $\Xi_1(x,\psi)$来述说:"存在 $y,z<x$ 使得对所有 $w<x$,

$\psi(x,w,\cdots)$定义一从S_y到S_x中的映射，且对$w_1,w_2<x$使得$w_1\neq w_2$，映射$\psi(x,w_1,\cdots)$和$\psi(x,w_2,\cdots)$不同”. 在这种情况下，R_5是一个四元关系符号. 此外，还须增加$\mathscr{L}_{\beta',\beta'}$的一无穷公式述说：“对某个$\delta<\beta'$，每一把$\gamma$映射到$\beta$中的函数是$\psi(\beta',\delta,\cdots)$”. □

练　习

9.2.9　验证9.2.6的证明最后构造的$\mathfrak{A}_\Gamma$是Γ的模型.

§3　更大基数的紧致性

在§2，我们研究了“构造性定义的”不可达基数的非紧致性. 本节我们要研究使语言$\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$具有某种紧致性质的基数$\kappa$的特性和“规模”. 这里我们要研究三类基数：(1) 弱紧致的强不可达基数类，(2) 可测基数类，(3) (强)紧致基数类.

我们将看到，除非这三个基数类是空的，否则，它们每一类都包含在前一类中：(3)⊆(2)⊆(1). 对(1)和(2)，我们还有(2)⊂(1). 对(2)和(3)，是否有这样的真包含关系还不知道. 此外，我们知道(1)的第一个元素小于(2)的第一个元素，而这种情况对(2)和(3)还不清楚.

一、可测基数的紧致性

可测基数有许多等价的定义，下面的定义最符合我们的需要.

9.3.1 定义　称不可数基数κ是**可测基数**$\Leftrightarrow$ κ上存在$<\kappa$完全的非主超滤.

下面研究可测基数和(弱)紧致基数的关系.

9.3.2 定理　κ是可测基数$\Rightarrow$ κ是弱紧致基数.

证明：令κ是可测基数，$\mathscr{D}$是κ上$<\kappa$-完全的非主超滤，Σ是

$\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$的、幂$\leqslant\kappa$的句子集使得$\Sigma$的每一幂$<\kappa$的子集有模型. 令$\langle\sigma_\alpha:\alpha<\kappa\rangle$是对$\Sigma$的元素的一个枚举,且对每一$\beta<\kappa$,$\mathfrak{A}_\beta$是$\bigwedge_{\xi<\beta}\sigma_\xi$的模型. 只须证:

$$\prod_{\mathscr{D}}\mathfrak{A}_\beta\models\Sigma.$$

因为$\mathscr{D}$是非主超滤且是$<\kappa$-完全的,所以$\mathscr{D}$包含每一区间$\{\xi:0\leqslant\xi\leqslant\lambda\}$的补,其中$\lambda<\kappa$,据诸$\mathfrak{A}_\xi$的定义,我们有

$$\{\xi:\lambda<\xi<\kappa\}\subseteq\{\xi<\kappa:\mathfrak{A}_\xi\models\sigma_\lambda\},$$

因此右边的集合属于$\mathscr{D}$,所以据$\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$-超积基本定理(8.3.10),有

$$\prod_{\mathscr{D}}\mathfrak{A}_\beta\models\sigma_\lambda,\quad 对所有的\lambda<\kappa.$$

因此Σ有模型. □

9.3.3 推论 若R是**ON**上的良序关系且$\kappa\in\mathbf{M}^R(\mathbf{AC})$,则$\kappa$是不可测基数. 特别是在9.2.7中提到的所有强不可达基数是不可测的. 因此,若κ是可测的,则存在κ个$<\kappa$的强不可达基数.

证明:据题设和9.2.6,$\mathscr{L}_{\kappa\omega_1}$,从而$\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$,是$\kappa$-非紧致语言,所以$\kappa$是强非紧致基数. 因为$\mathbf{WC}=\mathbf{CN}_1-\mathbf{SI}$,所以$\kappa$不是弱紧致基数,因此据9.3.2,$\kappa$是不可测基数. □

说明:Keisler在其[1962]用超积构造直接证明了9.3.3的最后一个断定.

9.3.4 定理 假设κ是无穷基数且有下列性质:

对每一基数$\lambda\geqslant\kappa$,在幂为λ的集合上(或等价地,在λ上)的每一$<\kappa$-完全的非主滤子可以扩张为$<\kappa$-完全的非主超滤. (9.19)

则κ是强紧致的.

证明:令Σ是$\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$的句子集使得它的每一幂$<\kappa$的子集有模型(**注意**:这里并没有限制$\Sigma$的基数),要证$\Sigma$有模型. 令$|\Sigma|=\rho$,$\langle\sigma_\alpha:\alpha<\rho\rangle$是$\Sigma$的枚举. 不妨假设$\rho\geqslant\kappa$,否则据假设$\Sigma$就有模型.

任给ρ的幂$<\kappa$的子集J,令$\mathfrak{A}_J$是$\bigwedge_{\alpha\in J}\sigma_\alpha$的模型,且令

$$J^*=\{K\in\mathscr{P}_\kappa(\rho):J\subseteq K\},$$

其中$\mathscr{P}_\kappa(\rho)=\{X\subseteq\rho:|X|<\kappa\}$. 令$\mathbf{J}=\{J^*:J\in\mathscr{P}_\kappa(\rho)\}$,下证$\mathbf{J}$有

下列$<\kappa$-非空交性质：

$$X\subseteq \mathbf{J}\text{ 且 }|X|<\kappa \Rightarrow \bigcap X\neq\varnothing.$$

假设 $X=\langle J_\alpha^*:\alpha<\delta\rangle$（其中 $\delta<\kappa$）. 则 κ 是正则的，所以 $\bigcup\limits_{\alpha<\delta}J_\alpha$ 仍是 ρ 的幂$<\kappa$ 的子集，所以

$$\bigcup_{\alpha<\delta}J_\alpha\in\bigcap_{\alpha<\delta}J_\alpha^*=\bigcap X.$$

另一方面，易见 $\bigcap\mathbf{J}=\varnothing$（因为若存在 $x\in\bigcap\mathbf{J}$，则对所有 $J^*\in\mathbf{J}$，$x\in J^*$，显然这样的 x 的幂$\geqslant\kappa$）. 因此易证在 $\mathscr{P}_\kappa(\rho)$ 上存在一$<\kappa$-完全的非主滤子 $\mathscr{F}$ 使得 $\mathbf{J}\subseteq\mathscr{F}$. 施(9.19)于 $\mathscr{F}$，则 $\mathscr{F}$ 能扩张为 $\mathscr{P}_\kappa(\rho)$ 上一$<\kappa$-完全的非主超滤 $\mathscr{D}$. 据 9.3.2 的证明，有

$$\prod_{\mathscr{D}}\mathfrak{A}_J\models\Sigma.\ \square$$

在本小节的其余部分，我们先离开主题来证明可测基数的其它一些重要的性质. 这些性质中的一部分为我们后面研究可测基数的紧致性所必需.

我们这里的结果，一部分来自 Keisler 的[1962]，另外几个结果由 κ 的可测性所蕴涵. 下面 9.3.8 的(8)—(10)来自 Dickmann 的[1970].

9.3.5 记法 任给无穷基数 λ，我们用 $\mathfrak{A}_\lambda$ 指称结构$\langle\lambda,X\rangle_{X\subseteq\lambda}$，称 $\mathfrak{A}_\lambda$ 是 **λ 上的完全结构**. $\mathfrak{A}_\lambda$ 的语言包括一元关系符号集$\{R_X:X\subseteq\lambda\}$，它们在 $\mathfrak{A}_\lambda$ 中的解释为：$R_X^{\mathfrak{A}_\lambda}=X$.

说明：(Ⅰ) 显然在下列意义上，每一 $\alpha\in\lambda$ 在 $\mathfrak{A}_\lambda$ 中可以用原子公式 $R_{\{\alpha\}}(v_0)$ 来定义：对任意 $\beta\in A_\lambda$，

$$\mathfrak{A}_\lambda\models R_{\{\alpha\}}[\beta]\Leftrightarrow\alpha=\beta.$$

这使我们有下列更一般的考虑：

(Ⅱ) 若 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathscr{L}$ 的结构使得 $\mathfrak{A}$ 的每一元素 a 在 $\mathfrak{A}$ 中可以用 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$ 的公式 $\varphi_a(v_0)$ 来定义（这里简称 a 在 $\mathfrak{A}$ 中是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$-**可定义元**），且 $\mathfrak{B}\equiv_{\kappa\lambda}\mathfrak{A}$，则句子$\exists!\,v_0\varphi_a(v_0)$在 $\mathfrak{B}$ 中成立. 因此我们能用下列方式定义映射 $i:\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$：

$$i(a)=\varphi_a^{\mathfrak{B}}\text{（的单个元素）}.$$

因此我们有下列引理：

9.3.6 引理 (1) 若 $\mathfrak{A}\equiv_{\kappa\lambda}\mathfrak{B}$ 且 A 的每一元素在 $\mathfrak{A}$ 中是 $\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$-可定义元，则映射 $i:\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ 是一个 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$-单射(因此称为**典范单射**).(参见 1.3.18.)

(2) 据(1)的假设，每一 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$-单射 $f:\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ 与 i 相同.

(3) 若此外还有下列条件之一成立：

① $\mathfrak{A}\prec_{\kappa\lambda}\mathfrak{B}$，或者

② $\mathfrak{A}\subseteq\mathfrak{B}$ 且 A 的每一元素在 $\mathfrak{A}$ 中可用($\mathscr{L}_{\kappa\omega}$的)一个无量词公式来定义，

则 i 是从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的恒等映射.

证明：对每一 $a\in A$，令 $\varphi_a(v_0)$是在 $\mathfrak{A}$ 中定义 a 的 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$-公式.

(1) 令 φ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$的公式，$g:X=\mathrm{Fv}(\varphi)\to A$，因为 $|\mathrm{Fv}(\varphi)|<\lambda$，所以 $|\mathrm{Ran}(g)|<\lambda\leqslant\kappa$. 因为 φ_a 在 $\mathfrak{A}$ 中定义 a，且 $i(a)\in B$，因此

$$\mathfrak{A}\models\varphi[g]\Leftrightarrow\mathfrak{A}\models(\forall v\restriction X)[\bigwedge_{x\in X}\varphi_{g(x)}(v_x)\to\varphi]，且$$

$$\mathfrak{B}\models\varphi[i\circ g]\Leftrightarrow\mathfrak{B}\models(\forall v\restriction X)[\bigwedge_{x\in X}\varphi_{g(x)}(v_x)\to\varphi].$$

因为右边的句子是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$的句子，且 $\mathfrak{A}\equiv_{\kappa\lambda}\mathfrak{B}$，所以

$$\mathfrak{A}\models\varphi[g]\Leftrightarrow\mathfrak{B}\models\varphi[i\circ g],$$

这就证明了 i 是一个 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$-单射.

(2) 令 f 如题设所规定. 因为 f 和 i 都是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$-单射，所以据 $a\in\varphi_a^{\mathfrak{A}}$，有 $i(a),f(a)\in\varphi_a^{\mathfrak{B}}$. 因为句子$\exists!v\varphi_a(v)$在 $\mathfrak{B}$ 中成立，所以 $i(a)=f(a)$，因此 $i=f$.

(3) 假设还有情况①成立，据定义，恒等函数 $\mathrm{id}:\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ 是一个 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$-单射，据(2)，$i=\mathrm{id}$.

假设情况②成立. 因为 $\mathfrak{A}\subseteq\mathfrak{B}$，所以对每一原子公式或原子公式的否定 φ，$\varphi^{\mathfrak{A}}=\varphi^{\mathfrak{B}}\cap A$，因此若 φ 是诸原子公式任意的(可能是无穷的)布尔组合，即对($\mathscr{L}_{\kappa\omega}$的，等价地，对 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$的)任意无量词公式 φ，我们仍有 $\varphi^{\mathfrak{A}}=\varphi^{\mathfrak{B}}\cap A$. 因为 φ_a 是无量词公式，所以 $a\in\varphi_a^{\mathfrak{B}}$. 据(2)中相同的论证，我们有 $i(a)=a$. □

下面我们来证明可测基数的主引理，为此我们需要下列引理.

9.3.7 Shepherdson-Mostowski-定理 若 R 是类 K 上的良建且外延关系，则存在一传递类 M 使得

$$\langle K,R\rangle\cong\langle M,\in\upharpoonright M\rangle.$$

而且存在由下列条件递归定义的一个唯一的同构：

$$F(x)=\{F(u):uRx\},\quad 对\ x\in K.$$

这个映射称为从 $\langle K,R\rangle$ 到传递集 M 上的**崩塌同构**.

证明：据 1.2.9 的证明. □

9.3.8 可测基数的主引理 对每一 $\kappa\in\mathbf{CN}_I$，下列条件等价：

(1) κ 是可测基数.

(2) 每一幂为 κ 的结构 $\mathfrak{A}$ 在同构意义上有一个真 $\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$-扩张.

(3) 对每一幂为 κ 的结构 $\mathfrak{A}$，存在结构 $\mathfrak{B}$ 使得

$$\mathfrak{A}\subseteq\mathfrak{B},\quad A\neq B,\quad \mathfrak{A}\equiv_{\kappa\kappa}\mathfrak{B}.$$

(4) 对每一结构 $\mathfrak{A}$ 使得 $\mathfrak{A}$ 中每一元素可用（$\mathscr{L}_{\kappa\omega}$的）一个无量词公式来定义，则存在结构 $\mathfrak{B}$ 使得 $\mathfrak{B}\equiv_{\kappa\kappa}\mathfrak{A}$ 且 $\mathfrak{B}\not\cong\mathfrak{A}$.

(4)′ 对每一结构 $\mathfrak{A}$ 使得 $\mathfrak{A}$ 中每一元素是 $\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$-可定义元，则存在结构 $\mathfrak{B}$ 使得 $\mathfrak{B}\equiv_{\kappa\kappa}\mathfrak{A}$ 且 $\mathfrak{B}\not\cong\mathfrak{A}$.

(5) $\mathfrak{A}_\kappa$（见 9.3.5）在同构意义上有一个真 $\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$-扩张.

(6) 存在结构 $\mathfrak{B}$ 使得 $\mathfrak{A}_\kappa\subseteq\mathfrak{B}$，$\mathfrak{B}\equiv_{\kappa\kappa}\mathfrak{A}_\kappa$ 且 $B\neq A_\kappa$.

(7) 存在结构 $\mathfrak{B}$ 使得 $\mathfrak{B}\equiv_{\kappa\kappa}\mathfrak{A}_\kappa$ 且 $\mathfrak{B}\not\cong\mathfrak{A}_\kappa$.

(8) 在同构的意义上 $\mathfrak{A}_\kappa$ 有一个真 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$-扩张.

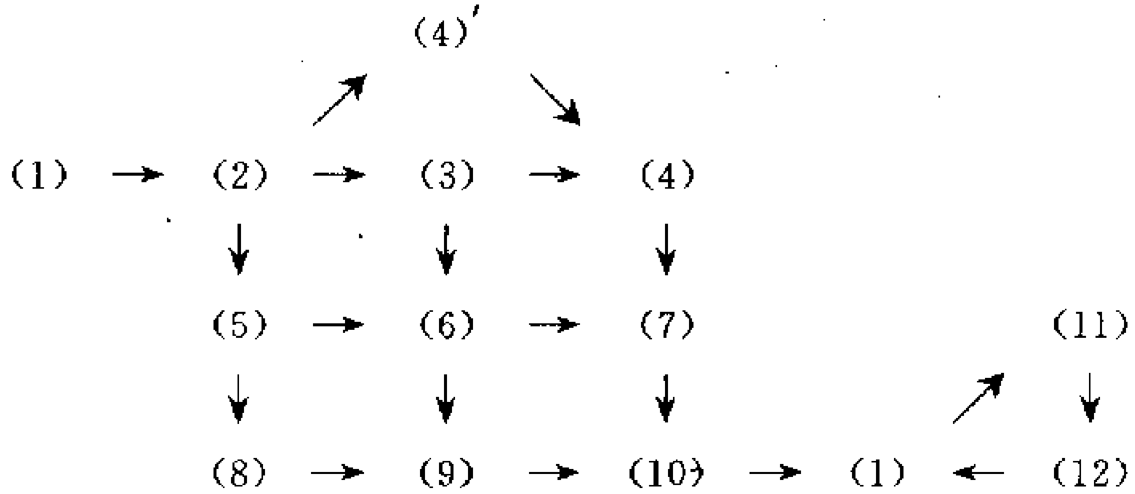
(9) 存在结构 $\mathfrak{B}$ 使得 $\mathfrak{A}_\kappa\subseteq\mathfrak{B}$ 且 $\mathfrak{B}\equiv_{\kappa\omega}\mathfrak{A}_\kappa$ 且 $B\neq A_\kappa$.

(10) 存在结构 $\mathfrak{B}$ 使得 $\mathfrak{B}\equiv_{\kappa\omega}\mathfrak{A}_\kappa$ 且 $\mathfrak{B}\not\cong\mathfrak{A}_\kappa$.

(11) 对每一序数 $\alpha>0$，存在传递集 A 和从 $\langle\mathbf{R}(\kappa+\alpha),\in\upharpoonright\mathbf{R}(\kappa+\alpha)\rangle$ 到 $\langle A,\in\upharpoonright A\rangle$ 中的初等嵌入 f 使得对所有 $\gamma<\kappa$，$f(\gamma)=\gamma$，但 $\kappa<f(\kappa)$，其中 $\mathbf{R}$ 定义如例 1.2.11，f 称为移动 κ.

(12) 存在传递集 A 和从 $\langle\mathbf{R}(\kappa+1),\in\upharpoonright\mathbf{R}(\kappa+1)\rangle$ 到 $\langle A,\in\upharpoonright A\rangle$ 中的初等嵌入 f 使得对所有 $\gamma<\kappa$，$f(\gamma)=\gamma$，但 $\kappa<f(\kappa)$.

证明：本定理证明的关系如下图：其中→表示 ⇒ ，



$(4)' \Rightarrow (4)$和$(11) \Rightarrow (12)$显然成立，因为这两个蕴涵式的后件都是前者的特例. 下面我们来证明其余的部分.

$(1) \Rightarrow (2)$：令$\mathscr{D}$是κ上一$<\kappa$-完全的非主超滤，$f:\kappa \to A$是双射，$h:\mathfrak{A} \to \coprod_{\mathscr{D}} \mathfrak{A}$是典范单射. 下证$f_{\mathscr{D}} \notin \mathrm{Ran}(h)$：假设相反，则对某个$a \in A$，$f_{\mathscr{D}} = a_{\mathscr{D}} = h(a)$，因此$\{\alpha \in \kappa: f(\alpha) = a\} \in \mathscr{D}$. 因为$f$是单射，所以$|\{\alpha \in \kappa: f(\alpha) = a\}| = 1$，因为$\mathscr{D}$是非主的，所以$\{\alpha \in \kappa: f(\alpha) = a\} \notin \mathscr{D}$，矛盾.

$(3) \Rightarrow (4)$，$(6) \Rightarrow (7)$，$(9) \Rightarrow (10)$：令$\mathfrak{A}_1$表示$(3) \Rightarrow (4)$中的$\mathfrak{A}$，表示$(6) \Rightarrow (7)$，$(9) \Rightarrow (10)$中的$\mathfrak{A}_\kappa$，同样，λ表示前两种情况中的κ，表示最后一种情况中的ω. 令$\mathfrak{B}$是$\mathfrak{A}_1$的任意$\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$-初等等价的真扩张. 假设$\mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}_1$，且令$f: \mathfrak{A}_1 \cong \mathfrak{B}$，则$f$是$\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$-单射. $\mathfrak{A}_1$的每一元素由一个无量词公式来定义（在第一种情况中据假设，在其它两种情况中据 9.3.5 后面的说明(Ⅰ)）. 据 9.3.6 的(2)和(3)的② ，$f = \mathrm{id}: \mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{B}$. 因为$B \neq A_1$，所以$f$不是满射，矛盾.

$(2) \Rightarrow (4)'$：这个证明几乎与前一证明相同. 令$\mathfrak{B}$是$\mathfrak{A}_1$的真$\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$-扩张. 用(3)的①代替(3)的②，就能得到$f = \mathrm{id}$的结论.

$(10) \Rightarrow (1)$：令$\mathfrak{B}$如(10)，据 9.3.6(1)，典范单射$i: \mathfrak{A}_\kappa \to \mathfrak{B}$是一个$\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$-单射. 因为$\mathfrak{B} \not\cong \mathfrak{A}_\kappa$，所以$i$不是满射. 用$i$把$\mathfrak{A}_\kappa$和$\mathfrak{A}_\kappa$的象等同，所以不妨假设$\mathfrak{A}_\kappa \subseteq \mathfrak{B}$（当然，还可以假设$\mathfrak{A}_\kappa \prec_{\kappa\omega} \mathfrak{B}$，虽然这里不需要）. 令$b \in B - A_\kappa$，定义$\mathscr{D} \subseteq \mathscr{P}(\kappa)$如下：

$$X\in\mathscr{D}\Leftrightarrow b\in R_X^{\mathfrak{B}}.$$

下证 $\mathscr{D}$ 是 κ 上的非主超滤. 为此先证:

$$\text{对每一 } X\subseteq\kappa, X\in\mathscr{D} \text{ 或 } \kappa-X\in\mathscr{D} \tag{9.20}$$

显然 $\theta=\forall v_0[\neg R_X(v_0)\leftrightarrow R_{\kappa-X}(v_0)]$在 $\mathfrak{A}_\kappa$ 中成立. 因为 $\mathfrak{B}\equiv\mathfrak{A}_\kappa$ (即 $\mathfrak{B}\equiv_{\omega\omega}\mathfrak{A}_\kappa$),所以 θ 也在 $\mathfrak{B}$ 中成立. 特别是,$b\in R_X^{\mathfrak{B}}$ 或 $b\in R_{\kappa-X}^{\mathfrak{B}}$,因此 $X\in\mathscr{D}$ 或 $\kappa-X\in\mathscr{D}$,(9.20)成立.

由此显见,只需用 $\mathfrak{B}\equiv\mathfrak{A}_\kappa$ 这个条件就能证明 $\mathscr{D}$ 是一个超滤. 下面我们用 $\mathfrak{A}_\kappa\subseteq\mathfrak{B}$ 和 $b\in B-A_\kappa$ 来证明:

$$\mathscr{D}\text{ 是非主超滤.} \tag{9.21}$$

假设 $\mathscr{D}$ 是主超滤,则存在 $a\in\kappa$ 使得对所有 $X\subseteq\kappa$:

$$a\in X\Leftrightarrow X\in\mathscr{D}\quad(\Leftrightarrow b\in R_X^{\mathfrak{B}}).$$

因此 $b\in R_{\{a\}}^{\mathfrak{B}}$. 据 $\mathfrak{A}_\kappa\subseteq\mathfrak{B}$,有 $a\in R_{\{a\}}^{\mathfrak{B}}$. 另一方面,$\theta_1=\exists!v_0R_{\{a\}}(v_0)$在 $\mathfrak{A}_\kappa$ 中成立,所以 θ_1 也在 $\mathfrak{B}$ 中成立,因此 $a=b$,与 $b\in B-A_\kappa$ 矛盾,所以(9.21)成立.

最后我们来证明:

$$\mathscr{D}\text{ 是}<\kappa\text{-完全的.} \tag{9.22}$$

任给 $\mathscr{D}_1\subseteq\mathscr{D}$,$|\mathscr{D}_1|<\kappa$,下证 $\bigcap\mathscr{D}_1\in\mathscr{D}$,即 $b\in R^{\mathfrak{B}}_{\bigcap\mathscr{D}_1}$. 显然,$\theta_2=\forall v_0[R_{\bigcap\mathscr{D}_1}(v_0)\leftrightarrow\bigwedge_{\mathscr{D}\in\mathscr{D}_1}R_X(v_0)]$在 $\mathfrak{A}_\kappa$ 中成立,所以 θ_2 也在 $\mathfrak{B}$ 中成立,因此

$$R^{\mathfrak{B}}_{\bigcap\mathscr{D}_1}=\bigcap_{X\in\mathscr{D}_1}R_X^{\mathfrak{B}}.$$

因为据假设对所有 $X\in\mathscr{D}_1$,有 $b\in R_X^{\mathfrak{B}}$,所以 $b\in R^{\mathfrak{B}}_{\bigcap\mathscr{D}_1}$,证得(9.22).

据 9.3.1,κ 是可测基数.

(1) ⇒ (11):设(1)成立. 令 $\mathscr{D}$ 是 κ 上一$<\kappa$-完全的非主超滤,$\mathfrak{B}=\langle\mathbf{R}(\kappa+\alpha),\in\restriction\mathbf{R}(\kappa+\alpha)\rangle$. 考虑超幂$\prod_{\mathscr{D}}\mathfrak{B}$,据 8.3.11,$\prod_{\mathscr{D}}\mathfrak{B}\equiv_{\kappa\kappa}\mathfrak{B}$. 因此$\prod_{\mathscr{D}}\mathfrak{B}$ 是外延性公理的良建模型,据 9.3.7,

$$\prod_{\mathscr{D}}\mathfrak{B}\cong\langle A,\in\restriction A\rangle,\quad\text{其中 } A \text{ 是传递集.}$$

令 f 是从 $\mathfrak{B}$ 到 $\prod_{\mathscr{D}}\mathfrak{B}$ 中的 $\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$-单射和从 $\coprod_{\mathscr{D}}\mathfrak{B}$ 到 $\mathfrak{A}$ 中的崩塌同构 g 的复合函数，则 f 是从 $\mathfrak{B}$ 到 $\mathfrak{A}$ 中的初等嵌入使得 f 满足(11)的要求．施归纳易证，对所有 $\gamma<\kappa, f(\gamma)=\gamma$.

$\kappa\in f(\kappa)$ 的证明要分为如下步骤：

$$x\in y\in f(\kappa) \Rightarrow x\in f(\kappa). \tag{9.23}$$

$$x,y\in f(\kappa) \Rightarrow x\in y\vee x=y\vee y\in x. \tag{9.24}$$

$\kappa\subseteq g(\mathrm{id}_{\mathscr{D}})\in f(\kappa)$， 其中 $\mathrm{id}:\kappa\to\mathbf{R}(\kappa+1)$ 是恒等映射.[1]

(9.25)

由(9.23)和(9.25)可得 $\kappa\subset f(\kappa)$．据(9.23)和(9.24)，$f(\kappa)$ 是序数，所以 $\kappa\in f(\kappa)$．这个证明的细节留给读者去补充.

(12) ⇒ (1)：假设(12)．令 $\mathfrak{B}=\langle\mathbf{R}(\kappa+1),\in\upharpoonright\mathbf{R}(\kappa+1)\rangle$，$f$ 是从 $\mathfrak{B}$ 到传递结构 $\mathfrak{A}=\langle A,\in\upharpoonright A\rangle$ 的初等嵌入使得 f 满足(12)的规定，$\mathscr{D}=\{X\in\mathscr{P}(\kappa):\kappa\in f(X)\}$，下证：

$$\mathscr{D}\text{ 是 }\kappa\text{ 上}<\kappa\text{-完全的非主超滤}. \tag{9.26}$$

显然，$\mathscr{D}$ 是 κ 上的非主超滤．下证 $\mathscr{D}$ 是 $<\kappa$-完全的．令 $\alpha<\kappa$，$\{Y_\xi:\xi<\alpha\}\subseteq\mathscr{D}$，要证 $\bigcap_{\xi<\alpha}Y_\xi\in\mathscr{D}$．令 $Y=\bigcap_{\xi<\alpha}Y_\xi$，因为对所有 $\xi<\alpha$，$Y_\xi\in\mathscr{D}$，所以 $\kappa\in f(Y_\xi)$，因此

$$\kappa\in\bigcap_{\xi<\alpha}f(Y_\xi). \tag{9.27}$$

令 $S=\{\langle\xi,y\rangle:y\in Y_\xi\text{ 且 }\xi<\alpha\}$，则 $S\in\mathbf{R}(\kappa+1)=\bigcup_{\beta<\kappa+1}\mathscr{P}(\mathbf{R}(\beta))$，因此我们有：

$$Y_\xi=\{y:\langle\xi,y\rangle\in S\},\quad\text{对 }\xi<\alpha. \tag{9.28}$$

$$Y=\{y:\text{对所有 }\xi<\alpha,\langle\xi,y\rangle\in S\}. \tag{9.29}$$

运用 f 于(9.29)，因为 A 是传递集，f 是初等嵌入且 $f(\alpha)=\alpha$(因为 $\alpha<\kappa$)，所以

$$f(Y)=\{y:\text{对所有 }\xi<\alpha,\langle\xi,y\rangle\in f(S)\}. \tag{9.30}$$

同理，运用 f 于(9.28)，因为 $f(\xi)=\xi$，所以

---

[1] 若 $\mathscr{D}$ 是正规的，则 $\kappa=g(\mathrm{id}_{\mathscr{D}})$，细节参考练习 9.3.36.

$$f(Y_\xi)=\{y:\langle\xi,y\rangle\in f(S)\}.$$

据上式和(9.30)，有

$$f(Y)=\bigcap_{\xi<\alpha}f(Y_\xi).$$

据(9.27)，$\kappa\in f(Y)$，所以 $Y\in\mathscr{D}$. 由此证得(9.26)成立. 因此 κ 是可测基数. □

9.3.9 定理 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$是强紧致语言 $\Rightarrow$ κ 是可测基数.

证明：我们来证 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$的强紧致性蕴涵 9.3.8 的(8). 据 9.1.4，不妨假设 κ 是正则基数. 令 $\mathfrak{A}_\kappa$ 是 κ 上的完全结构，$\mathscr{L}=\mathrm{Sm}(\mathfrak{A}_\kappa)$，$\Sigma$ 是 $\mathscr{L}'=\mathscr{L}\cup\{d\}$的下列 $\mathscr{L}'_{\kappa\omega}$-句子集，其中 d 是新个体常元：

(1) $\mathrm{TH}_{\kappa\omega}(\mathfrak{A}_\kappa)$，

(2) $\neg R_{\{\xi\}}(d)$， 对 $\xi<\kappa$.

令 $\Xi\subseteq\Sigma$，$|\Xi|<\kappa$，$X=\{\xi\in\kappa:R_{\{\xi\}}$ 在 Ξ 中出现$\}$. 显然，$|X|<\kappa$. 因此存在 $\zeta<\kappa$ 使得 $\zeta\notin X$. 易证结构$(\mathfrak{A}_\kappa,\zeta)$是 Ξ 的模型.

因为 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$是强紧致语言，所以 Σ 有模型 $\mathfrak{B}_1$. 据句子(1)，

$$\mathfrak{B}=\mathfrak{B}_1\upharpoonright\mathscr{L}\equiv_{\kappa\omega}\mathfrak{A}_\kappa.$$

据 9.3.6(1)，不妨假设，在同构意义上，$\mathfrak{A}_\kappa\prec_{\kappa\omega}\mathfrak{B}$. 据句子集(2)，$\mathfrak{B}$ 是 $\mathfrak{A}_\kappa$ 的真扩张. □

由此可见，强紧致基数是非常大的. 这样自然就产生一问题：

强紧致基数如何与可测基数比较？

显然答案依赖考虑问题时的集合论背景. P. Vopěnka-K. Hrbáček 在其[1966]证明了下列定理 9.3.10，这是对 Scott 在其[1961]证明的下列命题精致而又自然的概括：

“若 $\mathbf{V}=\mathbf{L}$，则没有可测基数”.

9.3.10 定理(Vopěnka－Hrbáček [1966]) 若存在强紧致基数，则对每一集合 a，$\mathbf{V}\neq\mathbf{L}(a)$，其中 $\mathbf{L}(a)$定义如 0.8.5.

证明：假设对某个集合 a，$\mathbf{V}=\mathbf{L}(a)$. 因为存在一个序数集 a_1 使得 $\mathbf{L}(a)=\mathbf{L}(a_1)$，所以不妨假设 a 是一个序数集. 令 κ 是强紧致基数，$\lambda\geqslant\kappa$ 是基数使得 $a\subseteq\lambda$. 因为 κ 是强紧致的，所以在 λ^+ 上存

在一个$<\kappa$完全的超滤$\mathscr{D}$使得对每一$X\in\mathscr{D}$, $|X|=\lambda^+$(这里令$\mathscr{D}$扩张滤子$\{X: |\lambda^+-X|<\lambda\}$).

因为$\mathscr{D}$是$<\kappa$-完全的,所以超幂$\prod_{\mathscr{D}}\mathbf{V}$是良建的,因此可以把它等同于一个传递集$M$. 若$f$是$\lambda^+$上的函数,则我们用$[f]$来指称由$f$表示的$M$中的元素. 令$j=j_{\mathscr{D}}$是由$\mathscr{D}$给出的从$\mathbf{V}$到$M$中的自然嵌入.

考虑超幂的另一种形式. 这里只考虑λ^+上那些至多有λ个值的函数. 对这类函数,用通常的方式,定义

$$f=_{\mathscr{D}} g \Leftrightarrow \{\alpha: f(\alpha)=g(\alpha)\}\in\mathscr{D},$$

$$f\in_{\mathscr{D}} g \Leftrightarrow \{\alpha: f(\alpha)\in g(\alpha)\}\in\mathscr{D}.$$

这样得到一个集合论语言的结构,我们有$\prod_{\mathscr{D}}\mathbf{V}^*$来指称它. 施归纳于集合论公式$\varphi$的复杂度,易证对这种形式的超幂,超积基本定理仍成立:若$f,\cdots$是λ^+上的函数使得$|\mathrm{Ran}(f)|\leqslant\lambda$,则

$$\prod_{D}\mathbf{V}^*\models\varphi(f,\cdots)\Leftrightarrow\{\alpha:\varphi(f(\alpha),\cdots)\}\in\mathscr{D}.$$

因此$\prod_{\mathscr{D}}\mathbf{V}^*$是ZFC的模型,且$\prod_{\mathscr{D}}\mathbf{V}^*\equiv\mathbf{V}$. 因为$\mathscr{D}$是$<\kappa$-完全的,所以$\prod_{\mathscr{D}}\mathbf{V}^*$是良建的,据9.3.7,$\prod_{\mathscr{D}}\mathbf{V}^*$同构于一个传递集$N$. N的每一元素可以用λ^+上的一个函数f(使得$|\mathrm{Ran}(f)|\leqslant\lambda$)来表示. 我们用$[f]^-$指称由$f$表示的$N$中的元素. 这样可以如下定义一个初等嵌入$i:\mathbf{V}\to N$:

$$i(x)=[C_x]^-,$$

其中C_x是λ^+上值为x的常值函数.

对λ^+上每一函数f使得$|\mathrm{Ran}(f)|\leqslant\lambda$,令

$$h([f]^-)=[f].$$

易见$h([f]^-)$的定义不依赖N中表示$[f]^-$的f的选择,且$h:N\to M$是初等嵌入.

若$\gamma<\lambda^+$,则从λ^+到γ中的每一函数至多有λ个值,因此对所有$f:\lambda^+\to\gamma$, $[f]^-=[f]$. 若$f:\lambda^+\to\lambda^+$至多有λ个值,则对某个

$\gamma<\lambda^+, f:\lambda^+\to\gamma$. 由此可得 $i(\lambda^+)=\sup\{i(\gamma):\gamma<\lambda^+\}$，且

$$h(\xi)=\xi,\quad 对所有\ \xi<i(\lambda^+).$$

类似地可证 $i(a)=j(a)$ 且

$$M=\mathbf{L}(j(a))=\mathbf{L}(i(a))=N.$$

因为对角线函数 $d(\alpha)=\alpha$ 在 M 中表示一序数使得对每一 $\gamma<\lambda^+$，该序数大于 $j(\gamma)$，所以 $j(\lambda^+)>\sup\{j(\gamma):\gamma<\lambda^+\}$. 而据 N 的构造，$i(\lambda^+)$ 是 $i(\lambda)$ 的后继序数；据 M 的构造，$j(\lambda^+)$ 是 $j(\lambda)$ 的后继序数（且 $j(\lambda)=i(\lambda)$），所以 $j(\lambda^+)>i(\lambda^+)$，因此 $M\neq N$，矛盾. □

说明：若 κ 是可测基数且 $\mathscr{D}$ 是 κ 上 $<\kappa$-完全的非主超滤，则

$$\mathbf{L}(\mathscr{D})\models \mathbf{V}=\mathbf{L}(\mathscr{D})\wedge“\kappa\ 是可测的”.$$

所以从 9.3.10 可得到下列推论：

9.3.11 推论 若 ZFC+“*存在可测基数*”是一致的，则 ZFC+“*存在可测基数*”+“*不存在强紧致基数*”也是一致的. 特别是，

$$\text{ZFC}+“存在可测基数”\vdash \neg(可测 \Rightarrow 强紧致).$$

“*可测 ⇒ 强紧致*”这个蕴涵式是否在 ZFC+“*存在强紧致基数*”中成立，这个问题似乎还没有解决，虽然 K. Kunen 已经证明下列蕴涵关系在 ZFC 中不可证：

ZFC+“*存在可测基数*”一致 ⇒ **ZFC**+“*存在强紧致基数*”一致.

Magidor 在其小册“The First Strongly Compact Can Be the First Mersurable”中部分地解决了与上述问题相关的问题，即第一个强紧致基数等于第一个可测基数：

9.3.12 定理（Magidor） 若 **ZFC**+“*存在强紧致基数*”一致，则 **ZFC**+“*第一个强紧致基数等于第一个可测基数*”也一致. □

说明：（Ⅰ）9.3.12 和下列定理的证明所使用的技巧已超出本书的范围，请读者分别参考有关文献.

（Ⅱ）9.3.12 中的“等于”能否换成“大于”这个问题似乎还未解决.

Kunen 在其[1971]还证明了以下定理：

9.3.13 定理 若存在强紧致基数，则对每一序数 α，存在 **ZFC**

的传递模型 $\mathfrak{M}$ 使得 $\mathfrak{M}$ 中的可测基数集至少有序型 α(即至少有 α 个可测基数).

沿着这些思路，近来还得到其它一些结果，可参见 Magidor 的另一个小册“The First Supercompact Can Be the First Strongly Compact”，T. K. Menas 的[1974]和 J. Stern 的[1973].

二、紧致基数的其它性质

在上一小节我们研究了可测基数和(弱)紧致基数的关系，这一小节我们要研究紧致基数，特别是弱紧致基数的其它性质. 为此我们先引入一些概念和定义.

对每一 k 使得 $1\leqslant k\leqslant n$，**n 阶语言** $\mathscr{L}^n$ 除了通常的逻辑符号，还包括下列变元：

$$X_0^k, X_1^k, \cdots, X_m^k, \cdots.$$

这里上标为 k 的变元指称第 k 阶集合. $\mathscr{L}^n$ 的非逻辑符号也可以作相应的扩张. 这样，$\mathfrak{A}\models \forall X^k\varphi$ 表示

$$\mathfrak{A}\models\varphi[S],\quad 对每一\ S\in\underbrace{\mathscr{P}(\cdots(\mathscr{P}}_{k个}(A)\cdots)).$$

称包含高阶量词的公式具有**前束形式** $\Leftrightarrow$ 该公式所有量词成串处于前部，其中最高阶量词在最前面，….

称前束公式 φ 是 **Π_m^n(或 Σ_m^n)-公式** $\Leftrightarrow$ 下列条件皆满足：

(1) 在 φ 中出现的最高阶量词是 $n+1$ 阶量词，

(2) 最前面的量词是全称(或存在)量词，

(3) 一共有 m 个不同的 $n+1$ 阶量词排成一串，中间没有其它阶量词，因此 Π_m^n-公式和 Σ_m^n-公式分别形如

$$\underbrace{\forall X^{n+1}\exists Y^{n+1}\cdots}_{m个n+1阶量词}\psi,\qquad \underbrace{\exists X^{n+1}\forall Y^{n+1}\cdots}_{m个n+1阶量词}\psi.$$

进一步的细节参见 A. Church 的[1956].

9.3.14 定义 称基数 κ 是 **Π_m^n(或 Σ_m^n)-可描述基数** $\Leftrightarrow$ $\kappa>\omega$ 是

强不可达基数且存在集合 $U\subseteq\mathbf{R}(\kappa)$ 和 Π_m^n(或 Σ_m^n)-句子 σ 使得 $\langle\mathbf{R}(\kappa),\in,U\rangle\models\sigma$ 但对所有 $\alpha<\kappa,\alpha\in\mathbf{ON}$,

$$\langle\mathbf{R}(\alpha),\in,U\cap\mathbf{R}(\alpha)\rangle\models\neg\sigma.$$

否则称 κ 是 Π_m^n(或 Σ_m^n)-**不可描述基数**. 我们用 π_m^n 指称第一个大于 ω 的 Π_m^n-不可描述的强不可达基数(若它存在的话).

下列引理综合了关于可描述基数的基本性质:

9.3.15 引理(Hanf-Scott,[1961])

(1) κ 是 Π_0^{n+1}-描述的 $\Leftrightarrow$ 存在 $m<\omega$ 使得 κ 是 Π_m^n-可描述的.

(2) 若 $n>0$ 且 π_m^n 存在,则 π_m^n 是 Π_{m+1}^n-可描述的.

(3) 若 $n>1,m>0$ 且 π_m^n 存在,则 π_m^n 是 Σ_m^n-可描述的.

(4) $\pi_m^0=\pi_0^1=$ 第一个大于 ω 的强不可达基数.

(5) 若 $0<n\leqslant p,\pi_q^p$ 存在且($n<p$ 或 $m<q$),则 $\pi_m^n<\pi_q^p$. □

9.3.16 定理 (1) (Hanf-Scott,[1961])

$$\kappa\text{ 是可测基数}\Rightarrow\kappa\text{ 是 }\Pi_1^2\text{-不可描述基数}.$$

(2) (Vaught) κ 是可测基数 $\Rightarrow$ 对所有 $n,m<\omega,\pi_m^n<\kappa$.

证明:(1) 令 κ 是可测基数,$U\subseteq\mathbf{R}(\kappa)$,$\sigma$ 是(三阶)语言 $\{\in,U\}$ 的 Π_1^2-句子,假设 $\langle\mathbf{R}(\kappa),\in,U\rangle\models\sigma$. 要证对某个 $\alpha<\kappa,\alpha\in\mathbf{ON}$,

$$\langle\mathbf{R}(\alpha),\in,U\cap\mathbf{R}(\alpha)\rangle\models\sigma.$$

据上述假设,我们有 $\sigma=\forall X\varphi(X)$,其中 X 是三阶变元,$\varphi(X)$ 只包含二阶和一阶量词. 因此

$$\langle\mathbf{R}(\kappa+1),\in,X,\mathbf{R}(\kappa),U\rangle\models\varphi^{(\mathbf{R}(x))},\quad\text{对任意 }X\subseteq\mathbf{R}(\kappa+1).\tag{9.31}$$

其中 $\varphi^{(\mathbf{R}(x))}$ 是用有界量词 $\forall x\in R(x)$ 和 $\exists x\in R(x)$ 置换 φ 中形如 $\forall x$ 和 $\exists x$ 的一阶量词得到的句子.

现令 $\mathscr{D}$ 是 κ 上的正规 $<\kappa$-完全的非主超滤,令

$$\mathfrak{A}=\prod_{\mathscr{D}}\langle\bigcup_{\alpha\in\mathbf{ON}}\mathbf{R}(\alpha),\in\rangle.$$

因为 $\mathbf{R}(\kappa+1)^{\mathfrak{A}}=\mathbf{R}(\kappa+1)$,所以(9.31)也在 $\mathfrak{A}$ 中成立. 因为在 $\mathfrak{A}$ 中可以用函数 $\alpha\mapsto\mathbf{R}(\alpha)$ 来表示 $\mathbf{R}(\kappa)$,用函数 $\alpha\mapsto\mathbf{R}(\alpha+1)$ 来表

示 $\mathbf{R}(\kappa+1)$，用函数 $\alpha \mapsto U\cap \mathbf{R}(\alpha)$ 来表示 U，所以

$$\{\alpha: \langle \mathbf{R}(\alpha+1), \in, X, \mathbf{R}(\alpha), U\cap \mathbf{R}(\alpha)\rangle \models \varphi^{(\mathbf{R}(\alpha))}, \text{对所有 } X\subseteq \mathbf{R}(\alpha+1)\}\in \mathscr{D}, \tag{9.32}$$

因此把(9.32)花括号中的表达式变成三阶语言，我们有

$$\{\alpha: \langle \mathbf{R}(\alpha), \in, U\cap \mathbf{R}(\alpha)\rangle \models \sigma\}\in \mathscr{D}.$$

因此对某个 $\alpha<\kappa$，$\langle \mathbf{R}(\alpha), \in, U\cap \mathbf{R}(\alpha)\rangle \models \sigma$.

(2)的证明留给读者. □

9.3.17 定义 (1) 令 $\langle T,\leqslant\rangle$ 是树(参见 1.2.12). 若 $S\subseteq T$ 使得 $x\in S$ 且 $x\leqslant y \Rightarrow y\in S$，则 $\langle S,\leqslant\restriction S\rangle$ 称为 $\langle T,\leqslant\rangle$ 的**子树**.

对每一 $x\in T$，令 $S_x=\{y\in T: y<x\}$，则 $\langle S_x,\leqslant\restriction S_x\rangle$ 的序型称为 x 的**长度**(**或高度**)，用 $\mathrm{H}(x)$ 表示.

$\sup\{\mathrm{H}(x): x\in T\}$ 称为 T 的长度，用 $\mathrm{L}(T)$ 表示.

对每一 $\alpha\in \mathrm{L}(x)$，下列集合称为 T 的**第 α 层**:

$$\mathrm{Lev}(\alpha)=\{x\in T: \mathrm{H}(x)=\alpha\}.$$

T 的任意用 $\leqslant$ 线序(即用 $\leqslant$ 良序)的子集称为 T 的一个**链**.

任意极大链称为**树枝**.

T 的任意 $\leqslant$-极小元称为 T 的**树根**.

令 $x,y\in T$，称 y 是 x 的**直接后继** $\Leftrightarrow$ $x<y$ 且不存在 $z\in T$ 使得 $x<z<y$.

称 x 和 y **不可比较** $\Leftrightarrow$ $\neg(x\leqslant y)$ 且 $\neg(y\leqslant x)$.

一个**反链**是由 T 的两两不可比较的元素组成的集合.

(2) 称树 $\langle T,\leqslant\rangle$ 是**二元树** $\Leftrightarrow$ $\langle T,\leqslant\rangle$ 只有一个树根且它的每一元素至多有两个直接后继.

(3) 称树 $\langle T,\leqslant\rangle$ 是 **κ-Souslin-树**(其中 $\kappa\in \mathbf{CN}_1$) $\Leftrightarrow$ T 的幂为 κ，但 T 的每一链和反链的幂 $<\kappa$.

(4) 对任意基数 ρ 和集合 X，我们用 $[X]^\rho$ 指称 X 的所有 ρ 个元素的子集的集合:

$$[X]^\rho=\{Z\subseteq X: |Z|=\rho\}.$$

令 $(C_i)_{i\in I}$ 是 $[X]^\rho$ 的一**划分**使得 $|I|=\kappa$，且对 $i,j\in I, i\neq j, C_i$

和 C_i 两两不相交但它们不必然非空：

$$[X]^\rho=\bigcup_{i\in I}C_i.$$

称 $Y\subseteq X$ 是相对上述划分的**齐性集**(homogeneous set) $\Leftrightarrow$ 对某个 $i\in I$, $[Y]^\rho\subseteq C_i$.

(5) 若对每一幂为 κ_1 的集合 X 和每一把$[X]^\rho$ 划分成 κ 个类的划分，存在一幂为 λ 的齐性集，则我们写作：

$$\kappa_1\to(\lambda)^\rho_\kappa.$$

说明：(Ⅰ) 关于树的概念和基本性质，可见 1.2.12—1.2.14.

(Ⅱ) 用上述(4)的方法定义划分如同定义函数 $f:[X]^\rho\to\kappa$. 因此 Y 是齐性集 $\Leftrightarrow$ f 是$[Y]^\rho$ 上的常值函数.

(Ⅲ) 下面我们也用分解来代替上述定义中划分. 这时我们是指$[X]^\rho=\bigcup_{i\in I}C_i$ 中的诸 C_i 无须是不相交的.

下证关于弱紧致基数的命题之间的等价关系，在这些证明中，我们对与无穷语言模型论性质密切相关的命题给予更详细的证明. 在下面(1)—(14)中，我们假设 $\kappa>\omega$ 是强不可达基数：

(1) $\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$是 κ-紧致语言(即 κ 是弱紧致基数).

(2) 假设 $\mathfrak{A}$ 是满足下列条件的 $\mathscr{L}$-结构：

① $|\mathscr{L}|\leqslant\kappa\leqslant|A|$,

② A 的每一元素在 $\mathfrak{A}$ 中是 $\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$-可定义元.

则存在结构 $\mathfrak{B}$ 使得：

③ $\mathfrak{A}\prec_{\kappa\kappa}\mathfrak{B}$,

④ $\mathfrak{B}\not\cong\mathfrak{A}$,

⑤ 对每一 $\varphi\in\mathrm{Form}_1(\mathscr{L}_{\kappa\kappa})$使得 $|\varphi^{\mathfrak{A}}|\geqslant\kappa$, 存在 b 使得

$$b\in B-A,\quad b\in\varphi^{\mathfrak{B}}.$$

(3) 对 $\mathscr{L}$ 的每一满足(2)①—②的结构 $\mathfrak{A}$, 存在结构 $\mathfrak{B}$ 使得

$$\mathfrak{B}\equiv_{\kappa\kappa}\mathfrak{A},\quad \mathfrak{B}\not\cong\mathfrak{A}.$$

(4) 每一幂(即高度)为 κ 的二元树有一个幂为 κ 的树枝.

(5) $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$是 κ-紧致语言.

(6) 若 $\mathscr{F}$ 是由 κ 的诸子集构成的 $<\kappa$-完全的域，$|\mathscr{F}|=\kappa$ 且 $\mathscr{D}\subseteq\mathscr{F}$ 是一个 $<\kappa$-完全的真滤，则 $\mathscr{D}$ 可以在 $\mathscr{F}$ 中扩张为一个 $<\kappa$-完全的超滤.

(7) 若 $\mathscr{F}$ 如(6)规定且包含 κ 的所有单元集，则 $\mathscr{F}$ 包含一 $<\kappa$-完全的非主超滤.

(8) $\kappa\rightarrow(\kappa)^2_2$.

(9) 每一幂为 κ 的线序结构有幂为 κ 的良序或逆良序子集.

(10) 基数 κ 有**树性质**：每一幂为 κ 的树，使得该树的每一层有幂 $<\kappa$，有一个幂为 κ 的树枝.

(11) 对每一传递集 M 使得 $|M|=\kappa$ 且 $\kappa\in M$，存在传递集 N 和从 $\langle M,\in\restriction M\rangle$ 到 $\langle N,\in\restriction N\rangle$ 中的初等嵌入 f 使得对所有 $\alpha<\kappa$，

$$f(\alpha)=\alpha,\quad f(\kappa)>\kappa.$$

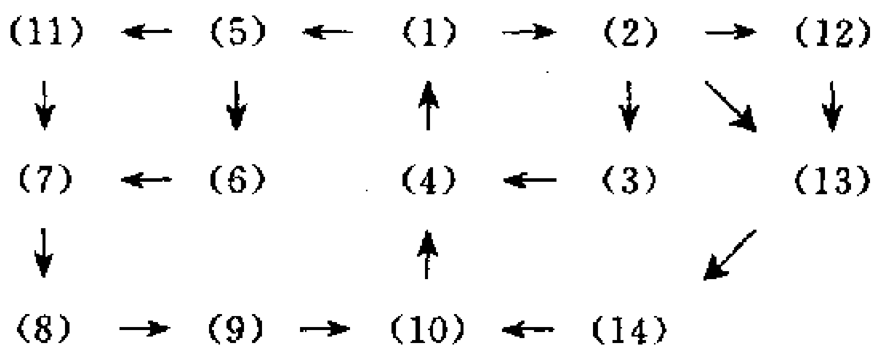
(12) 对 κ 上的每一个有穷关系 S，结构 $\langle\kappa,\in\restriction\kappa,S\rangle$ 有形如 $\langle\lambda,\in\restriction\lambda,T\rangle$ 的初等扩张，其中 $\kappa<\lambda$.

(13) 对每一子集 $U\subseteq\mathbf{R}(\kappa)$，结构 $\langle\mathbf{R}(\kappa),\in\restriction\mathbf{R}(\kappa),U\rangle$ 有形如 $\langle M,\in\restriction M,V\rangle$ 的初等扩张，其中 M 是传递集且 $\kappa\in M$.

(14) κ 是 Π^1_1-不可描述基数.

上述结果都可以在文献中找到，我们特别指出下列参考文献：Keisler-Tarski 的[1964]中的 §4，Keisler 的[1962]中的 §2，Silver 的[1971]中的 pp. 23—28，Morley 的[1968]中的 §4 和 §9，Hanf-Scott 的[1961]和 A. Lévy 的[1971]，Dickmann 的[1970].

(1)—(14)的蕴涵关系可以用下图来表示：其中→表示 ⇒ ，



证明(14) ⇒ (10)和(12) ⇒ (13)要使用超出本书的技巧，所以我们在此省略，有兴趣的读者可以参考 Silver 的[1966].

注意：上图并没有穷尽所有蕴涵关系，例如，Silver 在其[1966]还证明了：(6) ⇒ (1)，(6) ⇒ (10)，(10) ⇒ (1). Morley 在其[1968]给出(8) ⇒ (4)的直接证明，他对(1) ⇒ (4)的证明经过 Dickmann 在其[1970]的修正成为(3) ⇒ (4)的证明. J. L. Bell 在其[1970]给出(1) ⇒ (13)的证明. Jech 在其[1978]给出(5) ⇒ (10)，(14) ⇒ (4)的证明.

我们在(1)—(14)中预设 $\kappa>\omega$ 是强不可达基数. 若取消这个假设，则其中有些蕴涵关系不成立，参见 Dickmann 的[1970]，CH3，§ 9，B 和[1975]，附录 E.

下面我们分别来证明上图给出的蕴涵关系，其中(1) ⇒ (5)和(2) ⇒ (3)是显然的.

9.3.18 定理 (1) ⇒ (2).

证明：令 $\mathfrak{A}$ 满足(2)的①和②，因为 $|\mathscr{L}|\leqslant\kappa$ 且 $\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$ 的每一公式是一个从幂 $\leqslant\kappa$ 的符号集构造起来的、长度 $<\kappa$ 的符号序列，所以据 κ 的强不可达性，

$$|\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\kappa\kappa})|\leqslant\sum\{\kappa^{\lambda}:\lambda\in\mathrm{CN}_1,\lambda<\kappa\}=\kappa. \tag{9.33}$$

(9.33)中的等式成立是因为 κ 的强不可达性. 显然，(9.33)和假设②蕴涵 $|A|\leqslant\kappa$，据①，$|A|=\kappa$.

对每一 $a\in A$，令 φ_a 是在 $\mathfrak{A}$ 中定义 a 的 $\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$-公式，$\langle\psi_\xi:\xi<\lambda\rangle$ 是 $\{\psi\in\mathrm{Form}_1(\mathscr{L}_{\kappa\kappa}):|\psi^{\mathfrak{A}}|=\kappa\}$ 的一个枚举. 据(9.33)，λ 可以看作是 $\leqslant\kappa$ 的基数. 令 $\{d_\xi:\xi<\lambda\}$ 是幂为 λ 的新个体常元集，Σ 是 $\mathscr{L}\cup\{d_\xi:\xi<\lambda\}$ 的下列句子集：

(Ⅰ) $\mathrm{Th}_{\kappa\kappa}(\mathfrak{A})$，

(Ⅱ) $\neg\varphi_a(d_\xi)$， 对每一 $a\in A,\xi<\lambda$，

(Ⅲ) $\psi_\xi(d_\xi)$， 对每一 $\xi<\lambda$.

(9.33)蕴涵 $|\mathrm{Th}_{\kappa\kappa}(\mathfrak{A})|\leqslant\kappa$. 因为 $|A|,\lambda\leqslant\kappa$，所以 $|\Sigma|\leqslant\kappa$.

现在我们来证明 Σ 的每一幂 $<\kappa$ 的子集 Γ 有模型. 令 $X=$

$\{a\in A:\varphi_a\in\Gamma\}$，$Y=\{\xi:d_\xi$ 在 Γ 中出现$\}$，则 X,Y 有幂$<\kappa$. 据基数的基本性质，对每一 $\xi\in Y$，有

$$\psi^{\mathfrak{A}}-\bigcup_{a\in X}\varphi_a^{\mathfrak{A}}\neq\varnothing.$$

对每一 $\xi\in Y$，令 $z_\xi\in\psi^{\mathfrak{A}}-\bigcup_{a\in X}\varphi_a^{\mathfrak{A}}$，易证结构$(\mathfrak{A},z_\xi)_{\xi\in Y}$(其中 z_ξ 是对 d_ξ 的解释)是 Γ 的模型.

因为 $\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$是 κ-紧致语言，所以 Γ 有模型 $\mathfrak{B}_1$. 令 $\mathfrak{B}=\mathfrak{B}_1\upharpoonright\mathscr{L}$. 据句子(Ⅰ)，$\mathfrak{B}\equiv_{\kappa\kappa}\mathfrak{A}$. 据②和 9.3.6(1)，在同构意义上，不妨假设 $\mathfrak{A}\prec_{\kappa\kappa}\mathfrak{B}$. 据形如(Ⅱ)的句子，$d_\xi^{\mathfrak{B}_1}\in B-A$，而据(Ⅲ)的句子，显然，对 $\xi<\lambda$，$d_\xi^{\mathfrak{B}_1}\in\psi_\xi^{\mathfrak{B}}$. 因此断定③和⑤成立. 据 9.3.6(2)和(3)，每一 $\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$-单射 $f:\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ 是 A 上的恒等映射. 因为据⑤，$B-A\neq\varnothing$，所以我们有 $\mathfrak{B}\not\cong\mathfrak{A}$，因此④也得证. □

9.3.19 定理 (2) ⇒ (12)，(2) ⇒ (13).

证明：(2) ⇒ (12)：结构 $\mathfrak{A}=\langle\kappa,\in\upharpoonright\kappa,S,a\rangle_{a\in\kappa}$显然满足(2)的①和②. 令 $\mathfrak{B}$ 是(2)的结论所断定的结构，则 $\mathfrak{B}\equiv_{\kappa\kappa}\mathfrak{A}$ 和 $\kappa>\omega$ 蕴涵 $<^{\mathfrak{B}}$ 是对 B 的良序. 因此不妨假设对某个序数 λ，$B=\lambda$ 且$<^{\mathfrak{B}}=\in\upharpoonright\lambda$. 因为 $A\subseteq B$ 且 $A=\kappa$，所以 $\lambda\geqslant\kappa$. 若 $\lambda=\kappa$，据 $\mathfrak{A}\prec_{\kappa\kappa}\mathfrak{B}$，将有 $R^{\mathfrak{B}}=S$(其中 R 是 $\mathfrak{A}$ 中指称 S 的二元谓词符号)，因此 $\mathfrak{B}\cong\mathfrak{A}$，与(2)的④矛盾. 因此 $\lambda>\kappa$. 显然

$$\langle\kappa,\in\upharpoonright\kappa,S\rangle\prec\langle\lambda,\in\upharpoonright\lambda,T\rangle=\mathfrak{B}\upharpoonright\{<,R\},$$

其中 $T=R^{\mathfrak{B}}$. **注意**：这里我们没有用到(2)中的⑤.

(2) ⇒ (13)：令 $\mathfrak{A}=\langle\mathbf{R}(\kappa),\in\upharpoonright\mathbf{R}(\kappa),U,a\rangle_{a\in\mathbf{R}(\kappa)}$，$P$ 是 $\mathfrak{A}$ 中指称 U 的一元谓词符号. 因为 κ 是强不可达的，所以 $|\mathbf{R}(\kappa)|=\kappa$，因此 $\mathfrak{A}$ 满足(2)的要求. 令 $\mathfrak{B}$ 如(2)中所规定，据 $\mathfrak{B}\equiv_{\kappa\kappa}\mathfrak{A}$ 和 $\kappa>\omega$，$\mathfrak{B}$ 既是外延的又是良建的，所以据 9.3.7，存在映射到某个传递集 M 上的同构 $f:\mathfrak{B}\upharpoonright\{E\}\to\langle M,\in\upharpoonright M\rangle$.

下面我们施归纳于 Rank(x)(即最小的序数 $\alpha\in\mathbf{ON}$ 使得 $x\in R(\alpha+1)$)来证明，对每一 $x\in\mathbf{R}(\kappa)$，

$$f(c_x^{\mathfrak{B}})=x.$$

假设 $\mathrm{Rank}(y)=\alpha<\kappa$ 且对所有 x 使得 $\mathrm{Rank}(x)<\alpha, f(c_x^{\mathfrak{B}})=x$. 显然，$y\subseteq f(c_y^{\mathfrak{B}})$. 反过来，令 $z\in f(c_y^{\mathfrak{B}})$，据 M 的传递性，$z\in M$，因此对某个 $w\in B, z=f(w)$ 且 $\langle w, c_y^{\mathfrak{B}}\rangle\in E^{\mathfrak{B}}$. 因为 $|y|<\kappa$ 且 $\theta=\forall v[cEc_y\to\bigvee_{x\in y}v\equiv c_x]$ 在 $\mathfrak{A}$ 中成立，因此 θ 也在 $\mathfrak{B}$ 中成立. 所以对某个 $b\in y, w=c_b^{\mathfrak{B}}$，则 $\mathrm{Rank}(b)<\alpha$. 据归纳假设，

$$b=f(c_b^{\mathfrak{B}})=f(w)=z,$$

因此 $z\in y$，这就证明了 $f(c_y^{\mathfrak{B}})\subseteq y$. 至此归纳完毕.

现在我们有 $\mathbf{R}(x)\subseteq M$ 且若 $V=f[P^{\mathfrak{B}}]$，则

$$\langle\mathbf{R}(\kappa),\in\restriction\mathbf{R}(\kappa),U\rangle\prec\langle M,\in\restriction M,V\rangle.$$

最后我们来证 $\kappa\in M$. 考虑(2)的⑤中特定的 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$-公式$\varphi(v_0)$使得$\varphi(v_0)$述说："$v_0$ 是一个序数"，$\varphi^{\mathfrak{A}}$ 是 $\mathbf{R}(\kappa)$的子集 κ，据⑤，存在 $b\in B-\mathbf{R}(\kappa)$满足 φ，所以 $f(b)$是序数. 令 $f(b)=\alpha$. 因为 $b\notin\mathbf{R}(\kappa)$，所以 $\alpha\geqslant\kappa$. 因为 M 是传递的且 $\alpha\in M$，因此 $\kappa\in M$. □

9.3.20 定理 (5) ⇒ (11).

证明：假设 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$是 κ-紧致的，其中 $\kappa>\omega$ 是强不可达基数，M 是满足(11)的假设的集合. 令 T 是$\langle M,\in\restriction M\rangle$的 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$-完全理论：

$$T=\mathrm{Th}_{\kappa\omega}(\langle M,\in\restriction M,a\rangle_{a\in A}).$$

对每一 $a\in M$，令 c_a 指称 a 的个体常元. 增加一个新个体常元 c 给原来的语言，令 Σ 由 T 中所有句子和下列句子组成：

① "c 是序数"，

② $c<c_\kappa$，

③ $c_\xi<c$，　对每一 $\xi<\kappa$.

类似 9.3.18 的论证可以证明 $|\Sigma|=\kappa$ 且 Σ 的每一幂$<\kappa$ 的子集有模型. 因为 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$是 κ-紧致的，所以 Σ 有模型. 据 9.3.7，此模型同构于传递结构$\langle N,\in\restriction N\rangle$. 定义映射 $f: M\to N$ 如下：对每一 $a\in M$，

$$f(a)=c_a^{\mathfrak{B}},$$

则 f 是满足(11)要求的、从$\langle M,\in\restriction M\rangle$到$\langle N,\in\restriction N\rangle$中的初等嵌入(事实上是 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$-单射). 据类似 9.3.19 的证明的第二部分中的

归纳论证，用上述句子①和③，易证对所有 $\alpha<\kappa, f(\alpha)=\alpha$. 而 $\kappa< f(\kappa)$ 是这一结果和②的直接推论. □

9.3.21 定理 (5) ⇒ (6).

证明：这里我们使用的技巧已经在证明 9.3.8(10) ⇒ (1)时以比较简单的形式出现过. 任给语言 $\mathscr{L}$ 使得对每一 $X\in\mathscr{F}$，$\mathscr{L}$ 有一个一元谓词 R_X，考虑 $\mathscr{L}$ 的结构 $\mathfrak{A}=\langle\kappa, X\rangle_{X\in\mathscr{F}}$. 我们要构造 $\mathfrak{A}$ 的 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$-扩张 $\mathfrak{C}$ 使得在 $\mathfrak{C}$ 中存在元素 $c\in\bigcap_{X\in\mathscr{D}} \mathrm{R}_X^{\mathfrak{C}}$.

令 Σ 是语言 $\mathscr{L}'=\mathscr{L}\cup\{c_\xi:\xi<\kappa\}\cup\{d\}$ 的下列 $\mathscr{L}'_{\kappa\omega}$-句子集，其中新增符号是个体常元符号：

① $\mathrm{Th}_{\kappa\omega}((\mathfrak{A},\xi)_{\xi<\kappa})$，

② $R_X(d)$， 对每一 $X\in\mathscr{D}$.

因为据假设，$|\mathscr{D}|\leqslant|\mathscr{F}|=\kappa$，所以 Σ 有幂 $\leqslant\kappa$. 令 Γ 是 Σ 的任意幂 $<\kappa$ 的子集. 令 $\mathscr{X}=\{X\in\mathscr{D}: R_X$ 在 Γ 中出现$\}$. 显然，$\mathscr{X}\subseteq\mathscr{D}$ 且 $|\mathscr{X}|<\kappa$. 因为 $\mathscr{D}$ 是 $<\kappa$-完全的，所以 $\bigcap\mathscr{X}\in\mathscr{D}$. 因为 $\mathscr{D}$ 是真滤，所以 $\bigcap\mathscr{X}\neq\varnothing$. 令 $x\in\bigcap\mathscr{X}$，易见结构 $(\mathfrak{A},\xi,x)_{\xi<\kappa}$ 是 Γ 的模型.

据 $\mathscr{L}'_{\kappa\omega}$ 的 κ-紧致性，Σ 有模型 $\mathfrak{B}_1$. 令 $\mathfrak{B}=\mathfrak{B}_1\upharpoonright\mathscr{L}$. 据句子①，$\mathfrak{B}\prec_{\kappa\omega}\mathfrak{A}$. 据句子②，$d^{\mathfrak{B}_1}\in\bigcap_{X\in\mathscr{D}} R_X^{\mathfrak{B}}$.

现在固定具有上述性质的 $\mathfrak{B}$ 和 c. 对 $X\in\mathscr{F}$，定义

$$X\in\mathscr{D}_1 \Leftrightarrow c\in R_X^{\mathfrak{B}}.$$

恰如 9.3.8(10) ⇒ (1)的论证，可以证明 $\mathscr{D}_1\subseteq\mathscr{F}$ 是一个 $<\kappa$-完全的超滤. 因为 $c\in\bigcap_{X\in\mathscr{D}} R_X^{\mathfrak{B}}$，所以 $\mathscr{D}\subseteq\mathscr{D}_1$. □

注意：(Ⅰ) 在 $c\in A$ 的情况下，$\mathscr{D}_1$ 是主滤.

(Ⅱ) 令 $\lambda\leqslant\kappa$，上述论证也能证明下列(5)′ ⇒ (6)′：

(5)′ $\mathscr{L}_{\lambda\omega}$ 是 κ-紧致语言.

(6)′ 若 $\mathscr{F}$ 是由 κ 的诸子集构成的 $<\kappa$-完全的域且 $|\mathscr{F}|=\kappa$，则 $\mathscr{F}$ 中每一 $<\kappa$-完全的真滤能扩张为 $<\lambda$-完全的超滤.

9.3.22 定理 (11) ⇒ (7).

证明：证明类似 9.3.8(12) ⇒ (1)的证明．令 $\mathscr{F}$ 是由 κ 的、包含 κ 的所有单元集的诸子集构成的 $<\kappa$-完全的域使得 $|\mathscr{F}|=\kappa$．令 M 是最小的传递集使得 $\kappa\in M$，$\mathscr{F}\subseteq M$ 且对所有 $\alpha<\kappa$ 和所有 $f:\alpha\to\mathscr{F}$，$\{\langle x,\xi\rangle:x\in f(\xi),\xi<\alpha\}\in M$．因为 κ 是强不可达的，所以经过简单的计算能证明 $|M|=\kappa$．据(11)，存在传递集 N 和初等嵌入 $f:\langle M,\in\upharpoonright M\rangle\to\langle N,\in\upharpoonright N\rangle$ 使得对所有 $\alpha<\kappa$，$f(\alpha)=\alpha$ 但 $f(\kappa)>\kappa$．令 $\mathscr{D}=\{x\in\mathscr{F}:\kappa\in f(x)\}$．恰如 9.3.8(12) ⇒ (1)的证明，可证得 $\mathscr{D}$ 是 $\mathscr{F}$ 中 $<\kappa$-完全的非主超滤．□

9.3.23 定理　(6) ⇒ (7) ⇒ (8) ⇒ (9) ⇒ (10) ⇒ (4)．

证明：因为这里的证明是纯粹集合论的，所以除了(9) ⇒ (10)，其余皆概述．

(6) ⇒ (7)：令 $\mathscr{F}$ 是满足(7)要求的、κ 的诸子集的域．易证 $\mathscr{D}=\{Y\in\mathscr{F}:|\kappa-Y|<\kappa\}$ 是 $\mathscr{F}$ 中 $<\kappa$-完全的真滤．据(6)，$\mathscr{D}$ 能扩张为 $<\kappa$-完全的超滤 $\mathscr{D}_1$．因为 $\mathscr{D}_1$ 包含每一单元集的补，所以 $\mathscr{D}_1$ 是非主超滤．

(7) ⇒ (8)：假设 $[K]^2$ 划分为 $C_0\cup C_1$．对每一 $x<\kappa$，令 $M(x)=\{y:\{x,y\}\in C_0\}$，$\mathscr{F}$ 是由 κ 的诸子集构成的、最小的 $<\kappa$-完全的域使得对 $x<\kappa$，$\mathscr{F}$ 包含 $M(x)$，$\{x\}$ 和 κ 自身．因为 $\mathscr{F}$ 由幂为 κ 的集合构成的一个族生成，所以 $|\mathscr{F}|=\kappa$．据(7)，在 $\mathscr{F}$ 中存在一个 $<\kappa$-完全的非主超滤 $\mathscr{D}$．归纳定义序列 $\langle x_\eta:\eta<\kappa\rangle\subseteq\kappa$ 如下：

$$x_\eta\in\bigcap_{\beta<\eta}M_1(x_\beta),\quad M_1(x)=M(x)\text{ 使 }\kappa-M(x)\in\mathscr{D}.$$

因为 $\mathscr{D}$ 是 $<\kappa$-完全的，所以 $\bigcap_{\beta<\eta}M_1(x_\beta)\in\mathscr{D}$，因此 $\mathscr{D}\neq\varnothing$．

注意：对 $\eta<\xi$，

$$x_\xi\in M(x_\eta)\Leftrightarrow M(x_\eta)\in\mathscr{D}.$$

令 $S=\{x_\eta:\eta<\kappa\}$，$S_1=\{x\in S:M(x)\in\mathscr{D}\}$，则据上述等价式，

$$x,y\in S_1\Rightarrow\{x,y\}\in C_0,\quad x,y\in S-S_1\Rightarrow\{x,y\}\in C_1.$$

因此集合 S_1 和 $S-S_1$ 相对划分(C_0,C_1)是齐性集．因为 $|S|=\kappa$，所以 S_1 和 $S-S_1$ 中有一个幂为 κ，这就证明了 $\kappa\to(\kappa)^2_2$．

(8) ⇒ (9)：令$\langle A,<\rangle$是基数为κ的线序，任给$x,y\in A$，若$\langle x,y\rangle\in <_A$，则$\{x,y\}\in C_0$，否则令$\{x,y\}\in C_1$. 据(8)，存在$A_i\subseteq A$使得$[A_i]^2\subseteq C_i$(其中$i=0,1$)且$|A_i|=\kappa$.

(9) ⇒ (10)：令$\mathfrak{A}=\langle A,T\rangle$是幂为$\kappa$的树，其中每一层有幂$<\kappa$. 不妨假设$\mathfrak{A}$只有一个树根，因为否则我们可以把这片"树林"砍成$<\kappa$棵不相连的、只有一个树根的树使得其中的每一棵树仍有幂为κ(据κ的正则性)，这样的子树的任一幂为κ的树枝就是我们要找的$\mathfrak{A}$的树枝.

我们要在A上定义一个扩张T的序$<$使得对每一$x\in A$，集合$\mathrm{R}(x)=\{y\in A:x<y\}$是一个$<$-节，即

$$u<v<w \text{ 且 } u,w\in \mathrm{R}(x)\Rightarrow v\in \mathrm{R}(x).$$

首先，施归纳于α，我们要在$\mathrm{Lev}(\alpha)$上定义一个具有下列性质的线序$<_\alpha$：对$x,y\in \mathrm{Lev}(\alpha)$，

$x<_\alpha y\Leftrightarrow$ 对所有$\gamma<\alpha$和所有$z,w\in \mathrm{Lev}(\gamma)$，若$zTx,wTy$且$z\neq w$，则$z<_\gamma w$. (9.34)

若对所有$\beta<\alpha$，$<_\beta$已定义完毕，且$x,y\in \mathrm{Lev}(\alpha)$，则我们能据(9.34)定义$x<_\alpha y$如下：

情况1：若分别存在x,y的、属于同一层的T-前趋z,w且$z\neq w$，则我们令

$$x<_\alpha y\Leftrightarrow (9.34)\text{的右边成立}.$$

情况2：否则用任意方式定义$<_\alpha$.

条件(9.34)之所以成立是因为在情况2中(9.34)的右边空洞地真.

其次，我们定义$<$如下：对$x,y\in A$，

$x<y\Leftrightarrow xTy$ 或[x,y是T-不可比较的且

① $\mathrm{H}(x)\leqslant \mathrm{H}(y)$ ($\mathrm{H}(x)$指称x的高度)，且存在$w\in \mathrm{Lev}(\mathrm{H}(x))$使得$wTy$或$w=y$，且$x<_{\mathrm{H}(x)}w$；或者

② $\mathrm{H}(y)\leqslant \mathrm{H}(x)$且存在$z\in \mathrm{Lev}(\mathrm{H}(y))$使得$zTx$或$z=x$，且$z<_{\mathrm{H}(y)}y$].

可以证明每一 $\mathrm{R}(x)$ 相对 $<$ 是一个节.

据假设(9), $\langle A,<\rangle$ 有一个幂为 κ 的子集 C 使得 C 被 $<$ 良序或逆良序. 通过砍掉 C 中几个元素,不妨假设 $\langle C,<\upharpoonright C\rangle$ 有序型 κ 或序型 κ^*. 假设它有序型 κ(序型 κ^* 的情况也同理可证),定义

$B=\{x\in A:\mathrm{R}(x)$ 包含 C 的一 $<$-终节($<$-final segment)$\}$.

下证:

$$B\text{ 是 }\langle A,T\rangle\text{的线序子集.} \tag{9.35}$$

假设(9.35)不成立,则存在 T-不可比较元 $x,y\in B$. 显然, $\mathrm{R}(x)\cap\mathrm{R}(y)=\varnothing$. 另一方面,若 D_1,D_2 分别是包含 $\mathrm{R}(x)$, $\mathrm{R}(y)$ 中 C 的尾部(tail),因为 C 没有最后元,所以 $D_1\cap D_2\neq\varnothing$,这与 $\mathrm{R}(x)\cap\mathrm{R}(y)=\varnothing$ 矛盾. 因此(9.35)成立. 下证:

$$|B|=\kappa. \tag{9.36}$$

只须施归纳来证明对所有 $\alpha<\kappa$, $B\cap\mathrm{Lev}(\alpha)\neq\varnothing$. 假设对所有 $\beta<\alpha$, $B\cap\mathrm{Lev}(\beta)\neq\varnothing$. 对每一 $x_\beta\in B\cap\mathrm{Lev}(\beta)$(据(9.35),这样的元素是唯一的),令 D_β 是包含在 $\mathrm{R}(x_\beta)$ 中的 C 的一个尾部,则 κ 的正则性蕴涵 $D=\bigcap\limits_{\beta<\alpha}D_\beta\neq\varnothing$ 且 D 有幂 κ(因为它是 C 的尾部). 此外,还有

$$D\subseteq\mathrm{Lev}(\alpha)\cup\bigcup_{y\in\mathrm{Lev}(\alpha)}\mathrm{R}(y).$$

因为 $|\mathrm{Lev}(\alpha)|<\kappa$,所以存在 $y\in\mathrm{Lev}(\alpha)$ 使得 $|D\cap\mathrm{R}(y)|=\kappa$,据基数的基本性质,这个集合与 D 共尾. 因为 $\mathrm{R}(y)$ 是一个节,所以它包含 D 的一个子尾部,因此 $y\in B$ 且 $B\cap\mathrm{Lev}(\alpha)\neq\varnothing$.

(10) $\Rightarrow$ (4):考虑幂为 κ 的二元树 $\mathfrak{B}=\langle B,T\rangle$,我们须证明它有一个幂为 κ 的树枝. 据定义,一棵树的长度是它的所有树枝的长度的上确界. 因为若 $\mathfrak{B}$ 有长度 $>\kappa$,则它有一个长度(因此也有幂) $\geqslant\kappa$ 的树枝,所以我们只考虑长度 $\leqslant\kappa$ 的 $\mathfrak{B}$.

施归纳我们能证明:对每一 $\alpha<\kappa$, $\mathfrak{B}$ 的层 $\mathrm{Lev}(\alpha)$ 有幂 $<\kappa$. 据(10),对每一 $\beta<\kappa$ 和 $x\in\mathrm{Lev}(\beta)$,集合 $S_x=\{y\in B:yTx\}$ 是 $\mathfrak{B}$ 的、如下定义的子树的一个树枝:

$$\{y\in B: \mathrm{H}(y)<\beta\}=\bigcup_{\beta<\alpha}\mathrm{Lev}(\beta).$$

据归纳假设，这一子树有幂$<\kappa$，因此有$<\kappa$个树枝．因为κ是强不可达的，所以$|\mathrm{Lev}(\beta)|<\kappa$．□

9.3.24 定理　(3) ⇒ (4)．

证明：反证．假设$\langle B,T\rangle$是幂为κ的二元树使得该树的所有树枝的幂$<\kappa$．结构$\mathfrak{A}=\langle B,T,b\rangle_{b\in B}$显然满足(3)的假设．考虑$\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$的下列句子集，其中$<$是对应$T$的符号，$\mathrm{Suc}(x,y)$表示"在偏序$<$中，$y$是$x$的直接后继"：

(A)"$<$是类树偏序"，即

"$<$是偏序"，且

"$\forall x\forall v\restriction\omega[\bigwedge_{n<\omega}(v_n<x)\rightarrow\bigvee_{n<\omega}(v_n<v_{n+1})]$"，

(B)"$<$定义一个二元树"，即

$\exists x\forall y(x<y\vee x\equiv y)$，且

$\forall x\exists yz[\mathrm{Suc}(x,y)\wedge\mathrm{Suc}(x,z)\wedge\forall w(\mathrm{Suc}(x,w)\rightarrow w\equiv y\vee w\equiv z)]$，

(C) $c_{b_1}<c_{b_2}$，　对$b_1,b_2\in B$使得b_1Tb_2，

(D) $\neg(c_{b_1}<c_{b_2})$，　对$b_1,b_2\in B$使得并非(b_1Tb_2)，

(E) $\exists!x\mathrm{Suc}(c_b,x)$，　对$B$中每一只有一$T$-直接后承的$b$，

(F) $\neg\exists v\bigwedge_{b\in C}(v>c_b)$，　对$\langle B,T\rangle$的每一树枝$C$，

(G) $\forall v[v<c_b\rightarrow\bigvee_{aTb}(v\equiv c_a)]$，　对每一$b\in B$．

注意：$\langle B,T\rangle$的所有树枝的幂$<\kappa$ ⇒ (F)和(G)是$\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$-句子．

下证(A)—(G)的每一模型$\mathfrak{C}\cong\mathfrak{A}$，而这与(3)矛盾，从而证明了(3) ⇒ (4)．

令$\mathfrak{C}$的论域是C，$<^{\mathfrak{C}}=S$，则根据句子(C)和(D)的构造，显见$\{c_b^{\mathfrak{C}}:b\in B\}$是$\langle B,T\rangle$的同构摹本，所以我们设$\langle C,S\rangle$扩张$\langle B,T\rangle$．令$c\in C-B$，我们要得出矛盾，从而证明$\langle C,S\rangle=\langle B,T\rangle$．

因为$c\notin B$，所以c大于$\langle B,T\rangle$的树根，因此$X=\{b\in B:bSc\}\neq\varnothing$，易见$X$是$\langle B,T\rangle$的线序子集，我们分两种情况讨论之：

情况 1　X 有最后元 b_0：若存在 $b\in B$ 使得对每一 $x\in X$，xTb，则令 b_1 是这样的 b 中最小的一个．据(G)，c 是 b_1 的 T-前趋，与 $c\in C-B$ 矛盾，所以并非 cSb_1．据(B)，c 和 b_1 都是 $\langle C,S\rangle$ 中 b_0 的 $<$-直接后继．因为 $c\notin B$，所以 b_0 在 $\langle B,T\rangle$ 中恰好有一个后继 b_1，与(E)矛盾．相反，若不存在具有上述性质的 $b\in B$，则 X 是 $\langle B,T\rangle$ 的极大线序子集(树枝)．因为对所有 $x\in X$，有 xSc，而这与(F)矛盾．

情况 2　X 没有最后元：据(F)，易见 X 是 $\langle B,T\rangle$ 的一个树枝，如上述论证，仍会得到矛盾．□

9.3.25 定理　(4) ⇒ (1).

证明：这个证明类似 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$-紧致性定理的标准证明：令 Σ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$的幂为 κ 的句子集使得 Σ 的每一幂 $<\kappa$ 的子集有模型．不妨假设 $\mathscr{L}=\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$只有 Σ 中出现的符号，因此 $|\mathscr{L}|\leqslant\kappa$.

首先以下列方式把 $\mathscr{L}$ 扩张到 Skolem-语言 $\mathscr{L}^*$：对 Form($\mathscr{L}$)的每一有自由变元集 $\{v_\xi:\xi<\alpha\}$ 的公式 φ，我们引入新(Skolem-)个体常元符号集 $\{c_\xi^\varphi:\xi<\alpha\}$．令 $\mathscr{L}^{(1)}$是如此扩张的语言．对 $\mathscr{L}^{(1)}$的每一公式 φ，我们也如此进行从而得到 $\mathscr{L}^{(2)}\supset\mathscr{L}^{(1)}$．对每一 $n<\omega$，我们都能如此得到 $\mathscr{L}^{(n)}$．令

$$\mathscr{L}^*=\bigcup_{n<\omega}\mathscr{L}^{(n)}.$$

因为 κ 是强不可达的，所以 $|\mathscr{L}^*|\leqslant\kappa$．显然，对每一有自由变元集 $\{v_\xi:\xi<\alpha\}$ 的公式 φ，在 $\mathscr{L}^*$ 中有个体常元符号集 $\{c_\xi^\varphi:\xi<\alpha\}$ 使得它们都不在 φ 中出现.

对每一 $\varphi(v_\xi:\xi<\alpha)$，令 σ_φ 是 φ 的 **Skolem-句**：

$$\exists\{v_\xi:\xi<\alpha\}\varphi(v_\xi:\xi<\alpha)\rightarrow\varphi(c_\xi^\varphi:\xi<\alpha).\tag{9.37}$$

且令 $\Sigma^*=\Sigma\cup\{\sigma_\varphi:\varphi$ 是 $\mathscr{L}^*$ 的公式$\}$．令 Γ 是 Σ^* 的任意幂 $<\kappa$ 的子集，则 Γ 有模型．令 $\mathfrak{A}$ 是 $\Gamma\cap\Sigma$ 的 $\mathscr{L}$-模型，通过解释 Skolem-常元符号使得每一形如(9.37)的句子真，我们可以把 $\mathfrak{A}$ 扩张为 $\mathscr{L}^*$ 的结构 $\mathfrak{A}^*$．显然，$\mathfrak{A}^*\models\Gamma$，这就证明了

若 Γ 是 Σ^* 的任意幂 $<\kappa$ 的子集，则 Γ 有模型.

令$\{\sigma_\alpha:\alpha<\kappa\}$是$\mathscr{L}^*$中所有句子的一个枚举. 令$\langle S,\subseteq\rangle$是由所有$s: \gamma\to\{0,1\},\gamma<\kappa$,组成的幂为$\kappa$的二元树使得

$$\text{存在 } \Sigma\cap\{\sigma_\alpha:\alpha\in \mathrm{Dom}(s)\} \text{ 的模型使得对每一 } \alpha\in \mathrm{Dom}(s),$$

$$s(\alpha)=1 \Leftrightarrow \mathfrak{A}\models\sigma_\alpha.$$

因为(4)成立,所以S中有一个幂为κ的树枝C. 令

$$\Delta=\{\sigma_\alpha:s(\alpha)=1,\text{对某个 } s\in C\}.$$

显然,$\Sigma^*\subset\Delta$. 令A_0是$\mathscr{L}^*$中所有项的集合,定义

$$t_1\approx t_2 \Leftrightarrow t_1\equiv t_2\in\Delta.$$

显然$\approx$是A_0上的等价关系. 令$A=\{t/\approx;t\in A_0\}$,用A作为个体域,我们构造$\mathscr{L}^*$的结构$\mathfrak{A}$如下:

$$\left.\begin{array}{l}\langle t_1/\approx,\cdots,t_n/\approx\rangle\in R^{\mathfrak{A}} \Leftrightarrow R(t_1,\cdots,t_n)\in\Delta,\\ F^{\mathfrak{A}}(t_1/\approx,\cdots,t_n/\approx)=F(t_1,\cdots,t_n)/\approx,\\ c^{\mathfrak{A}}=c/\approx,\end{array}\right\} \tag{9.38}$$

其中R,F,c是$\mathscr{L}^*$的关系、函数和个体常元符号. 据等词公理的有效性和Δ的构造,易见$R^{\mathfrak{A}},F^{\mathfrak{A}}$和$c^{\mathfrak{A}}$是良定义的,施归纳于公式的复杂度,下证:

$$\mathfrak{A}\models\sigma \Leftrightarrow \sigma\in\Delta. \tag{9.39}$$

原子公式的情况是(9.38)的直接推论. 联结词的情况显然. 令$\sigma=\exists\{v_\xi:\xi<\alpha\}\varphi(v_\xi:\xi<\alpha)$,则存在$\{c_\xi^\varphi:\xi<\alpha\}$使得

$$\exists\{v_\xi:\xi<\alpha\}\varphi(v_\xi:\xi<\alpha)\to\varphi(c_\xi^\varphi:\xi<\alpha)\in\Delta.$$

因此,

$$\mathfrak{A}\models\sigma(c_\xi^\varphi:\xi<\alpha) \Leftrightarrow \sigma(c_\xi^\varphi:\xi<\alpha)\in\Delta.$$

所以(9.39)成立,从而证明了$\Delta\supset\Sigma$有模型. □

9.3.26 定理 (13) ⇒ (14).

证明:设(13)成立. 令$U\subseteq\mathbf{R}(\kappa)$,$\sigma$是在$\mathfrak{M}=\langle\mathbf{R}(\kappa),\in,U\rangle$中真的$\Pi_1^1$-句子. 不妨令$\sigma=\forall X\varphi(X)$,其中$X$是二阶变元且$\varphi$只有一阶量词. 令$\mathfrak{M}_1=\langle M,\in,U_1\rangle$是$\mathfrak{M}$的传递的初等扩张使得$\kappa\in M$. 因为

$$(\forall X\subseteq \mathbf{R}(\kappa))\mathfrak{M}\models \varphi(X),$$

且 $\mathbf{R}(\kappa)^M=\mathbf{R}(\kappa)$，所以我们有

$$\mathfrak{M}_1\models[(\forall X\subseteq \mathbf{R}(\kappa))\langle \mathbf{R}(\kappa),\in,U_1\cap\kappa\rangle\models\varphi(X)],$$

因此

$$\mathfrak{M}_1\models[(\exists\alpha\in \mathbf{ON})(\forall X\subseteq \mathbf{R}(\alpha))\langle \mathbf{R}(\alpha),\in,U_1\cap\alpha\rangle\models\varphi(X)],$$

从而

$$\mathfrak{M}\models[(\exists\alpha\in \mathbf{ON})(\forall X\subseteq \mathbf{R}(\alpha))\langle \mathbf{R}(\alpha),\in,U\cap\alpha\rangle\models\varphi(X)].$$

这样我们证明了对某个 $\alpha<\kappa,\alpha\in\mathbf{ON}$，

$$\langle \mathbf{R}(\alpha),\in,U\rangle\models\sigma.\ \square$$

说明：至此我们完成了(1)—(14)的等价性证明．考虑下列命题(15)—(17)之间的关系以及它们与(1)—(14)的关系：

(15) $\mathscr{L}_{\omega_1\omega_1}$是 κ-紧致语言．

(16) $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$是 κ-紧致语言．

(17) 若 $\mathscr{F}$ 是由 κ 的诸子集构成的 $<\kappa$-完全的域且 $|\mathscr{F}|=\kappa$，则 $\mathscr{F}$ 中每一 $<\kappa$-完全的真滤可以扩张为 $<\omega_1$-完全的超滤．

Bell 在其[1970]和[1972]证明了，若 $\kappa>\omega$ 是强不可达基数，则(15)—(17)等价且被(1)—(14)中任意一个蕴涵．若再加上假设

"κ 不超过(exceed)第一个可测基数"，

则(15)—(17)中任一命题蕴涵(1)—(14)中任一命题．

显然，我们有(1) $\Rightarrow$ (15) $\Rightarrow$ (16)．据 9.3.21 的论证，我们也能证明(16) $\Rightarrow$ (17)，请参见 9.3.21 的证明及其后面的说明．

9.3.27 定理 (17) $\Rightarrow$ (15)．

证明：这个证明是大家熟悉的用超滤来证明 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$-紧致性定理的一个变种．

令 Σ 是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega_1}$ 的幂为 κ 的句子集使得 Σ 的每一幂 $<\kappa$ 的子集有模型．据(无穷)Skolem-函数方法，每一被存在量化的变元可以被一适当的 Skolem-函数符号置换，因此不妨假设 Σ 是 Skolem-膨胀 $\mathscr{L}^*$ 中的全称句子集．因为我们可以消去 Σ 中句子的存在量词，所以我们还可以假设 $|\mathscr{L}^*|=\kappa$.

令 $\mathscr{P}_\kappa(\Sigma)$ 指称 Σ 的所有幂 $<\kappa$ 的子集的族. 对每一 $\Delta\in\mathscr{P}_\kappa(\Sigma)$，选择 Δ 的模型 $\mathfrak{A}_\Delta$ 使得每一新(Skolem-)函数符号指称一个(有可枚举多个变目的)全函数.

考虑带有逐点定义的运算和关系的直积 $\prod\{\mathfrak{A}_\Delta:\Delta\in\mathscr{P}_\kappa(\Sigma)\}$. 因为 $|\mathscr{L}^*|=\kappa$，且 κ 是强不可达的，所以存在 $\prod\{\mathfrak{A}_\Delta:\Delta\in\mathscr{P}_\kappa(\Sigma)\}$ 的幂为 κ 的子集 B，使得 B 在 $\mathscr{L}^*$ 的所有运算下封闭.

对每一序对 $\langle\varphi,f\rangle$，其中 φ 是 $\mathscr{L}^*_{\omega_1\omega_1}$ 的无量词公式，且 $f\in B^{\mathrm{Fv}(\varphi)}$，我们定义

$$J_{\varphi,f}=\{\Delta\in\mathscr{P}_\kappa(\Sigma):\mathfrak{A}_\Delta\models\varphi[\mathrm{pr}_\Delta\circ f]\},$$

其中对每一 $\Delta\in\mathscr{P}_\kappa(\Sigma)$，$\mathrm{pr}_\Delta:\prod\{\mathfrak{A}_\Delta:\Delta\in\mathscr{P}_\kappa(\Sigma)\}\to A_\Delta$ 指称下列投影函数：

$$\mathrm{pr}_\Delta(\langle a_\Delta:\Delta\in\mathscr{P}_\kappa(\Sigma)\rangle)=a_\Delta.$$

显然每一投影函数是一同态. 对每一 $\Delta\in\mathscr{P}_\kappa(\Sigma)$，令

$$\hat{\Delta}=\{\Delta_1\in\mathscr{P}_\kappa(\Sigma):\Delta\subseteq\Delta_1\},$$

且 $\mathscr{F}$ 是由所有 $\hat{\Delta}$ 和所有 $J_{\varphi,f}$ 生成的、$\mathscr{P}_\kappa(\Sigma)$ 的子集的 $<\kappa$-完全的域. 因为 κ 是强不可达的，所以 $|\mathscr{F}|=\kappa$.

注意：小于 κ 个 $\hat{\Delta}$ 的交也是形如 $\hat{\Delta}$ 的集合，因而是非空的，因此 $\{\hat{\Delta}:\Delta\in\mathscr{P}_\kappa(\Sigma)\}$ 生成 $\mathscr{F}$ 的一个 $<\kappa$-完全的真滤 $\mathscr{D}_1$，据(17)，$\mathscr{D}_1$ 可以扩张为 $\mathscr{F}$ 中的一个 $<\omega_1$-完全的超滤 $\mathscr{D}$.

对 B 的每对元素 f,g，我们定义下列等价关系：

$$f\approx g\Leftrightarrow\{\Delta:f(\Delta)=g(\Delta)\}\in\mathscr{D}.$$

对 $f\in B$，我们用 $f_{\mathscr{D}}$ 表示 $f/\approx$. 如同超积构造那样，定义结构 $\mathfrak{A}$ 如下：

$A=\{f_{\mathscr{D}}:f\in B\}$，

$\langle f^1_{\mathscr{D}},\cdots,f^n_{\mathscr{D}}\rangle\in R^{\mathfrak{A}}\Leftrightarrow\{\Delta:\langle f^1(\Delta),\cdots,f^n(\Delta)\rangle\in R^{\mathfrak{A}_\Delta}\}\in\mathscr{D}$，

$F^{\mathfrak{A}}(f^1_{\mathscr{D}},\cdots,f^m_{\mathscr{D}},\cdots)=\langle F^{\mathfrak{A}_\Delta}(f^1(\Delta),\cdots,f^m(\Delta),\cdots):\Delta\in\mathscr{P}_\kappa(\Sigma)\rangle_{\mathscr{D}}$，

$c^{\mathfrak{A}}=\langle f(\Delta):\Delta\in\mathscr{P}_\kappa(\Sigma)\rangle_{\mathscr{D}}$，

其中 R 是 $\mathscr{L}^*$ 的任意 n 元关系符号，F 是 $\mathscr{L}^*$ 的任意(无穷元)函

数符号，c 是 $\mathscr{L}^*$ 的任意个体常元符号.

易证对 $\mathscr{L}^*_{\omega_1\omega_1}$ 的每一无量词公式 φ 和每一 $f\in B^{\mathrm{Fv}(\varphi)}$，

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}\models\varphi[f_{\mathscr{D}}]&\Leftrightarrow\{\Delta\in\mathscr{P}_\kappa(\Sigma):\mathfrak{A}_\Delta\models\varphi[\mathrm{pr}_\Delta\circ f]\}\in\mathscr{D}\\&\Leftrightarrow J_{\varphi,f}\in\mathscr{D}.\end{aligned}\tag{9.40}$$

给定 $\sigma\in\Sigma$，令 ψ 是通过删去 σ 的所有全称量词而得到的无量词公式且 $f\in B^{\mathrm{Fv}(\psi)}$. 因为 σ 只含全称量词，故对每一 $\Delta\in\mathscr{P}_\kappa(\Sigma)$，

$$\begin{aligned}\sigma\in\Delta&\Rightarrow\mathfrak{A}_\Delta\models\sigma\\&\Rightarrow\mathfrak{A}_\Delta\models\psi[\mathrm{pr}_\Delta\circ f].\end{aligned}$$

换句话说，$\{\hat{\sigma}\}\subseteq J_{\psi,f}$. 但据 $\mathscr{D}$ 的构造，$\{\hat{\sigma}\}\in\mathscr{D}$，因此 $J_{\psi,f}\in\mathscr{D}$. 据(9.40)，$\mathfrak{A}\models\psi[f_{\mathscr{D}}]$. 因为 $f_{\mathscr{D}}$ 是 A 的任意元，所以 $\mathfrak{A}_\Delta\models\sigma$，因此

$$\mathfrak{A}\models\Sigma.\ \Box$$

Bell 的结果中最令人感兴趣的是，若 κ 不超过第一个可测基数，则(15)—(17)中每一个等价(1)—(14)中每一个. 这样的证明要用到 9.3.19(2) ⇒ (13)论证的一变种和 9.3.8 的(12) ⇒ (1).

9.3.28 定理 若 κ 是强不可达的且不超过第一个可测基数，则(15) ⇒ (13).

证明：考虑结构 $\mathfrak{A}=\langle\mathbf{R}(\kappa),\in\upharpoonright\mathbf{R}(\kappa),U,a\rangle_{a\in\mathbf{R}(\kappa)}$ 和语言 $\mathscr{L}=\{E,P\}\cup\{c_a:a\in\mathbf{R}(\kappa)\}\cup\{c\}$ 的下列 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega_1}$-句子集，其中 P 是一元谓词符号，c 是新个体常元：

① $\mathrm{Th}_{\omega_1\omega_1}(\mathfrak{A})$，

② "c 是一序数"，

③ c_aEc， 对每一 $a<\kappa$.

显然，Σ 的每一幂 $<\kappa$ 的子集 Γ 有模型

$$\langle\mathbf{R}(\kappa),\in\upharpoonright\mathbf{R}(\kappa),U,\xi,a\rangle_{a\in Y},$$

其中 $Y=\{a\in\mathbf{R}(\kappa):c_a$ 在 Γ 中出现$\}$，且 $\xi<\kappa$ 是任意大于 Y 中出现的所有序数的序数.

据(15)，Σ 有模型 $\mathfrak{B}$. 据 9.3.6，存在 $g:\mathfrak{A}\preceq_{\omega_1\omega_1}\mathfrak{B}$. 因为据①，$\mathfrak{B}\upharpoonright\{E\}$是外延且良建的，所以据 9.3.7，存在从 $\mathfrak{B}\upharpoonright\{E\}$到某个传递结构$\langle M,\in\upharpoonright M\rangle$上的崩塌同构. 特别地，$f=h\circ g$ 是从$\langle\mathbf{R}(\kappa)$，

$\in\upharpoonright\mathbf{R}(\kappa)\rangle$到$\langle M,\in\upharpoonright M\rangle$中的初等映射. 因为$\kappa$不超过第一个可测基数,所以 9.3.8 的条件(12)蕴涵对所有$\alpha<\kappa$,$f(\alpha)=\alpha$.

下证f是恒等函数:假设$\mathrm{Rank}(y)=\alpha<\kappa$且对所有$x$使得$\mathrm{Rank}(x)<\alpha$,$f(x)=x$,则显然$y\subseteq f(y)$. 反之,令$z\in f(y)$,因为秩函数有定义且$f$是初等映射,所以

$$\mathrm{Rank}(f(y))=f(\mathrm{Rank}(y))=f(\alpha)=\alpha,$$

因此$\mathrm{Rank}(z)<\alpha$. 据归纳假设,$f(z)=z$,因此$f(z)\in f(y)$,这蕴涵$z\in y$,所以$f(y)\subseteq y$,从而证明f是恒等函数,因此$\mathbf{R}(\kappa)\subseteq M$,

$$f:\langle\mathbf{R}(\kappa),\in\upharpoonright\mathbf{R}(\kappa),U\rangle\precsim\langle M,\in\upharpoonright M,V\rangle,$$

其中$V=h[P^{\mathfrak{B}}]$,且$h(c^{\mathfrak{B}})$是M中一序数使得$h(c^{\mathfrak{B}})$至少有κ个前趋. 据M的传递性,我们有$\kappa\in M$. □

说明:(Ⅰ)f是$\mathscr{L}_{\omega_1\omega_1}$-映射,上面只用到$f$的初等特征. 据 9.3.19,若$f$是$\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$-映射,则即使没有其它假设,$f$也是恒等函数.

(Ⅱ)假设$\mathbf{V}=\mathbf{L}$是集合论公理,则不存在可测基数,且(15)$\Rightarrow$(13)对所有强不可达的κ都成立. 但这个命题甚至在有可测基数的集合论中也真. 事实上,J. Paris 已证明(他的成果没有发表,只是据 Bell 所说):若$\mathscr{D}$是一可测基数上的正规超滤且$\mathbf{V}=\mathbf{L}(\mathscr{D})$,则上述命题成立.

(Ⅲ)对许多大于第一个强紧致基数κ_0的κ,(15)$\Rightarrow$(13)不成立. 事实上,对任意$\geqslant\kappa_0$的基数λ,$\mathscr{L}_{\omega_1\omega_1}$是$\lambda$-紧致的. 但对$\kappa_0$后面的第一个强不可达基数$\lambda_0$来说,(13)不成立. 根据本章§2的有关结果,$\lambda_0$不是弱紧致的,而且在对所有强不可达基数的枚举$e$中,$\lambda_0=e_{\kappa_0+1}$. **注意**:这个说明是由 P. Aczel 做出的.

下面我们考虑强紧致基数的一个重要特征. 前面我们已经用超积方法证明,$<\kappa$-完全的滤子的下列扩张性质

"对每一基数$\lambda\geqslant\kappa$,λ上的每一$<\kappa$-完全的非主滤子能扩张为λ上$<\kappa$-完全的非主超滤" (9.41)

蕴涵$\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$的强紧致性. 现在我们考虑这个命题的逆,据 9.3.21 的证明中类似的技巧,下一定理证明$\mathscr{L}_{\kappa\omega}$的强紧致性质蕴涵(9.41):

9.3.29 定理 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$是强紧致语言 $\Rightarrow$ (9.41).

证明:令 $\lambda\geqslant\kappa$,$\mathscr{D}$ 是 λ 上$<\kappa$-完全的非主滤子. 因为 $\mathscr{D}$ 是非主的,所以$\bigcap\mathscr{D}\notin\mathscr{D}$,特别是,$\mathscr{D}$ 是真滤. 因此我们首先来证明:

$$\bigcap\mathscr{D}=\varnothing. \tag{9.42}$$

假设$\bigcap\mathscr{D}\neq\varnothing$,定义 $\mathscr{D}_1=\mathscr{D}\cup\{\lambda-\{a\}:a\in\bigcap\mathscr{D}\}$. 下证:

$$\mathscr{D}_2\subseteq\mathscr{D}_1 \text{ 且 } |\mathscr{D}_2|<\kappa \Rightarrow \bigcap\mathscr{D}_2\neq\varnothing. \tag{9.43}$$

我们先分解 $\mathscr{D}_2$ 如下:

$$\mathscr{D}_2=(\mathscr{D}_2\cap\mathscr{D})\cup\{\lambda-\{a\}:a\in X\},$$

其中 $X\subseteq\bigcap\mathscr{D}$ 且$|X|<\kappa$. 易见

$$\bigcap\mathscr{D}_2=\bigcap(\mathscr{D}_2\cap\mathscr{D})\cap(\lambda-X).$$

因为$|\mathscr{D}_2\cap\mathscr{D}|<\kappa$ 且 $\mathscr{D}_2\cap\mathscr{D}\subseteq\mathscr{D}$,所以据 $\mathscr{D}$ 的$<\kappa$-完全性,$\bigcap(\mathscr{D}_2\cap\mathscr{D})\in\mathscr{D}$. 因为$\bigcap\mathscr{D}\notin\mathscr{D}$,所以

$$X\subseteq\bigcap\mathscr{D}\subset\bigcap(\mathscr{D}_2\cap\mathscr{D}),$$

因此$\bigcap\mathscr{D}_2\neq\varnothing$,即(9.43)成立. 据集合论的基本事实,每一这样的 $\mathscr{D}_1$ 可以扩张为 λ 上一个$<\kappa$-完全的真滤 $\mathscr{G}$,因为

$$\bigcap\mathscr{D}_1=(\bigcap\mathscr{D})\cap\bigcap_{a\in\bigcap\mathscr{D}}(\lambda-\{a\})=(\bigcap\mathscr{D})\cap(\lambda-\bigcap\mathscr{D}),$$

所以$\bigcap\mathscr{D}_1=\varnothing$. 但 $\mathscr{D}_1\subseteq\mathscr{G}$,所以$\bigcap\mathscr{G}=\varnothing$. 若 $\mathscr{G}$ 能扩张为本定理所断定的超滤,则 $\mathscr{D}$ 也能扩张为这样的超滤,由此证明了(9.42).

令 $\mathfrak{A}_\lambda$ 是 λ 上的完全结构(参见 9.3.5),我们要构造 $\mathfrak{A}_\lambda$ 的真 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$-扩张 $\mathfrak{B}$ 使得在 $\mathfrak{B}$ 中存在 $b\in\bigcap_{X\in\mathscr{D}}R_X^{\mathfrak{B}}$.

令 $\mathscr{L}=\mathrm{Sm}(\mathfrak{A}_\lambda)$,$\Sigma$ 是 $\mathscr{L}\cup\{d\}$的下列句子集,其中 d 是新个体常元:

① $\mathrm{Th}_{\kappa\omega}(\mathfrak{A}_\lambda)$,

② $R_X(d)$, 对 $X\in\mathscr{D}$.

如同 9.3.21 的证明那样,可以证明 Σ 的每一幂$<\kappa$ 的子集有模型. 据 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$的强紧致性,$\Sigma$ 有模型 $\mathfrak{B}_1$. 据句子①,

$$\mathfrak{B}=\mathfrak{B}_1\upharpoonright\mathscr{L}\equiv_{\kappa\omega}\mathfrak{A}_\lambda.$$

据句子②，$d^{\mathfrak{B}_1}\in\bigcap_{X\in\mathscr{D}}R_X^{\mathfrak{B}}$. 因为 A_λ 的每一元素在 $\mathfrak{A}_\lambda$ 中是 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$-可定义元，所以据 9.3.6(1)，不妨假设 $\mathfrak{A}_\lambda\prec_{\kappa\omega}\mathfrak{B}$. 因为 $\bigcap\mathscr{D}=\varnothing$，所以

$$b\in\bigcap_{X\in\mathscr{D}}R_X^{\mathfrak{B}}\Rightarrow b\in B-A_\lambda.$$

固定具有上述性质的 $\mathfrak{B}$ 和 b，对 $X\subseteq\lambda$，定义

$$X\in\mathscr{D}^*\Leftrightarrow b\in R_X^{\mathfrak{B}}.$$

如同 9.3.8 对(10) ⇒ (1)的证明那样，我们能证明 $\mathscr{D}^*$ 是 $<\kappa$-完全的非主超滤. **注意**：$\mathfrak{B}\supseteq\mathfrak{A}_\lambda$ 和 $b\in B-A_\lambda$ 的事实用于证明 $\mathscr{D}^*$ 是非主的，$b\in\bigcap_{X\in\mathscr{D}}R_X^{\mathfrak{B}}$ 的事实用于证明 $\mathscr{D}\subsetneq\mathscr{D}^*$. □

9.3.30 推论 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$是强紧致语言 ⇔ $\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$是强紧致语言.

证明：据 9.3.29 和 9.3.4. □

说明：强紧致基数还有许多重要性质，但其证明方法主要是集合论的，所以这里不再研究，有兴趣的读者请见 Jech 的[1978].

最后我们来考虑超紧致基数的一个重要的模型论特征.

9.3.31 定义 称基数 κ 是**超紧致基数** ⇔ 对任意 $\lambda\geqslant\kappa$，$\mathscr{P}_\kappa(\lambda)$中存在一个$<\kappa$-完全的超滤 $\mathscr{D}$ 使得

(1) 对每一 $\alpha<\lambda$，$\{s\in\mathscr{P}_\kappa(\lambda):\alpha\in s\}\subseteq\mathscr{D}$，且

(2) $\mathscr{D}$ 是**正规超滤**，即对所有 $f:\mathscr{P}_\kappa(\lambda)\to\lambda$，若$\{s\in\mathscr{P}_\kappa(\lambda):f(s)\in s\}\in\mathscr{D}$，则对某个 $\alpha<\lambda$，$\{s\in\mathscr{P}_\kappa(\lambda):f(s)\in\alpha\}\in\mathscr{D}$.

9.3.32 定义 (1) 称 $C\subseteq\mathscr{P}_\kappa(X)$是**封闭集** ⇔ 对任意$\subseteq$-链$\{s_\alpha:\alpha<\mu\}\subseteq C$(其中 $\mu<\kappa$)，$\bigcup_{\alpha<\mu}s_\alpha\in C$.

(2) 称 $C\subseteq\mathscr{P}_\kappa(X)$是**无界集** ⇔ 对任意 $s\in\mathscr{P}_\kappa(X)$，存在 $r\in C$ 使得 $s\subseteq r$.

注意：我们知道，

X 上的诸封闭无界子集能生成一$<\kappa$-完全的正规滤子.

下面我们固定 T 是 $\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$的一个理论，$\Sigma(x,y)$是 T 的一个型(这里为了简单，只考虑 2 个变元的型，但下面的结果可以概括到用 x,y 表示$<\kappa$ 个变元的型)使得在$<\kappa$ 的合取下封闭. 任给 $\Delta\subseteq$

Σ，我们用$\exists y\Delta$表示$\{\exists y\sigma:\sigma\in\Delta\}$，用$\alpha_\Delta(x)$表示

$$\bigwedge\exists y\Delta\wedge\neg\exists y\bigwedge\Delta.$$

注意：只有当$|\Sigma|<\kappa$时，$\alpha_\Delta(x)$才是$\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$的公式.

9.3.33 定理(M. Benda [1978]) 下列命题等价：

(1) κ是超紧致基数.

(2) 若T是$\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$-理论，$\Sigma(x,y)$是$T$的型使得

$$\{\Delta\in\mathscr{P}_\kappa(\Sigma):T+\exists x\alpha_\Delta(x)\text{有模型}\}\in\mathscr{P}_\kappa(\Sigma),$$

则$T+\exists x\alpha_\Sigma(x)$有模型.

证明：(1) ⇒ (2)：假设κ是超紧致的，T是$\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$-理论，$\Sigma(x,y)$是$T$的型使得

$$B=\{\Delta\in\mathscr{P}_\kappa(\Sigma):T+\exists x\alpha_\Delta(x)\text{有模型}\}\in\mathscr{P}_\kappa(\Sigma).$$

不妨假设$|\Sigma|=\lambda\geqslant\kappa$，对每一$\Delta\in B$，令$\mathfrak{A}_\Delta$是$\exists x\alpha_\Delta(x)$的模型，$\mathscr{D}$是$\mathscr{P}_\kappa(\Sigma)$上由$\kappa$的超紧致性规定的正规超滤. 据Jech的[1973]的结果，$B\in\mathscr{D}$，这使我们取下列超积有意义：

$$\mathfrak{A}=\prod_{\mathscr{D}}\langle\mathfrak{A}_\Delta:\Delta\in B\rangle=\prod_{\mathscr{D}}\mathfrak{A}_\Delta.$$

因为$\mathscr{D}$是$<\kappa$-完全的，所以$\mathfrak{A}\models T$. 令f是B上的函数：

$$f(\Delta)\in A_\Delta\text{ 使得对 }\Delta\in B,\mathfrak{A}_\Delta\models\alpha_\Delta[f(\Delta)].$$

因此对$\Delta\in B$，$\mathfrak{A}_\Delta\models\bigwedge\exists y\Delta$. 据基数$\kappa$的超紧致性，对每一$\sigma\in\Sigma$，$\{\Delta\in\mathscr{P}_\kappa(\Sigma):\sigma\in\Delta\}\in\mathscr{D}$，所以再据$\mathscr{D}$的$<\kappa$-完全性，

$$\mathfrak{A}\models\bigwedge\exists y\Sigma(x,y)[f_{\mathscr{D}}].$$

因此下面只须证：

$$\mathfrak{A}\models\neg\exists y\bigwedge\Sigma(x,y)[f_{\mathscr{D}}].\tag{9.44}$$

假设(9.44)不成立，则$\mathfrak{A}\models\exists y\bigwedge\Sigma(x,y)[f_{\mathscr{D}}]$，因此存在$g_{\mathscr{D}}$使得$\mathfrak{A}\models\bigwedge\Sigma(x,y)[f_{\mathscr{D}},g_{\mathscr{D}}]$. 因为对每一$\Delta\in B$，$\mathfrak{A}\models\alpha_\Delta[f(\Delta)]$，所以$\mathfrak{A}\models\neg\exists y\bigwedge\Delta[f(\Delta)]$，因此存在$\sigma\in\Delta$使得

$$\mathfrak{A}_\Delta\models\neg\sigma[f(\Delta),g(\Delta)].$$

我们用$h(\sigma)$来指称这样的σ，则h是B上的函数：$h(\Delta)\in\Delta$. 所以据κ的超紧致性，对某个$\sigma_0\in\Sigma$，

$$\{\Delta\in\mathscr{P}_\kappa(\Sigma):h(\Delta)=\sigma_0\}\in\mathscr{D},$$

而这意味 $\mathfrak{A}\models\neg\sigma_0[f_{\mathscr{D}},g_{\mathscr{D}}]$，与假设矛盾，所以(9.44)成立. 这样我们证明了 $\mathfrak{A}$ 是$\exists x\alpha_\Sigma(x)$的模型.

(2) ⇒ (1)：令 $\lambda\geqslant\kappa$，T 是

$$\mathfrak{A}=\langle\mathscr{P}_\kappa(\lambda)\cup\lambda,\mathscr{P}(\mathscr{P}_\kappa(\lambda)\cup\lambda),---\rangle$$

的理论，其中---表示个体域 $\mathscr{P}_\kappa(\lambda)\cup\lambda$ 上所有的元素，所有的子集和所有的二元关系. 令 $\Sigma(x,y)$是型

$$\{U(x)\wedge\alpha\in x\wedge y\in x\wedge\neg(y\equiv\alpha):\alpha<\lambda\},$$

其中 U 是指称 $\mathscr{P}_\kappa(\lambda)$的一元谓词，$\alpha<\lambda$ 自指. **注意**：Σ 的元素都是有穷公式. 任给 $\Delta\subseteq\Sigma$ 使得 $1<|\Delta|<\kappa$，显然

$$\mathfrak{A}\models\alpha_\Delta(x)[\{\alpha<\lambda:\alpha\text{ 在 }\Delta\text{ 中出现}\}],$$

所以 $\mathfrak{A}\models T\cup\{\exists x\alpha_\Delta(x)\}$. 因为这些 Δ 构成的集合在 $\mathscr{P}_\kappa(\Sigma)$中是封闭且无界的，所以该集合是 $\mathscr{P}_\kappa(\Sigma)$的元素. 因此据(2)，我们得到 $T+\exists x\alpha_\Sigma(x)$的模型 $\mathfrak{C}$. 不妨假设 $\mathfrak{A}\prec_{\infty}\mathfrak{C}$. 令 $a\in C$ 使得 $\mathfrak{C}\models\alpha_\Sigma[a]$，且定义

$$\mathscr{D}=\{X\subseteq\mathscr{P}_\kappa(\lambda):\mathfrak{C}\models\overline{X}[a]\},$$

其中 $\overline{X}$ 是指称 X 的一元谓词. 据 $\mathfrak{A}\prec_{\infty}\mathfrak{C}$，易证 $\mathscr{D}$ 是$<\kappa$-完全的超滤. 因为 $a\in\{x:\mathfrak{C}\models a\in x\}$，所以$\{s\in\mathscr{P}_\kappa(\lambda):\alpha\in s\}\in\mathscr{D}$. 下证 $\mathscr{D}$ 是正规的：令 $f:\mathscr{P}_\kappa(\lambda)\to\lambda$ 使$\{s\in\mathscr{P}_\kappa(\lambda):f(s)\in s\}\in\mathscr{D}$. 据 $\mathscr{D}$ 的定义，$\mathfrak{C}\models\overline{f}(a)\in a$，其中 $\overline{f}$ 指称 f. 因为型$\{y\in a\wedge\neg(y\equiv\alpha):\alpha<\lambda\}$ 在 $\mathfrak{C}$ 中被省略，即 $\mathfrak{C}$ 中没有元素满足该型，所以对某个 $\alpha<\lambda$，$\mathfrak{C}\models\overline{f}(a)\equiv\alpha$，因此$\{s\in\mathscr{P}_\kappa(\lambda):f(s)=\alpha\}\in\mathscr{D}$. □

说明：上述定理的(2)也被称为省略型的超紧致性质，因为若

$$\exists x\alpha_\Sigma(x)=\exists x[\bigwedge\exists y\Sigma\wedge\neg\exists y\bigwedge\Sigma]$$

在 $\mathfrak{A}$ 中成立，则存在 $a\in A$ 使得 $\mathfrak{A}\models\exists y\Sigma(x,y)[a]$，这说明 a 实现 Σ 在 a 上的投影. 又因为 $\mathfrak{A}\models\neg\exists y\Sigma(x,y)[a]$，所以一个变元 y 的型 $\Sigma(c_a,y)$被省略.

9.3.34 反例　ω 不是超紧致的.

证明：令

$$\Sigma(x,y)=\{m<x\wedge\neg(y\equiv m)\wedge y<x:m<\omega\},$$

则 Σ 是Th$(\langle\omega,<\rangle)$的型．对每一有穷 $\Delta\subseteq\Sigma$ 使得 $|\Delta|>1$，因为线序初等等价 $\langle\omega,<\rangle$，所以 $\exists x\alpha_{\Delta}(x)$ 有模型但 $\exists x\alpha_{\Sigma}(x)$ 没有模型．据 9.3.33，ω 不是超紧致的．□

练　习

9.3.35　令 $\kappa>\omega$ 是强紧致基数，则对每一对序数 α,β 使得 $\beta>0$，存在传递集 M 和初等嵌入

$$f:\langle\mathbf{R}(\kappa+\beta),\in\restriction\mathbf{R}(\kappa+\beta)\rangle\to\langle M,\in\restriction M\rangle$$

使得对所有 $\xi<\kappa$，$f(\xi)=\xi$ 但 $f(\kappa)>\kappa$.

［提示：论证如 9.3.20 的证明.］

9.3.36　称基数 κ 上的 $<\kappa$-完全的非主超滤 $\mathscr{D}$ 是正规的（正规超滤的另一种表述）$\Leftrightarrow$ 若 $f\in\kappa^{\kappa}$ 且 $\{\alpha<\kappa:f(\alpha)<\alpha\}\in\mathscr{D}$，则

$$f^{-1}[\alpha]\in\mathscr{D},\quad \text{对某个 } \alpha<\kappa.$$

(1) 令 $\mathscr{D}$ 是基数 κ 上的 $<\kappa$-完全的非主超滤．证明 $\mathscr{D}$ 是正规的 $\Leftrightarrow$ 对某个传递集 M 使得 $\kappa\subseteq M$，$\mathrm{id}_{\mathscr{D}}$ 在 $\prod_{\mathscr{D}}\langle M,\in\restriction M\rangle$ 中是“第 κ 个序数”，其中 id 是 κ 上的恒等函数.

(2) 令 f 是从 $\langle\mathbf{R}(\alpha),\in\restriction\mathbf{R}(\alpha)\rangle$ 到传递结构 $\langle M,\in\restriction M\rangle$ 中移动序数的初等嵌入（即 f 对序数不是恒等函数），令 κ 是第一个被 f 移动的序数（参见 9.3.8(11)）．证明：

$$\{x\subseteq\kappa:\kappa\in f(x)\}\text{是 }\kappa\text{ 上的正规超滤}.$$

(3) 令 $\mathscr{D}$ 是 κ 上的正规超滤，M 是传递集使得 $\mathbf{R}(\kappa+1)\subseteq M$．令 f 从 $\langle M,\in\restriction M\rangle$ 到同构于超幂 $\prod_{\mathscr{D}}\langle M,\in\restriction M\rangle$ 的传递结构中的典范初等嵌入．证明：$\mathscr{D}=\{x\subseteq\kappa:\kappa\in f(x)\}$.

［提示：用(2)证明 $\mathscr{D}\subseteq\{x\subseteq\kappa:\kappa\in f(x)\}$.］

9.3.37　证明有关弱紧致基数的(5) $\Rightarrow$ (10)，(1) $\Rightarrow$ (13).

第10章 可容集的 Σ_1-紧致性

从第9章§1—§2,我们已知绝大多数无穷语言在经典集合论的背景下失去了普通紧致性($\mathscr{L}_{\omega\omega}$-紧致性的自然概括). 本章我们要以可容集合论 **KPU** 为背景,研究一种受限制的紧致性——Σ_1-紧致性(亦称 Barwise-紧致性),我们将看到这种紧致性是普通紧致性的最好替代物. 在第4章证明 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$-可数片段的完全性时,我们已经证明了所有的可数可容集 $\mathfrak{M}$,也即所有的可数可容片段 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$,是 Σ_1-紧致的. 本章就是要进一步研究是否存在不可数的 Σ_1-紧致可容集和可容片段,以及它们的构造和特性(如果它们存在的话).

本章§1主要证明可容集 $\mathfrak{M}$(从而 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$)有 Σ_1-紧致性的充分必要条件是 $\mathfrak{M}$ 满足 s-Π_1^1-自返原则.

§2讨论树与共尾度为 ω 的 Σ_1-紧致集的密切关系.

§3讨论共尾度大于 ω 的 Σ_1-紧致集.

§4讨论弱紧致性和 Σ_1-紧致性的关系. 这里的结果类似第9章§3的结果,但这是在可容集合论中讨论的,所以无论从表述上还是从证明的方法上都有许多令人感兴趣的东西.

本章§1—§4的工作主要来自 Barwise 的[1975].

§5我们讨论比 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 更强的语言 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M},B}$和 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$(WF)中的 Σ_1-紧致性,这部分工作主要来自 N. J. Cutland 的[1978]. 在本节我们主要要建立 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M},B}$是 Σ_1-紧致性的充分条件以及在某些场合的必要条件,还要讨论与 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$(WF)的 Σ_1-紧致性等价的自返原则.

§1 s-Π_1^1-自返原则与 Σ_1-紧致性

我们先定义 s-Π_1^1(strict-Π_1^1)-句子，然后考察 s-Π_1^1-自返原则的性质及其与 Σ_1-紧致性的关系.

令 $\mathscr{L}^*=\mathscr{L}\cup\{\in,\cdots\}$是适于 **KPU** 的语言. 这里假设 $\mathscr{L}^*$ 中只有关系符号和个体常元符号(**注意**:这里没有函数符号并不是本质的，只是为了方便，但要注意若按照标准的处理方法把函数看作是关系符号，则 Δ_0-公式会变形为 Σ-公式和 Π-公式，而不必然变形为 Δ_0-公式，因此 Σ_1-公式也变形为 Σ-公式). 令 $\vec{R}$ 指称无穷多个新关系符号的集合$\{R_i^j:i,j<\omega$ 且 j 表示 R_i^j 的元数$\}$，$\mathscr{L}^*(\vec{R})$表示

$$\mathscr{L}^*(\vec{R})=\mathscr{L}^*\cup\{\vec{R}\}.$$

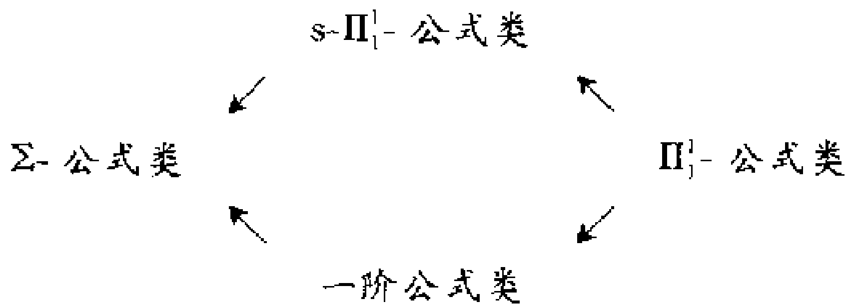
10.1.1 定义 (1) $\mathscr{L}^*(\vec{R})$的 **s-Π_1^1-公式**类是包含 $\mathscr{L}^*(\vec{R})$的 Δ_0-公式且在有穷合取 $\wedge$，有穷析取 $\vee$，$\exists u$，$\forall R_i$，$\forall u\in v$ 和$\exists u\in v$ 下封闭的最小公式类. $\mathscr{L}^*$ 的 s-Π_1^1-公式类由那些新关系符号 $\vec{R}$ 只有全称量化出现的 $\mathscr{L}^*(\vec{R})$的 s-Π_1^1-公式组成.

(2) **s-Σ_1^1-公式**类是包含 $\mathscr{L}^*(\vec{R})$的 Δ_0-公式且在有穷合取 $\wedge$，有穷析取 $\vee$，$\forall u$，$\exists R_i$，$\forall u\in v$ 和$\exists u\in v$ 下封闭的最小公式类.

注意:(Ⅰ) 在 s-Π_1^1-公式的定义中有两个本质的限制.

第一，在个体变元上不允许无界的全称量词.

第二，只允许对关系符号使用全称二阶量词. 因此下列公式类之间有真包含关系:其中 $\mathscr{A}\to\mathscr{B}$ 表示 $\mathscr{A}\supset\mathscr{B}$



（Ⅰ）$\mathscr{L}^*$ 中可以有其它关系符号，它们允许在 Δ_0-公式中出现，因此也就允许在 s-Π_1^1-公式中出现.

（Ⅱ）本章我们用 $\Phi,\Psi,\cdots$ 表示 s-Π_1^1-公式.

s-Π_1^1-公式和 s-Σ_1^1-公式的可满足关系用经典二阶方法来定义：若 $f\in A^{\mathrm{Fv}(\Phi)}$，则

$$\mathfrak{A}\models\forall R^n\Phi[f]\Leftrightarrow \text{对所有 } R\subseteq A^n,(\mathfrak{A},R)\models\Phi[f].$$

下面引理表述了 s-Π_1^1-公式最重要的性质之一.

（为了简便，我们以后用 $\vec{R}_m$ 表示 $R_1,\cdots,R_m$.）

10.1.2 引理(s-Π_1^1-公式在终端扩张下向上保持)

若 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}},\mathfrak{N}_{\mathfrak{B}}$ 是 $\mathscr{L}^*$ 的结构使得 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}\subseteq_{\text{end}}\mathfrak{N}_{\mathfrak{B}}$ 且 $\Phi(\vec{v}_n)$ 是 $\mathscr{L}^*$ 的 s-Π_1^1-公式，则对所有 $\vec{x}_n\in\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$，

$$\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}\models\Phi[\vec{x}_n]\Rightarrow\mathfrak{N}_{\mathfrak{B}}\models\Phi[\vec{x}_n].$$

证明：我们需要证明更强一些的结果以便施归纳于 s-Π_1^1-公式. 给定 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}\subseteq_{\text{end}}\mathfrak{N}_{\mathfrak{B}}$，施归纳于 $\mathscr{L}^*(\vec{R})$的 s-Π_1^1-公式$\Phi(\vec{R}_m,\vec{v}_n)$，我们要证对 $\mathfrak{N}_{\mathfrak{B}}$ 上所有关系 $\vec{R}_m$ 和所有 $\vec{x}_n\in\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$，

$$(\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}},R_1\restriction\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}},\cdots,R_m\restriction\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}})\models\Phi[\vec{x}_n]$$
$$\Rightarrow(\mathfrak{N}_{\mathfrak{B}},R_1,\cdots,R_m)\models\Phi[\vec{x}_n].$$

因为 Σ-公式的保持性证明已在第 0 章中给出，所以在此只需考虑 $\forall S$ 的情况. 假设

$$(\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}},R_1\restriction\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}},\cdots,R_m\restriction\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}})\models\forall S(\Psi(\vec{x}_n,\vec{R}_m,S)).\qquad(10.1)$$

令 S 是 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 上有适当元数的关系，据(10.1)，有

$$(\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}},R_1\restriction\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}},\cdots,R_m\restriction\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}},S\restriction\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}})\models\Psi(\vec{x}_n,\vec{R}_m,S),$$

据归纳假设，有

$$(\mathfrak{N}_{\mathfrak{B}},R_1,\cdots,R_m,S)\models\Psi(\vec{x}_n,\vec{R}_m,S),$$

因此，

$$(\mathfrak{N}_{\mathfrak{B}},R_1,\cdots,R_m)\models\forall S(\Psi(\vec{x}_n,\vec{R}_m)).\ \square$$

令 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 是 $\mathscr{L}^*$ 的结构. 我们称 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 上的关系 P 是 **s-Π_1^1** $\Leftrightarrow P$ 可以用参数来自 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 的一个($\mathscr{L}^*$ 的)s-Π_1^1-公式来定义.

称关系 P 是 s-Σ_1^1 $\Leftrightarrow$ P 可以用参数来自 $\mathfrak{M}_\mathfrak{A}$ 的一个 s-Σ_1^1-公式来定义.

称 P 是 s-Δ_1^1 $\Leftrightarrow$ P 是 s-Π_1^1 和 s-Σ_1^1.

称一函数是 s-Π_1^1, s-Σ_1^1 或 s-Δ_1^1 $\Leftrightarrow$ 它们的图形分别是 s-Π_1^1, s-Σ_1^1或 s-Δ_1^1.

10.1.3 引理 若 $\mathfrak{M}_\mathfrak{A}$ 上全函数 f 是 s-Π_1^1,则 f 是 s-Δ_1^1-函数.

证明:因为 f 是全函数,所以

$$f(\vec{x}_n)\neq y \Leftrightarrow \exists z[f(\vec{x}_n)=z\wedge z\neq y].$$

用 $f(\vec{x}_n)=z$ 的 s-Π_1^1-定义置换 $f(\vec{x}_n)=z$,我们就有 $f(\vec{x}_n)\neq y$ 的 s-Π_1^1-定义. 换句话说,也就有 f 的图形的 s-Π_1^1-定义. 在上述等价式两边加上否定号,就有等价 $f(\vec{x}_n)=y$ 的 s-Π_1^1-公式. □

10.1.4 例 令 $\mathfrak{M}$ 是可容集,我们给出三个在一般情况下不是 Σ_1 的 s-Π_1^1-谓词 P(**注意**:若 $\mathfrak{M}$ 是可数的,则 P 是 Σ_1).

(1) 定义 $P(a,b) \Leftrightarrow |a|<|b|$,则 P 是 $\mathfrak{M}$ 上的 s-Π_1^1.

(2) 定义 $P(a) \Leftrightarrow |a|<|M|$,则 P 是 $\mathfrak{M}$ 上的 s-Π_1^1.

(3) 定义 $P(a,b) \Leftrightarrow b=\text{Power}(a)$,其中 Power$(a)$表示 a 的实幂集(real power set),则 P 是 $\mathfrak{M}$ 上的 s-Π_1^1. 若 $\mathfrak{M}$ 在幂集运算下封闭,则 P 是 $\mathfrak{M}$ 上的 s-Δ_1^1.

证:(1) 我们把$|a|<|b|$写作:

$$\forall R[R\subseteq b\times a\wedge\forall x\in b\exists y\in aR(x,y)$$
$$\rightarrow\exists xz\in b\exists y\in a(x\neq z\wedge R(x,y)\wedge R(z,y))],$$

它断定 $b\times a$ 上没有一个关系能把 b 单射到 a 中. 我们也可以把上式改写为下列模式:

$$\forall R[\Pi_1(R)\wedge\Delta_0(R)\rightarrow\Delta_0(R)].$$

用 $\vee$ 置换$\rightarrow$,有

$$\forall R[\Sigma_1(R)\vee\Delta_0(R)\vee\Delta_0(R)],$$

显然,这是 s-Π_1^1-公式.

(2) 与(1)的证明类似.

(3) 因为 $b=\text{Power}(a) \Leftrightarrow$

$$\forall x\in b(x\subseteq a)\wedge\forall R\exists y\in b\forall x\in a[x\in y\leftrightarrow R(x)].$$

(3)中的第二个句子可以从 10. 1. 3 推出. □

我们称公式 φ 是 **s-Π_1^1-范式** $\Leftrightarrow$ φ 形如

$$\forall R\exists\vec{y}_m\psi(\vec{v}_n,\vec{y}_m,R),$$

其中 ψ 是 Δ_0. 相应地,我们可以定义 s-Σ_1^1-范式.

下面的引理说明每一 s-Π_1^1-公式逻辑等价一 s-Π_1^1-范式.

10. 1. 5 s-Π_1^1-范式引理 设 $\mathscr{L}^*$ 有个体常元符号 0,对 $\mathscr{L}^*(\vec{R})$ 的每一 s-Π_1^1-公式 $\Phi(\vec{x}_n,\vec{R}_m)$,存在 s-$\Pi_1^1$-范式 Φ_1 使得 Φ_1 有与 Φ 相同的自由个体变元和自由关系符号且对所有 $\mathscr{L}^*$-结构 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$:

$$\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}\models\forall\vec{R}_m\forall\vec{x}_n[\Phi(\vec{x}_n,\vec{R}_m)\leftrightarrow\Phi_1(\vec{x}_n,\vec{R}_m)]. \tag{10.2}$$

证明:施归纳于 $\Phi(\vec{x}_n,\vec{R}_m)$ 的复杂度. 为此只须在下列 5 种情况下,用外移关系量词的方法把 s-Π_1^1-公式变成 s-Π_1^1-范式.

(1) $\forall R_1\forall R_2[\Phi(R_1,R_2)]\leftrightarrow\forall S[\Phi_1(S)]$,

其中 R_1 的元数为 n,R_2 的元数为 m,S 的元数为 $n+m$,Φ_1 是从 Φ 通过下列置换得到的公式:

用 $S(\vec{t}_n,0,\cdots,0)$ 置换 $R_1(\vec{t}_n)$,

用 $S(0,\cdots,0,\vec{t}_m)$ 置换 $R_2(\vec{t}_m)$.

(2) $\forall R_1\exists\vec{x}_n\varphi\wedge\forall R_2\exists\vec{y}_m\psi\leftrightarrow\forall R_1\forall R_2\exists\vec{x}_n\exists\vec{y}_m(\varphi\wedge\psi)$,

其中各种符号互不相同. 对 $\vee$ 也类似处理.

(3) $\forall x\exists R[\Phi(x,R)]\leftrightarrow\exists R'\forall x[\Phi_1(x,R')]$,

其中 Φ_1 是从 Φ 通过用 $R'(x,\vec{t}_n)$ 置换 $R(\vec{t}_n)$ 得到的公式. 在(3)两边加上否定号再变形,有

(4) $\exists x\forall R[\Phi(x,R)]\leftrightarrow\forall R'\exists x[\Phi_1(x,R')]$.

式(4)允许我们以某种方式把 $\forall R$ 移到 $\exists x$ 前面. 有界存在量词的情况从(2)和(4)得到,因此下面只须考虑有界全称量词的情况.

(5) $\forall x\in a\forall R\exists y[\Phi(x,R,y)]$

$$\leftrightarrow\forall U\forall R\exists y[|a\cap U|\leqslant 1\to\forall x\in a(U(x)\to\Phi(x,R,y))].$$

上式第二个方括号中的公式是Δ_0-公式，因为它可以写作：

$$\forall x\in a\forall z\in a[U(x)\wedge U(z)\to z=x]$$

$$\to\forall x\in a[U(x)\to\Phi(x,R,y)].\quad\square$$

10.1.6 推论 假设$\mathscr{L}^*$有个体常元符号0，对$\mathscr{L}^*(\vec{R})$的每一s-Σ_1^1-公式$\Phi(\vec{x}_n,\vec{R}_m)$，存在一s-$\Sigma_1^1$-范式$\Phi_1$使得$\Phi_1$有与$\Phi$相同的自由个体变元和自由关系符号且对$\mathscr{L}^*$的所有结构$\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$：

$$\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}\models\forall\vec{R}_m\forall\vec{x}_n[\Phi(\vec{x}_n,\vec{R}_m)\leftrightarrow\Phi_1(\vec{x}_n,\vec{R}_m)].\tag{10.3}$$

证明：据10.1.5证明的对偶形式. $\square$

10.1.7 定义(König-第一原则) 令$\mathfrak{M}$是可容集，称$\mathfrak{M}$满足s-$\Pi_1^1=\Sigma_1\Leftrightarrow\mathfrak{M}$上每一s-$\Pi_1^1$-关系是$\mathfrak{M}$上的$\Sigma_1$-关系.

10.1.8 定义 我们称可容集$\mathfrak{M}$是**Σ_1-完全可容集**$\Leftrightarrow$对$\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$的每一$\Sigma_1$-理论$T$，$T$的语义后承集$\mathrm{Cn}(T)=\{\varphi\in\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}:T\models\varphi\}$是$\mathfrak{M}$上的$\Sigma_1$.

10.1.9 引理 每一Σ_1-完全可容集满足s-$\Pi_1^1=\Sigma_1$.

证明：令P是$\mathfrak{M}$上的s-Π_1^1. 据s-Π_1^1-范式引理，我们可以把P写作：

$$P(x)\Leftrightarrow\mathfrak{M}\models\forall R\varphi(x,R),$$

其中φ是某个Σ_1-公式. 令T是下列句子组成的$\mathfrak{M}$的$\mathscr{L}_{\infty\omega}$-**图象**：

① $\mathrm{Th}_{\infty\omega}(\mathfrak{M})$，

② $\forall v[v\in\bar{a}\to\bigvee_{x\in a}v\equiv\bar{x}]$.

据10.1.2，s-Π_1^1-公式在终端扩张下向上保持，所以

$$\begin{aligned}P(x)&\Leftrightarrow\mathfrak{M}\models\forall R\varphi(R,x),\\&\Leftrightarrow\mathfrak{N}\models\forall R\varphi(R,x),\quad\text{对所有 }\mathfrak{N}\supseteq_{\mathrm{end}}\mathfrak{M}.\\&\Leftrightarrow(\mathfrak{N},R)\models\varphi(R,x),\quad\text{对所有 }\mathfrak{N}\supseteq_{\mathrm{end}}\mathfrak{M}\text{ 和 }R\subseteq N^n.\\&\Leftrightarrow T\models\varphi(R,x).\end{aligned}$$

最后一个等价式成立是因为T的任意模型总是$\mathfrak{M}$的某个终端扩张. 若$\mathfrak{M}$是Σ_1-完全的，则$\{\varphi\in\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}:T\models\varphi\}$是$\mathfrak{M}$上的$\Sigma_1$-集合，因此$P(x)$可以用参数来自$\mathfrak{M}$的$\Sigma_1$-公式$\varphi$来定义，即$P$是$\mathfrak{M}$上的

Σ_1-关系. □

10.1.10 推论 每一可数可容集满足 s-$\Pi_1^1=\Sigma_1$.

证明:据 10.1.9 和 4.3.13. □

下面我们把第 0 章给出的相对化公式的概念扩大到二阶公式,即对二阶公式 Φ,定义相对 a 的公式 $\Phi^{(a)}$ 如下:

对 Φ 中所有无界的一阶量词,如通常处理(即用 $\exists u\in a$ 来置换 $\exists u$,用 $\forall u\in a$ 来置换 $\forall u$). 对关系量词,我们进行如下置换:

$$\text{用}\exists R[R\subseteq a^n\wedge(\cdots)]\text{置换}\exists R(\cdots),$$

$$\text{用}\forall R[R\subseteq a^n\to(\cdots)]\text{置换}\forall R(\cdots),$$

其中 R 是 n 元关系符号.

注意:若 Φ 是 s-Π_1^1-公式(甚至是 Π_1^1-公式),则 $\Phi^{(a)}$ 是含有 Φ 的所有自由变元和新变元 a 的 s-Π_1^1-公式.

10.1.11 引理 对 $\mathscr{L}^*$ 的每一结构 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 和每一 s-Π_1^1-公式 $\Phi(\vec{v}_n)$,下列公式在 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 中成立:

(1) $\forall a\forall\vec{v}_n\in a[\mathrm{Tran}(a)\wedge\Phi(\vec{v}_n)^{(a)}\to\Phi(\vec{v}_n)]$,

(2) $\forall ab\forall\vec{v}_n\in a[\mathrm{Tran}(a)\wedge a\subseteq b\wedge\Phi(\vec{v}_n)^{(b)}\to\Phi(\vec{v}_n)]$.

证明:这就是 s-Π_1^1-公式在终端扩张下向上保持的另一种表述形式. 据 10.1.2,立得本引理. □

10.1.12 定义(König-第二原则) 称可容集 $\mathfrak{M}$ 满足 s-Π_1^1-**自返原则** $\Leftrightarrow$ 对每一 s-Π_1^1-公式 $\Phi(\vec{v}_n)$和每一 $\vec{x}_n\in\mathfrak{M}$,

$$\mathfrak{M}\models\Phi(\vec{x}_n)\to\exists a[\mathrm{Tran}(a)\wedge\vec{x}_n\in a\wedge\Phi(\vec{x}_n)^{(a)}].$$

10.1.13 定义 我们称可容集 $\mathfrak{M}$ 是 **Σ_1-紧致可容集** $\Leftrightarrow$ 对每一可容片段 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 和 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的每一 Σ_1-理论 T,若 T 的每一是 $\mathfrak{M}$ 的元素的子集 T_0(即 $T_0\subseteq T$ 且 $T_0\in\mathfrak{M}$)有模型,则 T 有模型.

说明:Σ_1-紧致性亦称 Barwise-紧致性,以纪念 Barwise 在这个方面的首创工作. 据 4.3.12 的 Barwise-紧致性定理,所有的可数可容集都是 Σ_1-紧致的. 本章就是要研究是否存在不可数又是 Σ_1-紧致的可容集,以及它们的构造与特性(若它们存在的话).

10.1.14 定理

若可容集 $\mathfrak{M}$ 是 Σ_1-紧致的，则 $\mathfrak{M}$ 满足 s-Π_1^1-自返原则.

证明：令 $\Phi(\vec{v}_n)$是 s-Π_1^1-公式，据 10.1.5，存在与 Φ 逻辑等价的 s-Π_1^1-范式 $\Psi(\vec{v}_n)$. 因此 $\Psi(\vec{v}_n)^{(a)}$ 逻辑等价 $\Phi(\vec{v}_n)^{(a)}$，所以只须证 s-Π_1^1-范式满足 s-Π_1^1-自返原则：

假设 $\Phi(\vec{v}_n)$形如$\forall R\varphi(\vec{v}_n,R)$，$\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_{\mathbb{X}}$ 且 $\mathfrak{M}\models\forall R\varphi(\vec{x}_n,R)$，其中 φ 是 Σ_1-公式，$\vec{x}_n\in\mathfrak{M}$. 如 10.1.9 那样，令 T 是 $\mathfrak{M}$ 的 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$-图象. 正如在 10.1.9 的证明中看到的那样，我们有 $T\models\varphi(\vec{x}_n,R)$. 据 Σ_1-紧致性，存在 $T_0\subseteq T$ 使得 $T_0\in\mathfrak{M}$ 且 $T_0\models\varphi(\vec{x}_n,R)$.

令 $a_0=\{y:\bar{y}$ 在 T_0 中出现$\}\cup\{\vec{x}_n\}$，$a=\mathrm{TC}(a_0)$使得 $a\in\mathfrak{M}$，则

$$(\mathfrak{M}\cap a;\ a,\in,\cdots)\models T_0,$$

所以 $$(\mathfrak{M}\cap a;\ a,\in,\cdots)\models\forall R\varphi(\vec{x}_n,R).$$

这就是用另一种方式述说 $\Phi^{(a)}$相对 $\mathfrak{M}$ 的 $\vec{x}_n$ 成立. □

10.1.15 推论 每一可数可容集满足 s-Π_1^1-自返原则.

证明：据 4.3.12 和 10.1.14. □

10.1.16 引理 令 $\mathfrak{M}$ 是可容集，$\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是 Skolem-片段使得 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是 $\mathfrak{M}$ 上的 Δ_1（在 8.1.13 意义上），则存在一个 Π-句子 $\varphi(D)$ 使得对任意 $D\subseteq\mathfrak{M}$：

$$D \text{ 是 } \mathscr{L}_{\mathfrak{M}} \text{ 的超有效性质} \Leftrightarrow (\mathfrak{M},D)\models\varphi(D).$$

证明：因为 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是 $\mathfrak{M}$ 上的 Δ_1，所以 $T_{\mathrm{Skolem}}\subseteq\mathfrak{M}$ 且 T_{Skolem} 是 $\mathfrak{M}$ 上的 Δ_1，因此

D 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的超有效性质 $\Leftrightarrow$ $(\mathfrak{M},D)$满足下列所有条件：

$D\subseteq\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$，

$T_{\mathrm{Skolem}}\subseteq D$，

$\forall\psi[\psi$ 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的公理 $i\to\psi\in D]$，　其中 $i=1,\cdots,6$，

D 在推理规则 j 下封闭，　其中 $j=1,2,3$，

$\forall\psi[\psi\in D\to\neg\psi\notin D]$，

$\forall\Phi[\bigvee\Phi\in D\wedge(\bigvee\Phi$ 是句子$)\to\exists\psi\in\Phi(\psi\in D)]$.

上述每一条件可以用一 Π-句子 $\theta(D)$ 来表述，其中 D 指称D. 显然，这样的句子的合取仍是一个 Π-句子，因此本引理得证. □

注意：这里 Skolem-片段起本质的作用. 若我们不得不去掉“$T_{\text{Skolem-}}\subseteq$D”的条件，则必须加上下列条件：

$$\forall x[x=\phi(v)\wedge\exists v\phi(v)\in \mathrm{D}\to\exists t(\phi(v/t)\in \mathrm{D})].$$

但由于$\exists t$ 不是有界量词，所以该公式不是 Π-公式.

10.1.17 定理 令 $\mathfrak{M}$ 是可容集，T 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的句子集使得 T 是 $\mathfrak{M}$ 上的 s-Π_1^1，则 $\mathrm{Cn}(T)=\{\varphi\in\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}:T\vdash\varphi\}$ 也是 $\mathfrak{M}$ 上的 s-Π_1^1.

证明：据 8.1.13，不妨假设 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是 Skolem-片段且是 $\mathfrak{M}$ 上的 Δ_1，T 的每一模型可以膨胀为一 Skolem-模型. 据弱完全性定理 8.1.17(2)，我们有 $T\vdash\varphi\Leftrightarrow$

$$\forall \mathrm{D}[\mathrm{D}\text{ 是 }\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}\text{ 的超有效性质}\wedge T\subseteq \mathrm{D}\to\varphi\in \mathrm{D}].$$

据 10.1.16，上式可变形为

$$\forall \mathrm{D}[\Pi(\mathrm{D})\wedge\forall x[\Phi(x)\to x\in \mathrm{D}]\to\varphi\in \mathrm{D}], \qquad (10.4)$$

其中 $\Phi(v)$ 定义了 s-Π_1^1-理论 T. 因为 $\Pi(\mathrm{D})\wedge\forall x[\neg\Phi(x)\vee x\in \mathrm{D}]$ 是 s-Σ_1^1-公式，因此它的否定是 s-Π_1^1-公式，所以(10.4)是 φ 的 s-Π_1^1-谓词，因此 $\mathrm{Cn}(T)$ 也是 $\mathfrak{M}$ 上的 s-Π_1^1. □

10.1.18 推论 (1) 令 $\mathfrak{M}$ 是可容集，则

$$\mathfrak{M}\text{ 满足 s-}\Pi_1^1=\Sigma_1\Leftrightarrow\mathfrak{M}\text{ 是 }\Sigma_1\text{-完全的}.$$

(2) 可容片段 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的有效句子集是 $\mathfrak{M}$ 上的 s-Π_1^1.

证明：(1) 据 10.1.17 和 10.1.9.

(2) 在 10.1.17 中令 $T=\varnothing$. □

10.1.19 定义 令 $\mathfrak{M}$ 是可容集，R 是 $\mathfrak{M}$ 上的关系，

(1) R 是 **$\mathfrak{M}$-递归枚举关系** $\Leftrightarrow$ R 是 $\mathfrak{M}$ 上的 Σ_1.

(2) R 是 **$\mathfrak{M}$-递归关系** $\Leftrightarrow$ R 是 $\mathfrak{M}$ 上的 Δ_1.

(3) R 是 **$\mathfrak{M}$-有穷关系** $\Leftrightarrow$ $R\in\mathfrak{M}$.

(4) 假设函数 f 的定义域和值域都是 $\mathfrak{M}$ 的子集，定义

f 是 **$\mathfrak{M}$-递归函数** $\Leftrightarrow$ f 的图形是 $\mathfrak{M}$-递归的.

(5) 集合 X 是 **$\mathfrak{M}$-递归集** $\Leftrightarrow$ X 可用 R 来刻画使得 R 是 $\mathfrak{M}$ 上的 Δ_1.

令 $\mathfrak{M}=\mathbf{L}(\alpha)$(参见 0.8.5),则我们分别把上述定义称为 **α-递归枚举**的,**α-递归**的,**α-有穷**的.

象在普通的 ω-递归论中那样,一个 $\mathfrak{M}$-递归的全函数有一个 $\mathfrak{M}$-递归的图形.

我们称 $X\subseteq\mathfrak{M}$ 对可容集 $\mathfrak{M}$ 是 **Σ_1-完全集**(或 **s-Π_1^1-完全集**) $\Leftrightarrow$ X 是 Σ_1(或 s-Π_1^1)且对 $\mathfrak{M}$ 上的任何其它 Σ_1-集(或 s-Π_1^1-集)Y,存在一对一的 $\mathfrak{M}$-递归函数 F 使得对所有 $y\in\mathfrak{M}$,

$$y\in Y \Leftrightarrow F(y)\in X.$$

10.1.20 推论 令 $\mathfrak{M}$ 是可容集,$\mathscr{L}'\supseteq\mathscr{L}^{*}\cup\{\bar{x}:x\in\mathfrak{M}\}$,$\mathscr{L}'_{\mathfrak{M}}$ 是由 $\mathfrak{M}$ 给定的可容片段,T 是 $\mathfrak{M}$ 的 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$-图象.

(1) $X_0=\{\varphi\in\mathscr{L}'_{\mathfrak{M}}:T\vdash\varphi\}$对 $\mathfrak{M}$ 是 Σ_1-完全集.

(2) $X_1=\{\varphi\in\mathscr{L}'_{\mathfrak{M}}:T\models\varphi\}$对 $\mathfrak{M}$ 是 s-Π_1^1-完全集.

证明:(1)可从(2)直接得到.

证(2):据 10.1.17,X_1 是 s-Π_1^1,而据 10.1.9 的证明,每一 s-Π_1^1-集可以一对一地化归为 X_1. □

在证明本章的主定理之前,我们还需要下列定义和引理:

10.1.21 定义 (1) 令 $\mathfrak{M}$ 是可容集,称 $\mathfrak{M}$ **自我定义**(self-definable) $\Leftrightarrow$ 对某个 $\mathscr{L}\supseteq\mathrm{Sm}(\mathfrak{M})$,存在 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的 Σ_1-理论 T 使得:

① $\mathfrak{M}$ 的某个对 $\mathscr{L}$ 膨胀的结构$(\mathfrak{M},\cdots)$是 T 的模型,

② 若$(\mathfrak{N},\cdots)$是 T 的任意模型,则 $\mathfrak{N}\cong\mathfrak{M}$.

这样的 T 称为自我定义 $\mathfrak{M}$.

(2) 若 T 能选择为 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的一单句 σ,则 $\mathfrak{M}$ 称为**强自我定义**.

这样的 σ 称为强自我定义 $\mathfrak{M}$.

10.1.22 引理 $\mathfrak{M}$ 是 Σ_1-紧致的 $\Rightarrow$ $\mathfrak{M}$ 不是自我定义的. □

10.1.23 例 对所有 $\alpha\geqslant0$,$\mathbf{H}(\aleph_{\alpha+1})$是自我定义的.

证明:令 $M=\mathbf{H}(\aleph_{\alpha+1})$,$T$ 是下列句子构成的理论:

(1) **KP**,

(2) $\forall x[x\in\bar{a}\leftrightarrow\bigvee_{b\in a}x\equiv\bar{b}]$, 对所有 $a\in M$,

(3) $\forall x\exists\beta\exists f[\beta\leqslant\bar{\omega}_\alpha\wedge f:\mathrm{TC}(x)\twoheadrightarrow\beta$ 是双射$]$.

则对语言 $\mathscr{L}=\{\bar{a}:a\in M\}$,$T$ 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的 Σ_1-理论. 根据对个体常元符号的自然解释,$\langle M,\in\rangle$是 T 的模型. 假设$\langle N,E\rangle$是 T 的任意其它模型. 据句子(2),不妨假设

$$\langle M,\in\rangle\subseteq_{\mathrm{end}}\langle N,E\rangle.$$

下证$\langle N,E\rangle\subseteq\langle M,\in\rangle$: 令 $x\in N$ 且假设 $y\in N$ 使得

$$\langle N,E\rangle\models\text{“}\mathrm{TC}(x)=y\text{”}.$$

选择 $\beta\leqslant\aleph_\alpha$ 使得据句子(3),

$$\langle N,E\rangle\models\exists f(f\text{ 是从 }y\text{ 到 }\beta\text{ 的双射}).$$

于是,存在某个 $F\subseteq\beta\times\beta$ 使得$\langle N,E\rangle$是 $f:\langle y,E\upharpoonright y\rangle\cong\langle\beta,F\rangle$的模型,因此

$$\langle N,E\rangle\models\text{“}\langle\beta,F\rangle\text{是良建的”}.\tag{10.5}$$

我们要验证:

$$\langle\beta,F\rangle\text{相对}\langle M,\in\rangle\text{是良建的}.\tag{10.6}$$

假设$\langle\beta,F\rangle$相对$\langle M,\in\rangle$不是良建的. 令 $X\subseteq\beta$ 没有 F-极小元,但$|X|<\aleph_{\alpha+1}$,所以 $X\in M\subseteq N$,因此$\langle N,E\rangle$是“X 没有 F-极小元”的模型,这与(10.5)矛盾,因此(10.6)成立.

因为传递集$\langle y,E\upharpoonright y\rangle\cong\langle\beta,F\rangle$且$\langle y,E\upharpoonright y\rangle$在 $\mathbf{H}(\aleph_{\alpha+1})$中,所以 $y\in\mathbf{H}(\aleph_{\alpha+1})$,因此 $x\in\mathbf{H}(\aleph_{\alpha+1})$,从而$\langle N,E\rangle\cong\langle M,\in\rangle$. 这样就证明了

$$\langle M,\in\rangle\cong\langle N,E\rangle.\ \square$$

称可容集 $\mathfrak{M}$ 是**有效可容集** $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{M}$ 的有效(无穷)句子集在 $\mathfrak{M}$ 上是 Σ_1.

10.1.24 定理 令 $\mathfrak{M}$ 是可容集,

(1) 若 $\mathfrak{M}$ 是自我定义的,则 $\mathfrak{M}$ 不是 Σ_1-完全的.

(2) 若 $\mathfrak{M}$ 是强自我定义的纯集,则 $\mathfrak{M}$ 不是可容有效的.

(3) 令 T 是(强)自我定义 $\mathfrak{M}$($\mathfrak{M}$ 如(1)或(2)的前提条件所

规定)的理论，$X\subseteq\mathfrak{M}$ 是 $\mathfrak{M}$ 上的 Π_1^1. 则存在 $\mathfrak{M}$-递归函数 f 使得对每一 $x\in\mathfrak{M}$,

$$x\in X \Leftrightarrow f(x)\in \mathrm{Cn}(T)=\{\varphi\in\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}:T\models\varphi\}.$$

证明:因为存在 $\mathfrak{M}$ 的 Π_1-子集使得该子集不是 Σ_1. 因此存在 $\mathfrak{M}$ 的 Π_1^1-子集使得该子集不是 Σ_1. 所以(1)和(2)可以从(3)证得.

(3) 假设 $x\in X \Leftrightarrow \mathfrak{M}\models\forall R\varphi(R,x)$，其中 R 是不在 $\mathrm{Sm}(T)$ 中出现的符号. 在(1)的情况下:不妨假设 T 包含 $\mathfrak{M}$ 的 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$-图象，则

$$x\in X \Leftrightarrow \varphi(R,\bar{x})\in \mathrm{Cn}(T).$$

在(2)的情况下:只须验证 $\bigwedge T$ 和 $\mathrm{TC}(\{x\})$的图象蕴涵 $\varphi(R,\bar{x})$. □

由以上几个定理和下面推论可知有许多不可数可容集不是 Σ_1-紧致的.

10.1.25 推论 若 $\mathfrak{M}$ 是强自我定义的纯集，则存在 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的有效句子 σ 使得 σ 不能从 2.1.14 定义的公理和规则推出.

证明:可证句子集是 Σ_1-集. □

10.1.26 推论 令 $\mathfrak{M}$ 是自我定义的可容集，则在 $\mathfrak{M}$ 上 $\Pi_1^1=$ s-Π_1^1，即 $\mathfrak{M}$ 上每一 Π_1^1-关系能用一 s-Π_1^1-公式来定义.

证明:我们令 T 是使 $\mathfrak{M}$ 自我定义的 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的 Σ_1-理论，据 10.1.17，$\mathrm{Cn}(T)$是 s-Π_1^1-公式，但据 10.1.24(3)，$\mathfrak{M}$ 上每一 Π_1^1-关系可以一对一化归为 $\mathrm{Cn}(T)$，所以每一 s-Π_1^1-关系是 s-Π_1^1. □

10.1.27 主定理 令 $\mathfrak{M}$ 是可容集，则

$\mathfrak{M}$ 是 Σ_1-紧致的 $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{M}$ 满足 s-Π_1^1-自返原则.

证明:据 10.1.14，只须证"$\Leftarrow$":假设 $\mathfrak{M}$ 满足 s-Π_1^1-自返原则，T 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的 Σ_1-理论，每一 $T_0\subseteq T$，$T_0\in\mathfrak{M}$，有模型. 据 8.1.13，不妨假设 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是 Skolem-片段，且每一 $T_0\subseteq T$，$T_0\in\mathfrak{M}$，有 Skolem-模型，我们要证 T 有 Skolem-模型.

假设 T 没有 Skolem-模型，则据弱完全性定理 8.1.17(2)，没

有一个 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$-超有效性质 D 能够把 T 作为子集包含在其中. 因此 $(\mathfrak{M},T)$ 满足表达下列意思的 s-Π_1^1-句子 $\Psi(\overline{T})$:

$$\forall \mathrm{D}[\mathrm{D}\text{ 是 }\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}\text{ 的超有效性质}\rightarrow\exists x(x\in\overline{T}\wedge x\notin \mathrm{D})].$$

其中 $\overline{T}$ 指称 T. 令 $\theta(v)$ 是定义 T 的 Σ_1-公式,则上式变成

$$\mathfrak{M}\models\forall \mathrm{D}[\mathrm{D}\text{ 是 }\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}\text{-超有效性质}\rightarrow\exists x(\theta(x)\wedge x\notin \mathrm{D})].$$

显然. 这是一个 s-Π_1^1-句子 $\Phi(\vec{y}_k)$,其中的参数 $\vec{y}_k$ 就是 $\theta(v)=\theta(v,\vec{y}_k)$ 中的那些参数. 据 s-Π_1^1-自返原则,存在传递集 $a\in\mathfrak{M}$ 使得 $\vec{y}_k\in a$ 且 $\mathfrak{M}\models\Phi^{(a)}[\vec{y}_k]$. 令

$$\mathfrak{M}_0=(\mathfrak{A}\cap a;\ a,\in,\cdots),\quad T_0=\{x\in a:\ \theta(x)^{(a)}\}.$$

据 Δ_0 分离公理,$T_0\in\mathfrak{M}$. 假设 $y\in T_0$,则 $y\in a\wedge\theta(y)^{(a)}$,据 10.1.11,$\theta(y)$ 在 $\mathfrak{M}$ 中成立. 因为 $\theta(v)$ 是定义 T 的 Σ_1-公式,所以 $y\in T$. 这就证明了 $T_0\subseteq T$. 因为 $\mathfrak{M}\models\Phi^{(a)}[\vec{y}_k]$,所以

$$(\mathfrak{M}_0,T_0)\models\Psi(\overline{T}).$$

我们不知道 $\Psi(\overline{T})$ 关于 $\mathfrak{M}$ 说些什么,但有 $(\mathfrak{M}_0,T_0)\subseteq_{end}(\mathfrak{M},T_0)$. 据 s-$\Pi_1^1$ 公式的保持性,有 $(\mathfrak{M},T_0)\models\Psi(\overline{T})$. 因此 T_0 不是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的任一超有效性质 D 的子集,所以 T_0 没有 Skolem-模型,矛盾. □

这样我们证明了本节的主定理. 下面我们先来讨论几类没有 Σ_1-紧致性的可容集,然后考察既是 Σ_1-紧致的又是 Σ_1-完全的可容集有些什么性质.

10.1.28 定义 称可容集 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 是**可解**(resolvable)**可容集** $\Leftrightarrow$ 存在 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$-递归函数 f 使得 $\mathrm{Dom}(f)=o(\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}})$ 且 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}=\bigcup\mathrm{Ran}(f)$.

10.1.29 定理 可解可容集的类可分为两个不相交的类:一个是 Σ_1-紧致的,另一个是自我定义的.

证明: 据 10.1.22,自我定义的 $\mathfrak{M}$ 都不是 Σ_1-紧致的. 现令 $\mathfrak{M}$ 是可解且非 Σ_1-紧致的可容集,我们要证它是自我定义的. 因为 $\mathfrak{M}$ 是可解的,所以可以证明(参见练习 10.1.39)存在一个 $\mathfrak{M}$-递归的全函数 $f:o(\mathfrak{M})\rightarrow\mathfrak{M}$ 使得

$$\alpha<\beta\Rightarrow f(\alpha)\in f(\beta),$$

$f(\alpha)$是传递的，　对所有 α，

$\mathfrak{M}=\bigcup\{f(\alpha):\alpha<\mathrm{o}(\mathfrak{M})\}$.

因为 $\mathfrak{M}$ 不是 Σ_1-紧致的，所以据 10.1.27，$\mathfrak{M}$ 不满足 s-Π_1^1-原则，因此存在 s-Π_1^1-公式 $\Phi(v)$和 $x\in\mathfrak{M}$ 使得 $\mathfrak{M}$ 满足下列公式：

$$\Phi(x),\quad \neg\exists b[\mathrm{Tran}(b)\wedge x\in b\wedge\Phi(x)^{(b)}].$$

显然，第二个公式是 s-Σ_1^1-公式，所以据 10.1.6，它等价 s-Σ_1^1-范式 $\exists R\varphi(x,R)$，其中 φ 是 Π_1-公式. 令 $\sigma(u,v)$是定义 f 的 Σ_1-公式：

$$f(\alpha)=y\Leftrightarrow\mathfrak{M}\models\sigma(\alpha,y).$$

令自我定义 $\mathfrak{M}$ 的 Σ_1-理论 T 由下列句子组成：

$\mathrm{Th}_{\infty\omega}(\mathfrak{M})$,

$\forall v(v\in\overline{a}\rightarrow\bigvee_{x\in a}v=\overline{x})$,

$\forall uv[\overline{f}(u)=v\leftrightarrow\sigma(u,v)]$,

$\forall uv[\mathrm{Ord}(u)\wedge\mathrm{Ord}(v)\wedge u<v\rightarrow\overline{f}(u)\in\overline{f}(v)]$,

$\forall x\exists u[\mathrm{Ord}(u)\wedge x\in\overline{f}(u)]$,

$\forall u[\mathrm{Tran}(\overline{f}(u))]$,

$\varphi(x,R)$.

令$(\mathfrak{N}_{\mathfrak{B}},f)$是 T 的任意模型. 不妨假设 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}\subseteq_{\mathrm{end}}\mathfrak{N}_{\mathfrak{B}}$. 要证 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}=\mathfrak{N}_{\mathfrak{B}}$. 设要证结果不成立，令 $x\in\mathfrak{N}_{\mathfrak{B}}-\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$，所以据关于 σ 的公理，

$$\mathfrak{N}_{\mathfrak{B}}\models\exists a[\mathrm{Ord}(a)\wedge x\in\overline{f}(a)].$$

选择这样一个 a，则 a 是 $\mathfrak{N}_{\mathfrak{B}}$ 的一序数但 $a\notin\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$. 因为若 $a\in\mathfrak{M}$，则据 f 的构造，$f(a)\in\mathfrak{M}$，而这蕴涵 $x\in\mathfrak{M}$. 因此对所有序数 $\beta\in\mathfrak{M}$，$\alpha>\beta$. 但对每一 $\beta\in\mathfrak{M}$，$f(\beta)\in f(a)$. 因为 $f(a)$是传递集，所以 $f(\beta)\subseteq f(a)$在 $\mathfrak{N}_{\mathfrak{B}}$ 中成立，因此 $\mathfrak{M}\subseteq_{\mathrm{end}}\langle f(a),E\rangle$，所以 $\Phi(x)^{(f(a))}$ 成立. 但这又与 $\mathfrak{N}_{\mathfrak{B}}\models\exists R\varphi(x,R)$矛盾，因为$\exists R[\varphi(x,R)]$等价 $\neg\exists b[\mathrm{Tran}(b)\wedge x\in b\wedge\Phi(x)^{(b)}]$，这说明对所有传递集 b，尤其对 $b=f(a)$，$\Phi^{(b)}$ 不成立. 因此 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}=\mathfrak{N}_{\mathfrak{B}}$. □

10.1.30 推论(Nyberg)　每一 Σ_1-完全的可解可容集是 Σ_1-紧致的. 换句话说，相对可解可容集，10.1.7(König-第一原则)蕴涵

10.1.12(König-第二原则).

证明:若 s-$\Pi_1^1=\Sigma_1$,则 s-$\Pi_1^1\neq\Pi_1^1$,因此据 10.1.26,$\mathfrak{M}$ 不是自我定义的,而据 10.1.29,$\mathfrak{M}$ 是 Σ_1-紧致的. □

10.1.31 定义 令 $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 是传递结构,$\Phi(\vec{v}_n)$ 是 s-Π_1^1-公式,$\varphi(\vec{v}_n)$ 是 Σ_1-公式,其中 φ 中可以有来自 $\mathfrak{M}$ 的参数,我们称 **φ 在 $\mathfrak{M}$ 上齐一等价 Φ** $\Leftrightarrow$

(1) $\mathfrak{M}\models\forall\vec{v}_n[\Phi(\vec{v}_n)\to\varphi(\vec{v}_n)]$, 且

(2) $\mathfrak{M}\models\forall a\forall\vec{v}_n\in a[\mathrm{Tran}(a)\wedge\varphi(\vec{v}_n)^{(a)}\to\Phi(\vec{v}_n)^{(a)}]$.

10.1.32 引理 令 $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 是传递结构且在对集和 TC-运算下封闭,$\varphi(\vec{v}_n)$ 是 Σ_1-公式,且在 $\mathfrak{M}$ 上齐一等价 s-Π_1^1-公式 $\Phi(\vec{v}_n)$,则对所有 $\vec{x}_n\in\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}$ 满足:

$$\begin{aligned}\Phi(\vec{x}_n)&\leftrightarrow\varphi(\vec{x}_n)\\&\leftrightarrow\exists a[\mathrm{Tran}(a)\wedge\vec{x}_n\in a\wedge\varphi(\vec{x}_n)^{(a)}]\\&\leftrightarrow\exists a[\mathrm{Tran}(a)\wedge\vec{x}_n\in a\wedge\Phi(\vec{x}_n)^{(a)}].\end{aligned}$$

证明:令 $\varphi(\vec{v}_n)=\exists y\psi(\vec{v}_n,y)$ 且 ψ 是 Δ_0-公式,据 10.1.31(1),

$$\mathfrak{M}\models\Phi(\vec{x}_n)\to\exists y\psi(\vec{x}_n,y).$$

若 $\mathfrak{M}\models\psi(\vec{x}_n,y)$,则令 $a=\mathrm{TC}(\{y,\vec{x}_n\})$,因为 $\mathfrak{M}$ 在对集和 TC-运算下封闭,所以 $a\in\mathfrak{M}$ 且 $\varphi(\vec{x}_n)^{(a)}$ 成立,因此对所有 $\vec{x}_n\in\mathfrak{M}$,$\mathfrak{M}$ 满足

$$\varphi(\vec{x}_n)\to\exists a[\mathrm{Tran}(a)\wedge\vec{x}_n\in a\wedge\varphi(\vec{x}_n)^{(a)}].$$

据 10.1.31(2),上式右边蕴涵

$$\exists a[\mathrm{Tran}(a)\wedge\vec{x}_n\in a\wedge\Phi(\vec{x}_n)^{(a)}].$$

据 10.1.11(1),上式蕴涵 $\Phi(\vec{x}_n)$. □

10.1.33 定义 称可容集 $\mathfrak{M}$ 满足"**齐一地 s-$\Pi_1^1=\Sigma_1$**" $\Leftrightarrow$ 对 $\mathscr{L}^*$ 的每一 s-Π_1^1-公式 $\Phi(\vec{v}_n)$,存在 Σ_1-公式 $\varphi(\vec{v}_n)$,其中 φ 可以含来自 $\mathfrak{M}$ 的参数,使得 φ 在 $\mathfrak{M}$ 上齐一等价 Φ.

10.1.34 定理 可容集 $\mathfrak{M}$ 满足条件"齐一地 s-$\Pi_1^1=\Sigma_1$" $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{M}$ 满足 s-$\Pi_1^1=\Sigma_1$ 和 s-Π_1^1-自返原则.

证明:"$\Rightarrow$"直接来自 10.1.32. 下证"$\Leftarrow$":假设 $\mathfrak{M}$ 满足 s-$\Pi_1^1=\Sigma_1$ 和 s-Π_1^1-自返原则,$\Phi(\vec{v}_n)$ 是 s-Π_1^1 公式. 我们要找一个在 $\mathfrak{M}$ 上齐一等价 $\Phi(\vec{v}_n)$ 的 Σ_1-公式 $\varphi(\vec{v}_n)$. 令 $\Psi(\vec{v}_n,b)$ 是下列 s-Π_1^1-公式:

$$\mathrm{Tran}(b)\wedge\vec{v}_n\in b\wedge\Phi(\vec{v}_n)^{(b)}.$$

因为 s-$\Pi_1^1=\Sigma_1$,所以存在 $\mathfrak{M}$ 上等价 $\Psi(\vec{v}_n,b)$ 的 Σ_1-公式 $\psi(\vec{v}_n,b)$. 令 $\varphi(\vec{v}_n)$ 是 $\exists b\psi(\vec{v}_n,b)$. 为了证明 $\varphi(\vec{v}_n)$ 齐一等价 $\Phi(\vec{v}_n)$,首先假设 $\mathfrak{M}\models\Phi(\vec{x}_n)$. 据 s-$\Pi_1^1$-自返原则,存在 $b\in\mathfrak{M}$ 使得 $\Psi(\vec{x}_n,b)$ 在 $\mathfrak{M}$ 中成立. 因此 $\mathfrak{M}\models\psi(\vec{x}_n,b)$,从而 $\mathfrak{M}\models\varphi(\vec{x}_n)$. 这样我们证明了 10.1.31 的(1)被满足. 下面我们来验证该定义的(2)也被满足:

假设 $a\in\mathfrak{M}$ 是传递的,$\vec{x}_n\in a$ 且 $\varphi(\vec{x}_n)^{(a)}$ 在 $\mathfrak{M}$ 中成立,则存在 $b\in a$ 使得 $\psi(\vec{x}_n,b)^{(a)}$ 在 $\mathfrak{M}$ 中成立,所以据第 0 章的 Σ-自返原则,$\psi(\vec{x}_n,b)$ 在 $\mathfrak{M}$ 中成立,因此

$$\mathfrak{M}\models\mathrm{Tran}(b)\wedge\vec{x}_n\in b\wedge\Phi(\vec{x}_n)^{(b)}.$$

因为 $b\in a$ 且 a 是传递的,所以 $b\subseteq a$,据 10.1.11(2),

$$\mathfrak{M}\models\Phi(\vec{x}_n)^{(a)}.\ \square$$

10.1.35 推论 令 $\mathfrak{M}$ 是可容集,则

$\mathfrak{M}$ 满足"齐一地 s-$\Pi_1^1=\Sigma_1$" $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{M}$ 是 Σ_1-完全和 Σ_1-紧致的.

证明:据 10.1.34, 10.1.27 和 10.1.18. $\square$

10.1.36 推论 相对可解可容集,

条件"齐一地 s-$\Pi_1^1=\Sigma_1$"等价条件"s-$\Pi_1^1=\Sigma_1$".

证明:"$\Rightarrow$":据 10.1.34,可解可容集 $\mathfrak{M}$ 满足"齐一地 s-$\Pi_1^1=\Sigma_1$" $\Rightarrow$ $\mathfrak{M}$ 满足 s-$\Pi_1^1=\Sigma_1$.

"$\Leftarrow$":假设可解可容集 $\mathfrak{M}$ 满足 s-$\Pi_1^1=\Sigma_1$. 据 10.1.18,$\mathfrak{M}$ 是 Σ_1-完全的,而据 10.1.30,$\mathfrak{M}$ 又是 Σ_1-紧致的,所以据 10.1.35,$\mathfrak{M}$ 满足"齐一地 s-$\Pi_1^1=\Sigma_1$". $\square$

练 习

10.1.37 若 $0<\alpha<\aleph_\alpha$ 且 $|A|<\aleph_\alpha$,则 $\mathbf{H}(\aleph_\alpha)_\mathfrak{A}$ 自我定义.

10.1.38 令 $\mathfrak{M}$ 是可容集. 假设对 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的每一 Δ_0-理论 T, 若每一 $T_0\subseteq T, T_0\in\mathfrak{M}$, 有模型, 则 T 有模型. 证明 $\mathfrak{M}$ 是 Σ_1-紧致的.

[提示:证明 s-Π_1^1-自返原则成立.]

10.1.39 证明若 $\mathfrak{M}_{\mathbb{R}}$ 是可解集, 则存在如 10.1.28 规定的函数 f 使得对每一 $\beta\in o(\mathfrak{M})$, $f(\beta)$ 是传递集, 且

$$\beta<\gamma \Rightarrow f(\beta)\in f(\gamma).$$

10.1.40 用扩张的完全性定理 4.3.13 证明:

$\mathfrak{M}$ 是可数可容集 $\Rightarrow$ $\mathfrak{M}$ 满足条件"齐一地 s-$\Pi_1^1=\Sigma$".

§2 树与共尾度为 ω 的 Σ_1-紧致集

本节我们要研究树与共尾度为 ω 的 Σ_1-紧致集的关系. 我们要达到的目标主要是下列定理:

κ 是共尾度为 ω 的强极限基数且 $\mathfrak{M}=\langle \mathbf{H}(\kappa),\in,\mathscr{P},R\rangle$ 是可容集, 则 $\mathfrak{M}$ 是 Σ_1-紧致的.

本节讨论的树 $\mathscr{T}=\langle T,\leqslant\rangle$ 有如下规定(请与 1.2.12 和 9.3.17 比较): $\mathscr{T}$ 有一最小元, 通常用$\langle\ \rangle$或 0 指称. 因为$\leqslant$是良建的, 所以可以如下定义秩函数 Rank:

$\mathrm{Rank}(x)=\sup\{\mathrm{Rank}(y)+1:y\leqslant x\}$, 对 $x\in T$,

$\mathrm{Rank}(\mathscr{T})=\mathrm{Rank}(\leqslant)$

$=\sup\{\mathrm{Rank}(x)+1:x\in T\}$.

$\mathscr{T}$ 的、长度为 $\mathrm{Rank}(\mathscr{T})$的极大链称为**长树枝**.

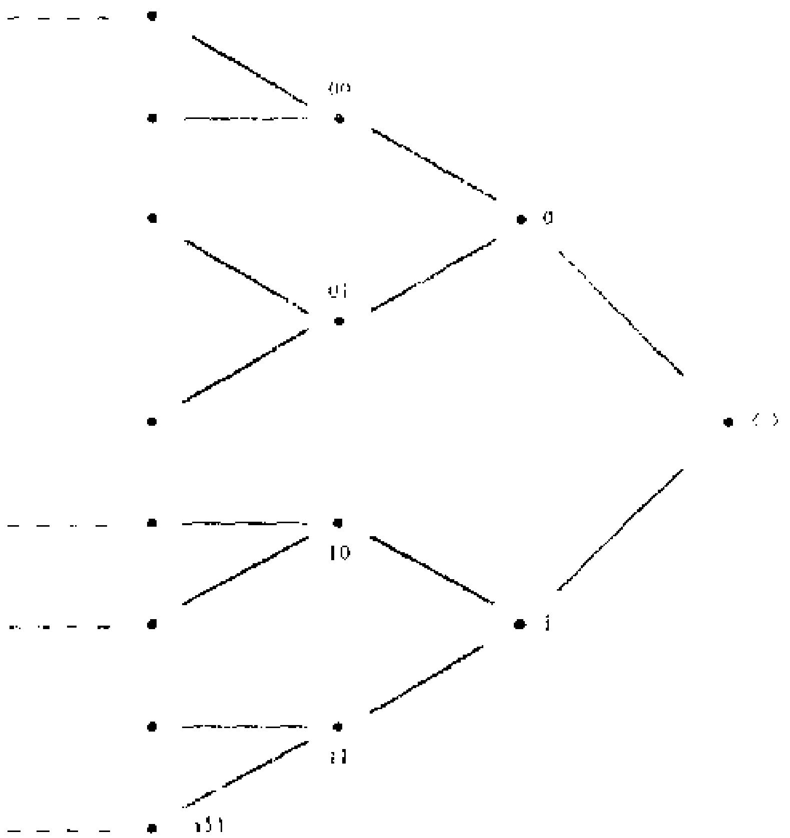
我们称$x\in T$ 是 $\mathscr{T}$ 的第 β 层中的**结点**

$$\Leftrightarrow x\in \mathrm{Lev}(\beta)=\{x\in T:\mathrm{Rank}(x)=\beta\}.$$

显然, 如此定义的 $\mathrm{Lev}=\mathrm{Lev}_{\mathscr{T}}$ 是定义域为 $\mathrm{Rank}(\mathscr{T})$的函数.

我们称二元树$\langle T,\leqslant\rangle$是**完备二元树** $\Leftrightarrow$ T 由下图的结点(有穷个 0 和 1 组成的序列)构成, 且

$$t_1\leqslant t_2 \Leftrightarrow t_1 \text{ 是 } t_2 \text{ 的真子序列}:$$



10.2.1 König-无穷引理

令$\langle S, \leqslant\upharpoonright S\rangle$是上述完备二元树的任意子树，则下列等价：

(1) S 没有无穷长的长树枝.

(2) S 是良建的.

(3) S 是良建的且有有穷秩.

(4) S 是有穷的.

证明：(4) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1)是显然的. 所以我们只需证(1) $\Rightarrow$ (4)，或等价地证明$\neg$(4) $\Rightarrow$ $\neg$(1)：

假设S是无穷的，令$d_0=\langle\ \rangle\in S$，则在$S$中0或1有无穷多个前趋，所以令$d_1$是这些前趋中最小的一个使得它在$S$中也有无穷多个前趋. 令$d_n\in S$在$S$中有无穷多个前趋且令$d_{n+1}$是$d_n{}^\frown 0$，$d_n{}^\frown 1$中第一个在$S$中有无穷多个前趋的结点. 因为$S$是无穷的，所以$d_n{}^\frown 0$和$d_n{}^\frown 1$中必有一个如此，所以这样的$d_{n+1}$可以取到. 因此$b=\{d_0, d_1, d_2, \cdots\}$就是$S$的无穷长的长树枝. □

我们称集合 $\mathfrak{M}$ 是**本质上不可数**(essentially uncountable)**集合** $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{M}$ 的每一可数子集是 $\mathfrak{M}$ 的元素.

本节固定要讨论的 Σ_1-紧致集在下列意义下都有共尾度 ω: $\mathfrak{M}=\bigcup\limits_{n<\omega}M_n$,其中每一 $M_n\in\mathfrak{M}$. 因此它们中没有一个是在本质上不可数的.

对本质上不可数的 Σ_1-紧致集的存在性证明,将在下节给出.

令 $\mathfrak{M}$ 是可容集,称树 $\mathscr{T}=\langle T,\leqslant\rangle$ 是 **$\mathfrak{M}$-树** $\Leftrightarrow T\subseteq\mathfrak{M}$, T, $\leqslant$, $\mathrm{Lev}_{\mathscr{T}}$ 都是 $\mathfrak{M}$-递归的且 $\mathrm{Rank}(\mathscr{T})=o(\mathfrak{M})$. 特别地,对每一 $\beta<o(\mathfrak{M})$, T 有第 β 层的结点(因为 $\mathrm{Rank}(\mathscr{T})=o(\mathfrak{M})$),但第 β 层的所有结点的集合是 $\mathfrak{M}$-有穷的(因为 $\mathrm{Lev}(\beta)\in\mathfrak{M}$).

这样 König-无穷引理就可以重述如下:

令 $\mathfrak{M}=\langle \mathrm{HF},\in,R\rangle$,则每一 $\mathfrak{M}$-树有长树枝.

10.2.2 定理

若 $\mathfrak{M}$ 是 Σ_1-紧致的可容集,则每一 $\mathfrak{M}$-树有长树枝.

证明:令 $\mathscr{T}=\langle T,\leqslant\rangle$ 是 $\mathfrak{M}$-树. 假设 $\mathscr{T}$ 没有长树枝,则 $\mathfrak{M}$ 满足下列 s-Π_1^1-句子:

$$\forall C[C\text{ 是链}\rightarrow\exists\beta\forall x\in\mathrm{Lev}(\beta)(x\notin C)].$$

因为 $\mathfrak{M}$ 是 Σ_1-紧致的,所以据 s-Π_1^1-自返原则,存在 $\alpha\in\mathfrak{M}$ 使得

$$\forall C[C\text{ 是链}\rightarrow\exists\beta<\alpha\forall x\in\mathrm{Lev}(\beta)(x\notin C)].\qquad(10.7)$$

若存在 $y\in\mathrm{Lev}(\alpha)$,则 $C=\{x\in T:x\leqslant y\}$,而这与(10.7)矛盾,所以 $\mathrm{Lev}(\alpha)=\varnothing$,因此 $\mathrm{Rank}(\mathscr{T})\leqslant\alpha<o(\mathfrak{M})$,与 $\mathfrak{M}$-树的定义矛盾. □

说明:"每一 $\mathfrak{M}$-树有长树枝"这个假设看起来好象应该称为 König-原则,但下面的定理说明事实上这个假设非常弱以致不能引起广泛的兴趣.

10.2.3 引理 令 $\mathfrak{M}$ 是可容集使得 $\alpha=o(\mathfrak{M})$ 有共尾度 ω,则每一 $\mathfrak{M}$-树有长树枝.

证明:这是 König-无穷引理的一个直接概括,所以本证明也是该引理证明的一个扩充. 令 $\alpha=\sup\{\alpha_n:n<\omega\}$,其中 $\alpha_0<\alpha_1<\cdots<\alpha_n<\cdots<\alpha$. 令 $\mathscr{T}=\langle T,\leqslant\rangle$ 是 $\mathfrak{M}$-树. 我们首先来找 $x_0,x_1,\cdots$ 使

得 $x_n\in \mathrm{Lev}(\alpha_n)$ 且 $x_0\leqslant x_1\leqslant\cdots$. 为此证：

$$\exists x_0\in \mathrm{Lev}(\alpha_0)\forall\beta>\alpha_0\exists z\in \mathrm{Lev}(\beta)(x_0\leqslant z). \tag{10.8}$$

假设不存在这样的 x_0，则

$$\forall x\in \mathrm{Lev}(\alpha_0)\exists\beta>\alpha_0\forall z\in \mathrm{Lev}(\beta)\neg(x\leqslant z).$$

据 Σ-自返原则，存在 $\alpha\in\mathfrak{M}$ 使得

$$\forall x\in \mathrm{Lev}(\alpha_0)\exists\beta<\alpha[\alpha_0<\beta\wedge\forall z\in \mathrm{Lev}(\beta)\neg(x\leqslant z)]. \tag{10.9}$$

令 $w\in \mathrm{Lev}(\alpha)$，据树的构造，$w$ 在第 α_0 层有一个前趋 x 且对每一 $\beta<\alpha$，w 有一个前趋 z_β 使得 $x\leqslant z_\beta$，而这与(10.9)矛盾. 因此这样的 x_0 确实存在.

给定 x_0，类似可证明存在 $x_1\geqslant x_0$ 使得 $x_1\in \mathrm{Lev}(\alpha_1)$ 且

$$\forall\beta>\alpha_1\exists z\in \mathrm{Lev}(\beta)(x_1\leqslant z).$$

用这样的方法继续下去，就能找到一个序列 $x_0\leqslant x_1\leqslant\cdots$ 使得对每一 $n<\omega$，$x_n\in \mathrm{Lev}(\alpha_n)$. 令 $B=\{y\in T: y\leqslant x_n$，对某个 $n\}$，易见 B 就是 $\mathscr{T}$ 的长树枝. □

假设纯可容集 $\mathfrak{M}$ 有下列性质：

$$b\subseteq a\in\mathfrak{M}\Rightarrow b\in\mathfrak{M}.$$

(我们称这样的 $\mathfrak{M}$ 是**超传递可容集**). 易证对某个 κ，$\mathfrak{M}$ 形如 $\mathbf{H}(\kappa)$，所以我们暂时把注意力放在 $\mathbf{H}(\kappa)$上. **注意**：

$$\mathbf{H}(\kappa)\text{在幂集运算 }\mathscr{P}\text{ 下封闭}\Leftrightarrow\kappa\text{ 是强极限基数}.$$

为了简便，下面用 $\langle\mathbf{H}(\kappa),\in,\mathscr{P}\rangle$ 表示 $\langle\mathbf{H}(\kappa),\in,\mathscr{P}\cap\mathbf{H}(\kappa)\rangle$.

10.2.4 定理 令 κ 是强极限基数(即 $\lambda<\kappa\Rightarrow 2^\lambda<\kappa$)，$\mathfrak{M}=\langle\mathbf{H}(\kappa),\in,\mathscr{P},R\rangle$ 是可容集，则

$$\mathfrak{M}\text{ 是 }\Sigma_1\text{-紧致的}\Leftrightarrow\text{每一 }\mathfrak{M}\text{-树有长树枝}.$$

证明：据 10.2.2，我们有"⇒". 下面我们来证明"⇐". 假设每一 $\mathfrak{M}$-树有长树枝，我们来证 $\mathfrak{M}$ 满足 s-Π_1^1 自返原则.

因为 $\mathbf{H}(\kappa)$ 在幂集运算下封闭且 $\langle\mathbf{H}(\kappa),\in,\mathscr{P}\rangle$ 是可容集，所以据 $\mathbf{V}(\alpha)$ 的递归定义(参见第 0 章 §7 的开头)可以证明

$$\alpha\longmapsto\mathbf{V}(\alpha)$$

是 α 的 $\mathfrak{M}$-递归函数. 据通常在 ZF 系统中的证明，每一集合在某

个 $\mathbf{V}(\alpha)$中，这说明 $\mathbf{V}(\kappa)=\mathbf{H}(\kappa)$. 令

$$\forall S\exists\vec{y}_n\varphi(S,x,\vec{y}_n) \tag{10.10}$$

是在 $\mathfrak{M}$ 中真的 s-Π_1^1-公式(据 s-Π_1^1-范式引理 10.1.5，只须考虑这样的公式)，其中 φ 是 Δ_0-公式. 为了简单，我们假设 S 是一元关系符号. 令 $\xi=\mathrm{Rank}(x)$，因此对所有 $\alpha>\xi$，$x\in\mathbf{V}(\alpha)$. 假设 $\mathfrak{M}$ 不满足 s-Π_1^1 自返原则，即对每一 α 使得 $\xi<\alpha<\kappa$，

$$\neg\forall S\subseteq\mathbf{V}(\alpha)\exists\vec{y}_n\in\mathbf{V}(\alpha)\varphi(S,x,\vec{y}_n),$$

因此对每一 α 使得 $\xi<\alpha<\kappa$，

$$\exists S\subseteq\mathbf{V}(\alpha)\forall\vec{y}_n\in\mathbf{V}(\alpha)\neg\varphi(S,x,\vec{y}_n). \tag{10.11}$$

如下定义树 $\mathscr{T}=\langle T,\leqslant\rangle$：

$$T=\{\langle\alpha,S\rangle:S\subseteq\mathbf{V}(\alpha)\wedge[\xi<\alpha\rightarrow\forall\vec{y}_n\in\mathbf{V}(\alpha)\neg\varphi(S,x,\vec{y}_n)]\},$$

$$\langle\alpha,S\rangle\leqslant\langle\beta,S_1\rangle\Leftrightarrow\alpha<\beta\text{ 且 }S=S_1\cap\mathbf{V}(\alpha).$$

据 $\mathbf{H}(\kappa)$的超传递性，上述每一 S 是 $\mathbf{H}(\kappa)$的元素. T 的最小元是 $\langle 0,\varnothing\rangle$. 某个$\langle\alpha,S\rangle\in T$ 的诸前趋就是形如$\langle\beta,S\cap\mathbf{V}(\beta)\rangle$的序对，其中 $\beta<\alpha$，所以这些前趋的集合在$\leqslant$下有序型 α. 因此$\langle\alpha,S\rangle$就是第 α 层的结点. 因为 $\mathrm{Lev}\subseteq\{\alpha\}\times\mathscr{P}(\mathbf{V}(\alpha))$且 $\mathfrak{M}$ 在 $\mathscr{P}$ 下封闭，所以 $\mathrm{Lev}(\alpha)\in\mathfrak{M}$ 且 Lev 是 $\mathfrak{M}$-递归的. (10.11)说明，对所有 $\alpha<\kappa$，$\mathrm{Lev}(\alpha)\neq\varnothing$. 因此 $\mathscr{T}$ 是 $\mathfrak{M}$-树. 据假设令 B 是 $\mathscr{T}$ 的长树枝，即 B 是序型为 κ 的极大链. 因此 B 被$\leqslant$线序，且对每一 $\alpha<\kappa$，B 恰好包含一个序对$\langle\alpha,S_\alpha\rangle\in T$. 显然 $\alpha<\beta$ 蕴涵 $S_\alpha=S_\beta\cap\mathbf{V}(\alpha)$. 令 $S=\bigcup_{\alpha<\kappa}S_\alpha$，则对每一 $\alpha<\kappa$，$S_\alpha=S\cap\mathbf{V}(\alpha)$. 由上规定我们来证明：

$$(\mathfrak{M},S)\models\neg\exists\vec{y}_n\varphi(S,x,\vec{y}_n). \tag{10.12}$$

令 $\vec{y}_n\in\mathfrak{M}$ 是任意 n 个元素，选择 $\alpha<\kappa$ 使得 $\xi<\alpha$ 且 $\vec{y}_n\in\mathbf{V}(\alpha)$. 因为$\langle\alpha,S_\alpha\rangle\in T$，所以据 T 的构造，

$$\langle\mathbf{V}(\alpha),\in,\mathscr{P}\upharpoonright\mathbf{V}(\alpha),R\upharpoonright\mathbf{V}(\alpha),S_\alpha\rangle\models\neg\varphi(S,x,\vec{y}_n).$$

但$(\mathfrak{M},S)$是上式左边的结构的终端扩张，所以$(\mathfrak{M},S)$也满足 Δ_0-公式$\neg\varphi(S,x,\vec{y}_n)$，(10.12)成立，而这与(10.10)矛盾，因此 $\mathfrak{M}$ 满足 s-Π_1^1-自返原则. □

我们知道，基数 κ 是强不可达的 $\Leftrightarrow$ κ 是正则强极限基数. 据 0.7.14，若 κ 是强不可达的，则对所有 $R \subseteq \mathbf{H}(\kappa)$，$\langle \mathbf{H}(\kappa), \in, \mathscr{P}, R \rangle$ 是可容集，因此对此可用 10.2.4. 据 Löwenheim-Skolem-定理（参见 0.7.15)，我们可以找到 $\lambda < \kappa$ 使得 $\langle \mathbf{H}(\lambda), \in, \mathscr{P}, R \upharpoonright \mathbf{H}(\lambda) \rangle$ 是可容集且 $\mathrm{cf}(\lambda) = \omega$，这又可以用 10.2.4. 另一方面，我们也可以去掉基数的强不可达性，用 Lévy-自返定理（参见 Barwise 的[1975]）直接证明：对任意可定义类 R，存在基数 λ 使得 $\mathrm{cf}(\lambda) = \omega$ 并且 $\langle \mathbf{H}(\lambda), \in, \mathscr{P}, R \upharpoonright \mathbf{H}(\lambda) \rangle$ 是可容集. 因此下一个定理的假设不是空洞的，而这个定理是本节所要达到的主要目标.

10.2.5 定理 令 κ 是共尾度为 ω 的强极限基数，$\mathfrak{M} = \langle \mathbf{H}(\kappa), \in, \mathscr{P}, R \rangle$ 是可容集，则 $\mathfrak{M}$ 是 Σ_1-紧致的.

证明：据 10.2.3 和 10.2.4. □

说明：（Ⅰ）对 10.2.4—10.2.5 增加始元集并无太大意义，因为只有当 $\mathfrak{A}$ 的基数 $< \kappa$ 且在同构意义上 $\mathfrak{A}$ 包含在 $\mathbf{H}(\kappa)$ 中，10.2.4 才对 $\langle \mathfrak{A}; \mathbf{H}(\kappa)_A, \in, \mathscr{P} \rangle$ 成立.

（Ⅱ）可数片段的 Σ_1-紧致性定理最早由 Barwise 在其[1967]中提出，所以 Σ_1-紧致性亦称 Barwise-紧致性. 关于某些共尾度为 ω 的、Σ_1-紧致的可容集的存在(10.2.5)最早分别由 Barwise 在其[1968]和 Karp 在其[1968]分别给出独立的证明，当然 Karp 使用的是代数方法. 而 Green 在其[1972]和 Cutland 在其[1972]分别用一致性质的方法和超积的方法重新证明了这些结果.

（Ⅲ）关于 Σ_1-递归饱和模型和 Σ_1-紧致性的关系见后面章节.

练 习

10.2.6 证明：

纯可容集 $\mathfrak{M}$ 是超传递的 $\Leftrightarrow$ 对某个基数 κ，$\mathfrak{M} = \mathbf{H}(\kappa)$.

10.2.7 令 $\mathfrak{M}$ 是超传递且 Σ_1-紧致的纯可容集，证明存在基数 $\kappa = \beth_\kappa$ 使得 $\mathfrak{M} = \mathbf{H}(\kappa)$. 令 $\mathfrak{M}_1 = (\mathfrak{M}, \mathscr{P})$，证明 $\mathfrak{M}_1$ 是可容集且满足条件"齐一地 s-$\Pi_1^1 = \Sigma_1$". 也就是要证明：

(1) $\mathfrak{M}$ 在 $\mathscr{P}$ 下封闭.　［提示：用 s-Π_1^1-自返原则.］

(2) $\mathfrak{M}_1$ 满足 s-Π_1^1-自返原则.　［提示：$\mathscr{P}$ 在 $\mathfrak{M}$ 上是 s-Δ_1^1.］

(3) $\mathfrak{M}_1$ 是可容集.　［提示：用(2).］

(4) $\mathfrak{M}_1$ 满足 s-$\Pi_1^1=\Sigma_1$.

10.2.8　令 κ 是强极限基数，$\mathfrak{M}=\langle H(\kappa),\in,\mathscr{P},R\rangle$ 是可容集，则下列命题等价：

(1) $\mathfrak{M}$ 是 Σ_1-紧致的(s-Π_1^1-自返的).

(2) $\mathfrak{M}$ 是 Σ_1-完全的(s-$\Pi_1^1=\Sigma_1$).

(3) 每一 $\mathfrak{M}$-树有长树枝.

§3　共尾度大于 ω 的 Σ_1-紧致集

本节我们要证明存在许多共尾度大于 ω 的 Σ_1-紧致可容集，特别是存在许多本质上不可数的 Σ_1-紧致可容集.

令 κ 是不可数正则基数. 称 κ 的子集 C **在 κ 中封闭** $\Leftrightarrow$ 对 C 的每一初始节 C_0，$(\sup C_0)<\kappa\Rightarrow(\sup C_0)\in C$.

(这说明 C 在 κ 上的序拓扑(order topology)中封闭.)

称 C **在 κ 中无界** $\Leftrightarrow\forall\beta<\kappa\exists\alpha\in C(\beta<\alpha)$.

称 C **在 κ 中闭无界** $\Leftrightarrow$ C 在 κ 中封闭且无界.

(上述定义请对照 9.2.1 和 9.3.32.)

10.3.1 引理　令 $\kappa>\omega$ 是正则的，若 $C_0,C_1\subseteq\kappa$ 在 κ 中闭无界，则 $C_0\cap C_1\subseteq\kappa$ 在 κ 中闭无界. 特别地，$C_0\cap C_1\neq\varnothing$.

证明：因为封闭集的交也是封闭的，所以 $C_0\cap C_1$ 在 κ 中也是封闭的. 下证 $C_0\cap C_1$ 在 κ 中无界：

任给 $\beta<\kappa$，对 $n<\omega$，令 $\alpha_1>\beta$ 在 C_1 中，$\alpha_2>\alpha_1$ 在 C_0 中，$\alpha_3>\alpha_2$ 在 C_1 中，…. 因为 κ 是正则的，所以 $\alpha=\sup\{\alpha_n:n<\omega\}<\kappa$. 又因为 $\alpha=\sup\{\alpha_{2n}:n<\omega\}$ 且 C_0 是封闭的，所以 $\alpha\in C_0$. 因为 $\alpha=\sup\{\alpha_{2n+1}:n<\omega\}$ 且 C_1 是封闭的，所以 $\alpha\in C_1$. 因此 $\beta<\alpha$ 且 $\alpha\in C_0\cap C_1$. □

这样，据 10.3.1，聚合

$$\mathscr{D}=\{C\subseteq\kappa: C_0\subseteq C, \text{对某个在 } \kappa \text{ 中闭无界 } C_0\}$$

定义了 κ 的诸子集上的滤子. 这样的 $\mathscr{D}$ 称为 **κ 上闭无界滤子.**

我们称**对几乎所有 $\alpha<\kappa$，命题 $P(\alpha)$ 成立** $\Leftrightarrow$ $\{\alpha<\kappa: P(\alpha)\}$ 属于这样的滤子.

10.3.2 定理 令 κ,λ 是正则基数使得 $\omega\leqslant\lambda<\kappa$. 若对几乎所有 $\alpha<\kappa$，$P(\alpha)$ 成立，则对某个 α 使得 $cf(\alpha)=\lambda$，$P(\alpha)$ 成立.

证明： 因为 $\{\alpha<\kappa: P(\alpha)\}\in\mathscr{D}$，所以 $\{\alpha<\kappa: P(\alpha)\}$ 是某个在 κ 中闭无界的 C 的扩集. 令 α 是用自然序枚举的 C 中第 λ 个元素. 因为 κ 是正则的(即 $cf(\kappa)=\kappa$)且 C 在 κ 中无界，所以 C 中存在这样的 α，因此 $P(\alpha)$ 成立. 因为 λ 是正则的，所以 $cf(\alpha)=cf(\lambda)=\lambda$. □

在读下一个定理时，读者应把 $J(\alpha)$ 看作是 $\mathbf{H}(\aleph_\alpha)$ 或 $\mathbf{L}(\omega\cdot\alpha)$ 或 $\mathbf{L}(\alpha,\omega\cdot\alpha)$，因为这些都是通常的运用.

10.3.3 定理(Barwise, [1969a]) 令 κ 是不可数正则基数，$R\subseteq\mathbf{H}(\kappa)$，且映射 $J:\kappa\to\mathbf{H}(\kappa)$ 有下列性质：

(1) 对所有 $\alpha<\kappa$，$J(\alpha)$ 是传递的，且在对集和并运算下封闭，

(2) $\alpha<\beta<\kappa\Rightarrow J(\alpha)\in J(\beta)$，

(3) 若 $\lambda<\kappa$ 是极限基数，则 $J(\lambda)=\bigcup_{\alpha<\lambda}J(\alpha)$， 且

(4) 对每一 $\alpha<\kappa$，$\mathfrak{J}_\alpha=\langle J(\alpha),\in,R\cap J(\alpha)\rangle\models\Delta_0$-分离公理.

证明： 对几乎所有 $\alpha<\kappa$，$\mathfrak{J}_\alpha$ 是 Σ_1-紧致可容集.

证明： 我们称序数 α 是 **β-超稳定序数** $\Leftrightarrow$ $\alpha<\beta<\kappa$ 且对每一 s-Π_1^1-公式 $\Phi(\vec{v}_n)$ 和每一 $\vec{a}_n\in J(\alpha)$，

$$\mathfrak{J}_\beta\models\Phi(\vec{a}_n)\Rightarrow\mathfrak{J}_\alpha\models\Phi(\vec{a}_n).$$

我们首先要证：

若 α 是 β-超稳定的，则 $\mathfrak{J}_\alpha$ 是 Σ_1-紧致可容集. (10.13)

假设 α 是 β-超稳定的. 因为 Δ_0-聚合公理可以从 s-Π_1^1-自返原则中推出(事实上可以从 Σ_1-自返原则中推出)，而 KP 的其它公理显然在 $\mathfrak{J}_\alpha$ 中成立，所以只须证明 $\mathfrak{J}_\alpha$ 满足 s-Π_1^1-自返原则.

令 $\Phi(\vec{a}_n)$ 是在 $\Im_\alpha$ 中真的 s-Π_1^1-公式，则 $\Im_\beta \models \Phi^{(J(\alpha))}(\vec{a}_n)$. 因为 $J(\alpha)\in J(\beta)$，所以 $J(\alpha)\subseteq J(\beta)$，因此 $\Im_\beta$ 是下列 s-Π_1^1-公式 $\Psi(\vec{a}_n)$ 的模型：

$$\exists b[\mathrm{Tran}(b)\wedge \vec{a}_n\in b\wedge \Phi(\vec{a}_n)^{(b)}].$$

但据超稳定性，$\Im_\alpha\models\Psi(\vec{a}_n)$，因此 $\Im_\alpha$ 满足 s-Π_1^1-自返原则. 由此证明 (10.13) 成立. 下证

对每一 β 使得 $\alpha<\beta<\kappa$，几乎每一 $\alpha<\kappa$ 是 β-超稳定的. (10.14)

在此我们要用正规函数的技巧. 我们称函数 $f:\kappa\to\kappa$ 是**正规函数** $\Leftrightarrow$ f 是**递增函数**（即 $\alpha<\beta<\kappa\Rightarrow f(\alpha)<f(\beta)$）和**连续函数**（即 $\lambda<\kappa$ 是极限基数 $\Rightarrow f(\lambda)=\sup\{f(\alpha):\alpha<\lambda\}$）. 若 $f:\kappa\to\kappa$ 是正规函数，则易证 f 的固定点集 $\{\alpha<\kappa: f(\alpha)=\alpha\}$ 总是在 κ 中闭无界，因此我们来定义正规函数 f 使得

$f(\alpha)=\alpha$ 且 $\alpha<\beta<\kappa\Rightarrow\alpha$ 是 β-超稳定的.

令 $\mathrm{P}(\alpha,\beta)$ 表述关于 $\alpha,\beta<\kappa$ 的下列性质：

对所有 β' 使 $\beta\leqslant\beta'<\kappa$，且对常元来自 $J(\alpha)$ 的所有 s-Π_1^1-句子 $\Phi(\vec{a}_n)$， $\Im_{\beta'}\models\Phi(\vec{a}_n)\Rightarrow\Im_\beta\models\Phi(\vec{a}_n)$.

显然，对 β_0 和 κ 间的所有 β_1，$\mathrm{P}(\alpha,\beta_0)\Rightarrow\mathrm{P}(\alpha,\beta_1)$. 因为 $|J(\alpha)|<\kappa$，所以存在 $<\kappa$ 个 s-Π_1^1-公式 $\Phi(\vec{a}_n)$ 使其常元来自 $J(\alpha)$. 下证：

$$\forall\alpha<\kappa\exists\beta<\kappa\mathrm{P}(\alpha,\beta). \tag{10.15}$$

对任意 $\alpha<\kappa$，任一 s-Π_1^1-公式 $\Phi(\vec{x}_n)$ 和所有 $\vec{a}_n\in J(\alpha)$，我们令 $\gamma(\Phi,\vec{a}_n)$ 是最小的序数 $\gamma<\kappa$ 使得 $\Im_\gamma$ 满足 $\Phi(\vec{a}_n)$，若存在这样的 γ；否则令 $\gamma(\Phi,\vec{a}_n)=0$. 因为常元来自 $J(\alpha)$ 的 s-Π_1^1-公式 $\Phi(\vec{a}_n)$ 的个数 $<\kappa$，据 κ 的正则性，

$$\beta=\sup\{\gamma(\Phi,\vec{a}_n):\Phi\text{ 是 s-}\Pi_1^1\text{-公式},\vec{a}_n\in J(\alpha)\}<\kappa.$$

显然，这个 β 和任意更大的 $\beta<\kappa$ 都能使 (10.15) 成立.

这样，我们可以定义 f 如下：

$f(\alpha)=$ 最小的 β[使对所有 $\gamma<\alpha,\beta>f(\gamma)$ 且 $\mathrm{P}(\alpha,\beta)$].

因为 κ 是正则的，所以对所有 $\alpha<\kappa$，$f(\alpha)$得到定义，因此据 f 的构造，$f:\kappa\to\kappa$ 且 f 是递增的．下证 f 是连续的：令 $\lambda<\kappa$ 是极限序数，$\beta=\sup\{f(\alpha):\alpha<\kappa\}$，我们要证 $P(\lambda,\beta)$：令 $\beta_1\geqslant\beta$，Φ 是参数来自 $J(\lambda)$ 的 s-Π_1^1-句子且在 $\mathfrak{J}_{\beta_1}$ 中真．因为 $J(\lambda)=\bigcup_{\alpha<\lambda}J(\alpha)$，所以对某个 $\alpha<\lambda$，Φ 的参数来自 $J(\alpha)$，所以据 f 的构造，Φ 在 $\mathfrak{J}_{f(\alpha)}$ 中真．据 $\beta=\sup\{f(\alpha):\alpha<\kappa\}$ 和 $\mathfrak{J}_\beta$ 的构造，有 $\mathfrak{J}_{f(\alpha)}\subseteq_{\mathrm{end}}\mathfrak{J}_\beta$．据 s-$\Pi_1^1$-公式的保持性，$\Phi$ 也在 $\mathfrak{J}_\beta$中真，所以 $P(\lambda,\beta)$成立，因此

$$f(\lambda)=\beta=\sup\{f(\alpha):\alpha<\kappa\}.$$

这样我们证明 f 是连续的，从而证明 f 是正规的．

设 $f(\alpha)=\alpha$，则 $P(\alpha,\alpha)$成立，所以对所有 β_1 使得 $\alpha<\beta_1<\kappa$，α 是 β_1-超稳定的．据(10.13)，对几乎所有 $\alpha<\kappa$，$\mathfrak{J}_\alpha$ 是 Σ_1-紧致的．
□

10.3.4 推论 令 $\kappa>\omega$ 是正则的，则对几乎所有 $\alpha<\kappa$，$\mathbf{L}(\alpha)$ 是 Σ_1-紧致可容集．

证明：令 $J(\alpha)=\mathbf{L}(\omega\cdot\alpha)$，据 10.3.3，对几乎所有 $\alpha<\kappa$，$\mathbf{L}(\omega\cdot\alpha)$是 Σ_1-紧致的．因为 $f(\alpha)=\omega\cdot\alpha$ 是正规函数，所以对几乎所有 $\alpha<\kappa$，$\omega\cdot\alpha=\alpha$，因此对几乎所有 $\alpha<\kappa$，$\mathbf{L}(\alpha)$是 Σ_1-紧致的．□

10.3.5 推论 令 $\kappa>\omega$ 是正则的，$\mathfrak{A}=\langle A,R_1,\cdots,R_n\rangle$是幂$<\kappa$ 的结构，则对几乎所有 $\alpha<\kappa$，$\mathbf{L}(A,\alpha)$是 Σ_1-紧致的．

证明：这个证明类似 10.3.4 的证明，因为在 $\mathbf{H}(\kappa)$中存在 $\mathfrak{A}$ 的同构摹本．□

我们知道，$\mathbf{H}(\kappa)$是本质上不可数的 $\Leftrightarrow\mathrm{cf}(\kappa)>\omega$．所以下一定理使我们得到许多本质上不可数的 Σ_1-紧致可容集．

10.3.6 定理 令 $\kappa>\omega$ 是强不可达的，$R\subseteq\mathbf{H}(\kappa)$，则对几乎所有 $\lambda<\kappa$，$\langle\mathbf{H}(\lambda),\in,\mathscr{P},R\cap\mathbf{H}(\lambda)\rangle$是 Σ_1-紧致的．

证：令 $J(\alpha)=\mathbf{H}(\beth_\alpha)$．因为 $\kappa=\beth_\kappa$ 且 $|\mathbf{H}(\beth_\alpha)|\leqslant\beth_{\alpha+1}<\kappa$，所以 $J:\kappa\to\mathbf{H}(\kappa)$．因此据 10.3.3，对几乎所有 $\alpha<\kappa$，

$$\langle\mathbf{H}(\beth_\alpha),\in,\mathscr{P},R\cap\mathbf{H}(\beth_\alpha)\rangle$$

是 Σ_1-紧致的. 但 $f(\alpha)=\beth_\alpha$ 是正规函数，所以对几乎所有 $\alpha<\kappa$，都有 $\beth_\alpha=\alpha$. 因此对几乎所有 $\lambda<\kappa$，$\langle\mathbf{H}(\lambda),\in,\mathscr{P},R\cap\mathbf{H}(\lambda)\rangle$ 是 Σ_1-紧致的. □

如果我们把所有基数的类 **CN** 看作是一个强不可达基数，那么，我们可以重新解释上述全部结果. 在这种情况下，我们可以把 10.3.6 看作是 **ZFC** 系统中的一个结果：

10.3.7 推论　令 R 是任意的一个类，则类

$$\{\lambda:\langle\mathbf{H}(\lambda),\in,\mathscr{P},R\cap\mathbf{H}(\lambda)\rangle\text{是 }\Sigma_1\text{-紧致的}\}$$

是包含诸基数的一个封闭的真类. 因此对任意正则基数 κ，存在任意大的这样的 λ 使得 λ 的共尾度为 κ.

证明：上述最后一个命题可以从 10.3.2 得到. □

称基数 κ 是 **Mahlo-基数** $\Leftrightarrow$ 每一在 κ 中闭无界的 $C\subseteq\kappa$ 包含一强不可达基数(因此包含 κ 个这样的强不可达基数 $\lambda<\kappa$).

10.3.8 推论　令 κ 是 Mahlo-基数，$R\subseteq\mathbf{H}(\kappa)$，则存在 κ 个强不可达基数 $\lambda<\kappa$ 使得 $\langle\mathbf{H}(\lambda),\in,\mathscr{P},R\cap\mathbf{H}(\lambda)\rangle$ 是 Σ_1-紧致的.

证明：据 10.3.6. □

练　习

10.3.9　设 $\langle\mathbf{H}(\kappa),\in\rangle$ 是 Σ_1-紧致的. 证明 κ 不是第一个强不可达基数. 证明若 κ 是强不可达的，则 κ 是第 κ 个强不可达基数.

[提示：用 s-Π_1^1-自返原则.]

§4　弱紧致性与 Σ_1-紧致性

本节我们来讨论弱紧致性与 Σ_1-紧致可容集间的关系. 这里证明的许多结果与前一章 §3 的结果相同或相似，但细究起来两者无论从考虑的角度还是证明的方法都有所不同，这说明不同的集合论背景会产生不同的影响.

本节固定 $\mathscr{L}$ 是$\leqslant\kappa$个符号的语言使得 $\mathscr{L}$ 能编码为 $\mathbf{H}(\kappa)$ 的一个 Δ_1-子集，$\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\kappa\omega})=\{\varphi\in\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\infty\omega}):|\mathrm{Sub}(\varphi)|<\kappa\}$.

10.4.1 定义 在可容逻辑中，我们称基数 $\kappa\geqslant\omega$（相对 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$）是**弱紧致基数** $\Leftrightarrow$ 对 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$的每一句子集 $\Theta\subseteq\mathbf{H}(\kappa)$，若每一幂$<\kappa$的子集 $\Theta_0\subseteq\Theta$ 有模型，则 Θ 有模型.

注意：这里的定义与前一章关于弱紧致基数的定义在形式上有所不同，在那里是用更强的语言 $\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$来定义的，而且在讨论问题时通常假设 κ 是强不可达的. 在这种情况下，$|\mathbf{H}(\kappa)|=\kappa$，所以 10.4.1 中的 Θ 的幂$\leqslant\kappa$. 因此据下面的诸结果，我们可以看到这两个定义在本质上是相同的.

10.4.2 引理 令 $\kappa\geqslant\omega$ 是基数，

(1) $\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\kappa\omega})=\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\infty\omega})\cap\mathbf{H}(\kappa)$.

(2) 若 κ 是正则的，则 $\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\kappa\omega})$是包含 $\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\omega\omega})$且在$\neg$，$\forall$，$\exists$和下列规则下封闭的最小子集：

$$\Phi\subseteq\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\kappa\omega})\text{且}|\Phi|<\kappa\Rightarrow\bigwedge\Phi,\bigvee\Phi\in\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\kappa\omega}).$$

(3) 若 $\kappa>\omega$ 是极限基数，则

$$\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\kappa\omega})=\bigcup\{\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\lambda\omega}):\lambda<\kappa,\lambda<\mathbf{CN}_1\}.$$

(4) κ 是弱紧致的 $\Leftrightarrow$ 对每一关系 $R\subseteq\mathbf{H}(\kappa)$，$\langle\mathbf{H}(\kappa),\in,R\rangle$是$\Sigma_1$-紧致的.

证明：(1)，(3)和(4)直接来自定义.

证(2)：令 $\mathrm{Form}(\mathscr{L}'_{\kappa\omega})$是如(2)描述的最小的类（不是子集!）.显然，$\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\kappa\omega})\subseteq\mathrm{Form}(\mathscr{L}'_{\kappa\omega})$. 我们来证：

$$\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\kappa\omega})=\mathrm{Form}(\mathscr{L}'_{\kappa\omega}).$$

为此只须证 $\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\kappa\omega})$在$\neg$，$\forall$，$\exists$和下列规则下封闭：

$$\Phi\subseteq\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\kappa\omega})\text{且}|\Phi|<\kappa\Rightarrow\bigwedge\Phi,\bigvee\Phi\in\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\kappa\omega}).$$

对$\neg$，$\forall$，$\exists$的验证平凡. 下面我们考虑对$\bigwedge$的情况. 假设 $\Phi\subseteq\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\kappa\omega})$且$|\Phi|<\kappa$，我们须证$|\mathrm{Sub}(\bigwedge\Phi)|<\kappa$. 但

$$\mathrm{Sub}(\bigwedge\Phi)=\{\bigwedge\Phi\}\cup\bigcup\{\mathrm{Sub}(\varphi):\varphi\in\Phi\}.$$

因为 $\Phi\subseteq \mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\kappa\omega})$，所以对每一 $\varphi\in\Phi$，$|\mathrm{Sub}(\varphi)|<\kappa$. 因为 $|\Phi|<\kappa$ 且 κ 是正则的，所以 $|\mathrm{Sub}(\bigwedge\Phi)|<\kappa$. 同理，$|\mathrm{Sub}(\bigvee\Phi)|<\kappa$. □

注意：上述引理的(4)说明弱紧致基数的概念就是 Σ_1-紧致可容集的概念对任意 $R\subseteq \mathbf{H}(\kappa)$ 的相对化.

称基数 κ 是 **Σ_1-紧致基数** $\Leftrightarrow$ $\langle \mathbf{H}(\kappa),\in\rangle$ 是 Σ_1-紧致的.

称基数 κ 是 **$\Sigma_1(R)$-紧致基数** $\Leftrightarrow$ $\langle \mathbf{H}(\kappa),\in,R\rangle$ 是 Σ_1-紧致的.

据 10.4.2,

κ 是弱紧致基数 $\Leftrightarrow$ 对每一 $R\subseteq \mathbf{H}(\kappa)$，$\kappa$ 是 $\Sigma_1(R)$-紧致基数.

10.4.3 定理　令 $\kappa\geqslant\omega$ 是基数，

(1) 若 κ 是 Σ_1-紧致基数，则 $\kappa=\beth_\kappa$.

(2) κ 是弱紧致基数，则 κ 是强不可达基数.

证：(1)是练习 10.2.7 的一部分，但为了完整性，我们在此仍给出其证明. 假设 κ 是 Σ_1-紧致基数，我们首先证：

$$\mathbf{H}(\kappa)\text{在幂集运算下封闭.} \qquad (10.16)$$

假设 $a\in \mathbf{H}(\kappa)$，因为 κ 是 Σ_1-紧致基数，所以 $\langle \mathbf{H}(\kappa),\in\rangle$ 是 Σ_1-紧致的，因此 $\langle \mathbf{H}(\kappa),\in\rangle$ 满足下列 s-Π_1^1-公式：

$$\forall U\exists b[b\subseteq a\wedge\forall x\in a(x\in b\leftrightarrow U(x))].$$

据 s-Π_1^1-自返原则，对某个 $c\in \mathbf{H}(\kappa)$，$\mathscr{P}(a)\subseteq c$，所以 $\mathscr{P}(a)\in \mathbf{H}(\kappa)$. (10.16)得证.

据(10.16)，对某个极限序数 α，$\kappa=\beth_\alpha$. 假设 $\alpha<\kappa$，易见 $\langle \mathbf{H}(\kappa),\in\rangle$ 满足表达下式的 s-Π_1^1-公式：

$$\begin{aligned}\forall\beta<\alpha\,\exists f[f\text{ 是函数}\wedge \mathrm{Dom}(f)=\beta+1\wedge f(0)=\varnothing\\ \wedge f(\gamma+1)=\mathscr{P}(f(\gamma)),\quad\text{对 }\gamma<\beta\\ \wedge f(\lambda)=\bigcup_{\alpha<\lambda}f(\alpha),\quad\text{对极限序数 }\lambda\leqslant\beta].\end{aligned}$$

据 s-Π_1^1-自返原则，矛盾，因为那会使我们有一 $a\in \mathbf{H}(\kappa)$ 使得 $\mathbf{V}(\alpha)\subseteq a$. 所以我们有 $\alpha\geqslant\kappa$. 但 $\alpha>\kappa$ 会与 $\kappa=\beth_\alpha$ 产生矛盾. 所以 $\alpha=\kappa$. (1)得证.

要验证(2)只须证 κ 是正则的：设这不成立. 不妨令 $f:\alpha\to\kappa$,

其中 $\alpha<\kappa$ 且 $\kappa=\sup\{f(\beta):\beta<\alpha\}$. 在此情况下，$\langle \mathbf{H}(\kappa),\in,f\rangle$ 满足 Σ-公式 $\forall\beta<\alpha\exists\gamma(f(\beta)=\gamma)$，但对这样的序数 γ，不可能存在上界 $\xi<\kappa$ 使得 $\forall\beta<\alpha\exists\gamma<\xi(f(\beta)=\gamma)$. 因此 $\langle \mathbf{H}(\kappa),\in,f\rangle$ 不满足 Σ 自返原则，当然也就不满足 s-Π_1^1-自返原则，所以它不是 Σ_1-紧致的. 据 10.4.2，κ 不是弱紧致基数. □

注意：从第 9 章 § 3 我们看到在 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$ 中对弱紧致基数类有许多(等价的)刻画. 下面我们在 KPU 中看到类似的结果.

我们称可容集 $\mathfrak{M}$ 是 **s-Π_1^1-不可描述可容集** ⇔ 对每一 $R\subseteq\mathfrak{M}$，$(\mathfrak{M},R)$ 满足 s-Π_1^1-自返原则.

称 κ 是 **s-Π_1^1-不可描述基数** ⇔ $\langle \mathbf{H}(\kappa),\in\rangle$ 是 s-Π_1^1-不可描述.

10.4.4 定理 令 κ 是无穷基数，则

κ 是弱紧致基数 ⇔ κ 是 s-Π_1^1-不可描述基数.

证明：据 10.1.27. □

称可容集 $\mathfrak{M}$ 满足 **Π_1^1-自返原则** ⇔ 对每一 Π_1^1-公式 $\Phi(\vec{x}_n)$，

$$\mathfrak{M}\models\Phi(\vec{x}_n)\rightarrow\exists a[\mathrm{Tran}(a)\wedge\vec{x}_n\in a\wedge\Phi(\vec{x}_n)^{(a)}].$$

称 $\mathfrak{M}$ 是 **Π_1^1-不可描述可容集** ⇔ 对每一 $R\subseteq\mathfrak{M}$，

$$(\mathfrak{M},R)\models\Pi_1^1\text{-自返原则}.$$

称 κ 是 **Π_1^1-不可描述基数** ⇔ $\langle \mathbf{H}(\kappa),\in\rangle$ 是 Π_1^1-不可描述的.

令($\mathscr{L}_{\omega\omega}$的)语言 $\mathscr{L}$ 包含一特殊的二元关系符号 E. 称 $\mathscr{L}$ 的结构 $\mathfrak{A}$ 是**良建结构** ⇔ $E^{\mathfrak{A}}$ 是良建的. 称 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$-超有效性质 D 是**良建超有效性质** ⇔ 不存在 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$-闭项的无穷序列 $\langle t_n:n<\omega\rangle$ 使得对所有 $n<\omega$，$(t_{n+1}Et_n)\in$ D. 在下列引理中假设 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是 Skolem-片段.

10.4.5 引理 令 $\mathfrak{M}$ 是本质上不可数的可容集，

(1) 存在 Π-句 $\sigma(\overline{D})$ 使得对所有 D$\subseteq\mathfrak{M}$，

$(\mathfrak{M},\mathrm{D})\models\sigma(\overline{D})$ ⇔ D 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的良建超有效性质.

(2) 若 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的 Skolem-良建结构，则由 $\mathfrak{A}$ 给定的超有效性质 $\mathrm{D}_{\mathfrak{A}}$ 是良建的.

(3) 若 D 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的良建超有效性质，则 D 有良建模型.

证明:(1) 因为 $\mathfrak{M}$ 是本质上不可数的,所以 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的项的每一可数序列 $\langle t_n : n<\omega\rangle$ 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的元素. 因此用 $\mathfrak{M}$ 上一全称量化句就可以表达 D 的良建性.

(2)的证明显然.

(3) 令 D 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的良建超有效性质,据弱完全性定理 8.1.17,D 有模型 $\mathfrak{A}_1$. 令 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathfrak{A}_1$ 的最小子模型,则

$$\mathfrak{A}\prec_{\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}}\mathfrak{A}_1.$$

据练习 8.1.24,$\mathfrak{A}$ 的每一元素可以用 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的一闭项来指称,所以 $\mathfrak{A}$ 是良建的且是 D 中诸句子的模型. □

注意:上述引理也可用来证明完全性定理(见练习 10.4.12).

10.4.6 定理 令 $\mathfrak{M}$ 是本质上不可数的 Σ_1-紧致可容集,T 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的 Σ_1-理论,若每一 $\mathfrak{M}$-有穷 $T_0\subseteq T$ 使得 $T_0\in\mathfrak{M}$ 有良建模型,则 T 有良建模型.

证明:我们知道,

$\mathfrak{M}$ 是本质上不可数的 $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{M}$ 的每一可数子集是 $\mathfrak{M}$ 的元素.

因为 $\mathfrak{M}$ 是 Σ_1-紧致的,所以 $\mathfrak{M}$ 满足 s-Π_1^1-自返原则. 据 10.4.4 和 10.4.5,本定理的证明就完全象

$$\text{s-}\Pi_1^1\text{-自返原则} \Rightarrow \Sigma_1\text{-紧致性}$$

的证明那样(参见 10.1.27 的证明). □

说明:10.4.6 解释了为什么在 §3 中我们具体描述的 Σ_1-紧致集都不是本质上不可数的. 本定理的结论非常强,所以很难找到这样的可容集.

10.4.7 定理 令 κ 是共尾度 $>\omega$ 的基数,

(1) 若 $\langle \mathbf{H}(\kappa),\in,R\rangle$ 满足 s-Π_1^1-自返原则,则它满足 Π_1^1-自返原则.

(2) 若 κ 是 s-Π_1^1-不可描述基数,则 κ 是 Π_1^1-不可描述基数.

证明:(1) 令 $\langle \mathbf{H}(\kappa),\in,R\rangle$ 满足 s-Π_1^1-自返原则,则据 10.4.3,$\kappa=\beth_\kappa$. 因为 $\mathbf{H}(\kappa)$ 在 $\mathscr{P}$ 下封闭,所以 $\mathscr{P}$ 的图形是 $\mathbf{H}(\kappa)$ 上的 s-Π_1^1,

所以 $\mathfrak{M}=\langle\mathbf{H}(\kappa),\in,\mathscr{P},R\rangle$ 也满足 s-Π_1^1-自返原则，从而 $\mathfrak{M}$ 是可容集．因此 $\mathbf{V}(\alpha)$ 的定义是 $\mathfrak{M}$-递归的且 $\mathbf{H}(\kappa)=\mathbf{V}(\kappa)$．下面我们假设 $\langle\mathbf{H}(\kappa),\in,R\rangle$ 不满足 Π_1^1-自返原则，即

$$\langle\mathbf{V}(\kappa),\in,R\rangle\models\forall S\psi(S) \tag{10.17}$$

（其中 ψ 是一阶公式）但对所有 α 使得 $\alpha_0\leqslant\alpha<\kappa$，

$$\langle\mathbf{V}(\alpha),\in,R\cap\mathbf{V}(\alpha)\rangle\models\exists S\neg\psi(S),$$

其中 α_0 足够大使得 ψ 中所有的参数在 $\mathbf{V}(\alpha_0)$ 中．

令 T 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的下列 Σ_1-理论：

(1) KP+幂集公理，

(2) $\langle\mathfrak{M},\mathscr{P}\rangle$ 的 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$-图象，

(3) "c 是一序数"，

(4) $c>\beta$，　对所有 $\beta<\kappa=o(\mathfrak{M})$，

(5) $\forall\alpha\leqslant c\exists S\in\mathbf{V}(\alpha+1)\neg\psi(S)^{(\mathbf{V}(\alpha))}$．

显然，T 的每一 $\mathfrak{M}$-有穷子集有良建模型．不妨就把 c 解释为某个足够大的序数 $\alpha<\kappa$．据 10.4.6，T 有良建模型 $\mathfrak{A}$．因为 $\mathfrak{A}$ 是良建的，所以不妨假设它是传递的，但据 T 的构造，$c^{\mathfrak{A}}$ 是一实序数 $\beta\geqslant\kappa$ 且公式(5)蕴涵存在 $S\subseteq\mathbf{V}(\kappa)$ 使得

$$\langle\mathbf{V}(\kappa),\in,R,S\rangle\models\neg\psi(S),$$

而这与(10.17)矛盾．

(2)是(1)的直接推论．□

注意：10.4.7 相当有意思，因为若 κ 是 Σ_1-紧致的，则 s-$\Pi_1^1=\Sigma_1(\mathscr{P})$，因此 s-$\Pi_1^1\neq\Pi_1^1$．

10.4.8 推论　若 $\kappa>\omega$ 是弱紧致基数，则 κ 是 Mahlo-基数．

证明：因为 κ 是弱紧致的，所以据 10.4.3(2)，κ 是强不可达的．因为 $\kappa>\omega$，所以 $\mathrm{cf}(\kappa)>\omega$，因此据 10.4.4 和 10.4.7(2)，$\kappa$ 是 Π_1^1-不可描述的．令 $C\subseteq\kappa$ 在 κ 中闭无界，下证：

存在 $\lambda<\kappa$ 使得 λ 是强不可达的且 $\lambda\in C$．

令 $\mathfrak{M}=\langle\mathbf{H}(\kappa),\in,\mathscr{P},C\rangle$，考虑在 $\mathfrak{M}$ 中真的下列句子的合取 Φ：

(1) $\forall F\forall\alpha[F$ 是函数 $\wedge\mathrm{Dom}(F)=\alpha$

$\wedge\forall\beta<\alpha(F(\beta)$ 是序数$)\rightarrow\exists\gamma\forall\beta<\alpha(F(\beta)<\gamma)]$.

(2) $\forall\alpha\exists b\exists\beta\exists f[b=P(\alpha)\wedge f:b\rightarrow\beta$ 是单射$]$,

(3) $\forall\alpha\exists\beta(\alpha<\beta\wedge\beta\in C)$.

在式(1)中的$\forall F$是仅有的二阶全称量词,所以Φ是Π_1^1-句子(但不是s-Π_1^1-句子). 据10.4.4后面表述的Π_1^1-自返原则,存在传递集$B\in\mathbf{H}(\kappa)$使得$\Phi^{(B)}$成立. 令$\lambda=o(B)=B\cap\mathbf{ON}$,据式(1),$\lambda$是正则基数. 据式(2),$\lambda$是强极限基数. 据式(3),$\lambda$是$C$的元素的上确界. 因为$C$在$\kappa$中闭无界.所以$\lambda\in C$. □

我们称$\mathscr{T}=\langle T,\leqslant\rangle$是**$\kappa$-树**$\Leftrightarrow\mathrm{Rank}(\mathscr{T})=\kappa$,且对每一$\alpha<\kappa$,$\mathscr{T}$在$\alpha$层有$<\kappa$个结点.

10.4.9 定理 令$\kappa\geqslant\omega$是强不可达基数,则

κ是弱紧致的$\Leftrightarrow$每一κ-树有长树枝.

证明: 据10.4.2,κ是弱紧致的

$\Leftrightarrow$对每一关系$R\subseteq\mathbf{H}(\kappa)$,$\mathfrak{M}=\langle\mathbf{H}(\kappa),\in,R\rangle$是$\Sigma_1$-紧致的.

据10.1.27,上述$\mathfrak{M}$满足s-Π_1^1-自返原则. 因为$\mathbf{H}(\kappa)$在$\mathscr{P}$下封闭,据10.4.7的证明,$\mathfrak{M}_1=\langle\mathbf{H}(\kappa),\in,\mathscr{P},R\rangle$也满足s-$\Pi_1^1$-自返原则,所以$\mathfrak{M}_1$是$\Sigma_1$-紧致的. 因为$\kappa$是强不可达的,所以据10.2.4,

κ是弱紧致的

$\Leftrightarrow$对每一$\mathfrak{M}=\langle\mathbf{H}(\kappa),\in,\mathscr{P},R\rangle$,每一$\mathfrak{M}$-树有长树枝.

显然,这样的$\mathfrak{M}$-树是κ-树. 反之,若$\mathscr{T}$是κ-树,则$\mathscr{T}$同构于$\mathbf{H}(\kappa)$上的一树,因此对$\mathbf{H}(\kappa)$的某一膨胀$\mathfrak{M}=\langle\mathbf{H}(\kappa),\in,R\rangle$,$\mathscr{T}$同构于一$\mathfrak{M}$-树. □

称κ满足"**在R中齐一地s-$\Pi_1^1(R)=\Sigma_1(R)$**"$\Leftrightarrow$对每一s-Π_1^1-公式$\Phi(\vec{v}_n,P,R)$,存在Σ_1-公式$\varphi(\vec{v}_n,P,R)$使得对所有$R\subseteq\mathbf{H}(\kappa)$,

$$\langle\mathbf{H}(\kappa),\in,\mathscr{P},R\rangle\models\forall\vec{v}_n[\Phi(\vec{v}_n,R)\leftrightarrow\varphi(\vec{v}_n,R)].$$

称κ是**$\mathscr{L}_{\kappa\omega}(\mathrm{WF})$-弱紧致基数**$\Leftrightarrow$对$\mathscr{L}_{\kappa\omega}$的每一句子集$T\subseteq\mathbf{H}(\kappa)$,

T的每一幂$<\kappa$的子集T_0有良建模型$\Rightarrow T$有良建模型.

10.4.10 定理 令 κ 是无穷基数，则下列命题等价：

(1) κ 对 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$ 是弱紧致的，即 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$ 是 κ-紧致语言.

(2) $\kappa=\omega$ 或 κ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}(\mathrm{WF})$-弱紧致的.

(3) κ 是 s-Π_1^1-不可描述的.

(4) $\kappa=\omega$ 或 κ 是 Π_1^1-不可描述的.

(5) κ 是强不可达的且每一 κ-树有长树枝.

(6) κ 是强不可达的且对每一 $R\subseteq\mathbf{H}(\kappa)$，

$$\langle\mathbf{H}(\kappa),\in,R\rangle \text{有真初等终端扩张}.$$

(7) κ 是强不可达的且 $\kappa=\omega$，或对每一 $R\subseteq\mathbf{H}(\kappa)$，

$$\langle\mathbf{H}(\kappa),\in,R\rangle \text{有真良建的初等终端扩张}.$$

(8) κ 是强不可达的且满足

$$\text{“在 } R \text{ 中齐一地 s-}\Pi_1^1(R)=\Sigma_1(R)\text{”}.$$

证明：(1) $\Leftrightarrow$ (3)：据 10.4.4.

(3) $\Leftrightarrow$ (4)：据 10.4.7(2)和“s-Π_1^1-公式类$\subset\Pi_1^1$-公式类”.

(1) $\Leftrightarrow$ (5)：据 10.4.3(2)和 10.4.9.

(1) $\Rightarrow$ (2)：据 10.4.6.

(2) $\Rightarrow$ (7)：据紧致性论证，显然.

(7) $\Rightarrow$ (6)：对 $\kappa>\omega$，显然；对 $\kappa=\omega$，据 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$ 的紧致性定理.

(6) $\Rightarrow$ (5)：令 $\mathscr{T}=\langle T,\leqslant\rangle$ 是 κ-树. 不妨假设 $T\subseteq\kappa$. 令 $\mathfrak{M}=\langle\mathbf{H}(\kappa),\in,T,\leqslant,\mathrm{Lev}\rangle$. 我们可以把 $\in,T,\leqslant,\mathrm{Lev}$ 都编码成一个 $R\subseteq\mathbf{H}(\kappa)$. 所以据假设(6)，存在 $\mathfrak{M}$ 的真初等终端扩张 $\mathfrak{N}=\langle N,E,T_1,\leqslant_1,\mathrm{Lev}_1\rangle$. 令 $b\in B$ 是序数使得 $b\notin\mathbf{H}(\kappa)$，且令 $x\in T$ 满足 $\mathfrak{N}\models x\in\mathrm{Lev}_1(b)$，则 $\{y\in\mathbf{H}(\kappa):y\leqslant_1 x\}$ 就是 $\mathscr{T}$ 的长树枝.

(3) $\Rightarrow$ (8)：令 $\Phi(x,R)=\forall S\varphi(x,R,S)$ 是包含新增关系符号 R 的 s-Π_1^1-公式. 对任意 R，$\langle\mathbf{H}(\kappa),\in,\mathscr{P},R\rangle$ 满足下列公式之一 $\Leftrightarrow$ 它满足下列全部公式：

$\Phi(x,R)$，　$\forall S\varphi(x,R,S)$，

$\exists a[\mathrm{Tran}(a)\wedge x\in a\wedge\forall S\subseteq a(\varphi(x,R,S)^{(a)})]$，

$\exists a\exists b[\mathrm{Tran}(a)\wedge x\in a\wedge b=\mathscr{P}(a)\wedge\forall S\in b(\varphi(x,R,S)^{(a)})]$.

从第二个公式到第三个公式是根据假设(3)；对所有 R，最后一个公式就是等价 $\Phi(x,R)$ 的 Σ_1-公式 $\psi(x,\mathscr{D},R)$.

(8) ⇒ (3)：因为 κ 是强不可达的，所以 $\mathbf{H}(\kappa)=\mathbf{V}(\kappa)$. 因为 $\mathbf{H}(\kappa)=\bigcup_{\alpha<\kappa}\mathbf{H}(\alpha)$，所以 $\mathfrak{M}=\langle \mathbf{H}(\kappa),\in,\mathscr{D},R\rangle$ 是可解的，因此若 $\mathfrak{M}$ 满足 s-$\Pi_1^1=\Sigma_1$，则据 10.1.30，$\mathfrak{M}$ 满足 s-Π_1^1-自返原则. □

说明：(Ⅰ) 对 $\kappa>\omega$，弱紧致性和 Π_1^1-不可描述性之间的等价性由 Hanf 和 Scott 在其[1961]中给出.

(Ⅱ) Hanf 在其[1964]证明第一个弱紧致基数 $\kappa>\omega$ 要比第一个强不可达基数大得多.

(Ⅲ) (3) ⇔ (8)的证明是 Kunen 的[1968a]的一结果的变种.

10.4.11 定理 令 $\kappa>\omega$ 是可测基数，$\mathscr{D}$ 是 κ 上的正规超滤，则相对 $\mathscr{D}$ 几乎所有 $<\kappa$ 的基数是弱紧致的，即

$$\{\lambda<\kappa:\lambda\text{ 是弱紧致基数}\}\in\mathscr{D}.$$

证明：这里我们运用 J. Stavi 在其[1978]中的证明. 构造超幂

$$\prod_{\mathscr{D}}\langle \mathbf{V},\in\restriction\mathbf{V}\rangle,\quad \text{其中 } \mathbf{V}=\{x:x=x\}.$$

显然，$\prod_{\mathscr{D}}\langle \mathbf{V},\in\restriction\mathbf{V}\rangle$ 是良建且外延的，据 9.3.7，存在崩塌同构 F 使得

$$F:\prod_{\mathscr{D}}\langle \mathbf{V},\in\restriction\mathbf{V}\rangle\cong\langle M,\in\restriction M\rangle,$$

其中 M 是传递集. **注意**：$\langle M,\in\restriction M\rangle$ 是 **ZFC** 的模型且 M 包含所有的序数. 对 $a\in\mathbf{V}$，令 $f(a)=F((c_a)_{\mathscr{D}})$ 是相对 $\mathscr{D}$ 的等价类，其中 c_a 是从 κ 到 $\{a\}$ 的常值函数，$(c_a)_{\mathscr{D}}$ 是相对 $\mathscr{D}$ 的等价类. 显然，f 是从 $\langle \mathbf{V},\in\rangle$ 到 $\langle M,\in\restriction M\rangle$ 中的初等映射，所以对 $a\in\mathbf{H}(\kappa)$，$f(a)=a$ 但 $f(\kappa)>\kappa$. **注意**：$\mathbf{H}(\kappa)\in M$ 且

$$\langle M,\in\restriction M\rangle\models\text{“}\kappa\text{ 是强不可达基数”}.$$

若 $X\subseteq\mathbf{H}(\kappa)$，则 $X=f(X)\cap\mathbf{H}(\kappa)$，所以据传递性，$X\in M$. 据 $\mathscr{D}$ 的正规性，$\kappa=F(\mathrm{id}_{\mathscr{D}})$，其中 id 是 κ 上的恒等函数. 据超积基本定理，对所有集合论公式 $\varphi(u,\vec{v}_n)$ 和所有 n 元组 $\vec{a}_n\in\mathbf{V}$，有

$\langle M, \in \upharpoonright M\rangle \models \varphi[\kappa, f(a_1), \cdots, f(a_n)]$

$$\Leftrightarrow \{\alpha < \kappa : \langle \mathbf{V}, \in \upharpoonright \mathbf{V}\rangle \models \varphi[\alpha, \vec{a}_n]\} \in \mathscr{D} \tag{10.18}$$

令 $S = \mathbf{H}(\kappa) \cap \{s : s$ 是 $\mathscr{L}_{\infty}$ 的句子集且有模型$\}$. 先证:

$$\left.\begin{array}{l}\langle M, \in \upharpoonright M\rangle \models \forall X \subseteq \mathbf{H}(\kappa)[\forall a \in \mathbf{H}(\kappa) \\ (a \subseteq X \Rightarrow a \in f(S)) \Rightarrow X \in f(S)].\end{array}\right\} \tag{10.19}$$

假设(10.19)不成立,则存在集合 $X \subseteq \mathbf{H}(\kappa)$ 使得对所有 $a \in \mathbf{H}(\kappa)$, $a \subseteq X \Rightarrow a \in f(S)$ 但 $X \notin f(S)$. 特别是,对所有无穷基数 $\lambda < \kappa$, $X \cap \mathbf{H}(\lambda) \in f(S)$ 但 $X = f(X) \cap \mathbf{H}(\kappa) \notin f(S)$, 因此在 M 中, κ 是最小的基数 λ 使得 $f(X) \cap \mathbf{H}(\lambda) \notin f(S)$. 据(10.18),

$\{\alpha : \langle \mathbf{V}, \in \upharpoonright \mathbf{V}\rangle \models$ "α 是最小基数 λ 使 $X \cap \mathbf{H}(\lambda) \notin S\} \in \mathscr{D}$.

但这是荒谬的,因为至多存在一基数有此性质,故(10.19)成立.

据(10.18)和(10.19),我们有

$\{\lambda < \kappa : \lambda$ 是基数且 $\langle \mathbf{V}, \in \upharpoonright \mathbf{V}\rangle \models \forall X \subseteq \mathbf{H}(\lambda)$

$[\forall a \in \mathbf{H}(\lambda)(a \subseteq X \Rightarrow a \in S) \Rightarrow x \in S]\} \in \mathscr{D}$.

这表明相对 $\mathscr{D}$ 几乎所有 $< \kappa$ 的基数是弱紧致的. □

练 习

10.4.12 令 $\mathfrak{M}$ 是本质上不可数的可容集, Θ 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的 s-Π_1^1-句子集,证明下列句子集是 s-Π_1^1:

$\{\varphi \in \mathscr{L}_{\mathfrak{M}} : \varphi$ 在 Θ 的所有良建模型中真$\}$.

10.4.13 令 $\kappa > \omega$ 是弱紧致基数. 证明:

$C \subseteq \kappa$ 在 κ 中闭无界 $\Rightarrow$ 存在 Mahlo-基数 $\lambda < \kappa$, $\lambda \in C$.

10.4.14 设对每一 R, $\langle \mathbf{H}(\kappa), \in, \mathscr{P}, R\rangle$ 满足 s-$\Pi_1^1 = \Sigma_1$. 证:

$\langle \mathbf{H}(\kappa), \in, \mathscr{P}\rangle$ 满足"在 R 中齐一地 s-$\Pi_1^1(R) = \Sigma_1(R)$".

10.4.15 弱紧致基数的定义如(9.4)给出(参见第 9 章),令 Form($\mathscr{L}_{\infty\omega}$)是包含 Form($\mathscr{L}_{\infty\omega}$)(在第 1 章 §1 第二小节意义上)且在 $\neg$, $\wedge$, $\vee$ 和下列规则下封闭的最小公式聚合:

若 $\varphi \in$ Form($\mathscr{L}_{\infty\infty}$)且 X 是 φ 中出现的变元集,则 $\exists X\varphi$ 和 $\forall X\varphi$ 在 Form($\mathscr{L}_{\infty\infty}$)中.

对任意 κ，令 $\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\kappa\kappa})=\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\infty\infty})\cap \mathbf{H}(\kappa)$.

下面的命题证明了第 9 章和第 10 章关于弱紧致基数的定义是等价的：

(1) 证明 $\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\kappa\kappa})=\{\varphi\in \mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\infty\infty}):|\mathrm{Sub}(\varphi)|<\kappa\}$.

(2) 考虑下列 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega_1}$的句子：

$$\forall\{v_n:n<\omega\}\bigvee_{n<\omega}\neg(v_{n+1}Ev_n),$$

$$\forall\{v_n:n<\omega\}\exists w\forall x(xEw\leftrightarrow\bigvee_{n<\omega}x=v_n).$$

对 $\varphi\in\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\infty\infty})$，请读者给出"$\mathfrak{M}\models\varphi[f]$"的形式定义使得这些句子分别表述良建性和本质上不可数性.

(3) 证明 $\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$的每一句子的每一子公式有$<\kappa$个自由变元.

(4) 令 κ 是强不可达的，$\varphi\in\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\kappa\kappa})$. 证明若 φ 有模型，则 φ 有 $\mathbf{H}(\kappa)$中的模型. 令 $\Theta\subseteq\mathbf{H}(\kappa)$是 $\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$的句子集，证明若 Θ 有模型，则 Θ 有幂为 κ 的模型.

[提示：修正通常的 Löwenheim-Skolem-证明.]

(5) 令 κ 相对 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$是弱紧致的. 证明 κ 相对 $\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$是弱紧致的，即令 Θ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$的句子集使得每一幂$<\kappa$ 的子集 $\Theta_0\subseteq\Theta$ 有模型，证明 Θ 有模型.

[提示：对 $\kappa=\omega$，显然. 对 $\kappa>\omega$，运用 10.4.10(7)于$\langle\mathbf{H}(\kappa),\in,\mathscr{D},\Theta\rangle$且据下列事实：上述(4)在 $\mathbf{H}(\kappa)$中成立，因此在任何一个初等终端扩张下成立；$\mathbf{H}(\kappa)$在长度$<\kappa$ 的序列下封闭.]

10.4.16 证明：κ 是弱紧致基数 $\Leftrightarrow$ $\kappa\to(\kappa)^2_2$.

[提示：用 10.4.10(7)来分别证明 $\kappa\to(\kappa)^2_2$ 和 $\omega\to(\omega)^2_2$；再用 $\kappa\to(\kappa)^2_2$证明 10.4.10(5).]

10.4.17(Kunen) 令 κ 是最小的强不可达基数使得$\langle\mathbf{H}(\kappa),\in\rangle$有初等终端扩张. 证明$\langle\mathbf{H}(\kappa),\in\rangle$没有良建的初等终端扩张.

§5 强于 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的语言的 Σ_1-紧致性

前几节我们研究了 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的 Σ_1-紧致性，本节我们要研究比

$\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 更强的语言的 Σ_1-紧致性.

在本节第 1 小节，我们要考虑语言 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}B}$，其中 $\mathfrak{M}$ 是可容集，B 是 $\mathfrak{M}$ 的 Δ_0-子集，$\mathscr{L}_{\mathfrak{M}B}$包含 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}\subseteq\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\infty\omega})$的公式，但还允许量词$\forall\vec{x}$，$\exists\vec{x}$，其中 $\vec{x}$ 是由 $b\in B$ 指标的个体变元集. 类似 Barwise 的[1969a]中的方法，我们要建立 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}B}$是 Σ_1-紧致的的充分条件以及在某些场合的必要条件. 这样，我们要用到无穷 Skolem-函数方法，因此对每一 $b\in B$，我们允许 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}B}$有 b 元关系和函数符号. $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}B}$ 的主要结果是证明下列两个命题等价：令 $\mathfrak{M}$ 是 Σ_1-紧致的，

(1) $\mathfrak{M}$ 是 q-局部封闭的且 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}B}$是 Σ_1-紧致的.

(2) 存在初始递归 B-封闭的集合 $\mathfrak{M}_1$ 使得 $\mathfrak{M}\prec_{s\text{-}\Pi_1^1}\mathfrak{M}_1$.

这样我们就可以证明许多 Σ_1-紧致的语言 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}B}$的存在性；特别是不用假设强紧致基数的存在就可以证明存在任意大的 κ 使得 $\mathscr{L}_{H(\kappa),H(\kappa)}$是 Σ_1-紧致的.

本节第 2 小节要考虑语言 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}(\mathrm{WF})$，即 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}\cup\{\mathrm{WF}\}$，其中 WF 是一公式述说一给定的关系是良建的. 根据 Barwise 的[1969a]的思想，我们能建立一个与 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}(\mathrm{WF})$的 Σ_1-紧致性等价的自返原则，特别是我们可以用此自返原则证明：

存在可数的 $\mathfrak{M}$ 使得 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}(\mathrm{WF})$是 Σ_1-紧致的.

这个结果扩张了 10.4.6. 最后我们对某些 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}(\mathrm{WF})$，证明一些 Σ_1-非紧致的结果.

在进入本节主题前，我们先介绍一些预备知识. 假设读者熟悉初始函数递归理论(参见 R. B. Jensen-Karp 的[1971]). 本节我们还用下列事实：

$\mathfrak{M}$ 传递且在初始递归下封闭 $\Rightarrow\mathfrak{M}\vdash\Delta_0$-分离公理.

注意：初始递归封闭性要比可容性弱，它不必然满足 Δ_0-聚合公理，所以初始递归封闭集不必然是可容集.

若 $\vec{c}$ 是诸集合的一有穷序列，我们称一关系或函数是 **$\vec{c}$-初始递归关系或 $\vec{c}$-初始递归函数** $\Leftrightarrow$ 它在 $\vec{c}$ 中是初始递归的；称 Δ_0-公

式是 **$\Delta_0(\vec{c})$-公式** ⇔ 它是其常元(参数)来自 $\vec{c}$ 的 Δ_0-公式(这些常元自我解释). 类似地我们可以定义 s-$\Pi_1^1(\vec{c})$-公式,等等.

给定集合 B,对 $b\in B$,我们称一函数是 **b-序列** ⇔ 它的定义域为 b. 若 $\vec{x}$ 是一序列,我们就简单地用 $a\subseteq\vec{x}$ 表示 $a\subseteq\mathrm{Ran}(\vec{x})$. 当 $b=\mathrm{Dom}(\vec{x})$时,就用 $\vec{x}$-序列表示 b-序列. 令

$$X^{<B}=\bigcup\{X^b:b\in B,X^b\text{ 是所有函数 }f:b\to X\text{ 的集合}\}.$$

称 X 是 **B-封闭集** ⇔ $X^{<B}\subseteq X$.

本节固定 $q=q(\vec{v})$是集合论公式,称函数 f 是 **q-序列** ⇔

$$\mathrm{Dom}(f)\subseteq q^{\mathbf{V}}=\{\vec{a}_n:\langle\mathbf{V},\in\rangle\models q[\vec{a}_n]\},$$

称集合 X 是 **q-封闭集** ⇔ X 是 q^X-封闭的.

称集合 $\mathfrak{M}$ 是 **q-局部封闭集** ⇔ 对每一传递集 $\mathfrak{M}_0\in\mathfrak{M}$,存在 $q^{\mathfrak{M}_0}$-封闭和初始递归封闭的传递集 $\mathfrak{M}_1$ 使得 $\mathfrak{M}_0\subseteq\mathfrak{M}_1\subseteq\mathfrak{M}$.

我们称 $\mathfrak{M}$ 是 **$S_1,\cdots,S_n$-可容集** ⇔ $\mathfrak{M}$ 是传递的且满足 Σ-自返原则和下列 Δ_0-分离原则:

若 $\theta(S_1,\cdots,S_n)$是 Δ_0-公式且 $b\in M$,则

$$\{x\in b:\mathfrak{M}\models\theta[x]\}\in\mathfrak{M}.$$

10.5.1 引理 假设 $\mathfrak{M}$ 是 $\mathscr{F}$-封闭和初始递归封闭的传递集且满足 s-Π_1^1-自返原则(**注意**:本节的 s-Π_1^1 允许有函数符号),则

(1) $\mathfrak{M}=\mathbf{V}(\kappa)=\mathbf{H}(\kappa)$, 对某个基数 κ 使得 $\kappa=\beth_\kappa$,

(2) $\mathfrak{M}$ 是 q-局部封闭的, 对任意 $\Delta_0(\vec{c})$-公式 $q(\vec{v}_n)$使 $\vec{c}\in\mathfrak{M}$.

证明:(1) 据 Barwise 的[1969a]的推论 4.6,$\mathfrak{M}$ 是 P-可容的,其中 P 是 $\mathscr{F}$ 的图形,所以函数$\langle\mathbf{V}(\beta):\beta<\mathrm{o}(\mathfrak{M})\rangle$可以在 $\mathfrak{M}$ 中递归定义,因此 $\mathfrak{M}=\bigcup\limits_{\beta<\alpha}\mathbf{V}(\beta)=\mathbf{V}(\beta)$,其中 $\alpha=\mathrm{o}(\mathfrak{M})$. (1)的其余的证明来自 Barwise 的[1969a]的 p. 422 的说明.

(2) 令 $B_0=q^{\mathfrak{M}_0}$,其中 $\mathfrak{M}_0\in\mathfrak{M}$ 是传递的,则 $B_0\in\mathfrak{M}$. 据 Σ-自返原则,存在正则基数 $\lambda<\kappa$ 使得对所有 $b\in B_0$, $|b|<\lambda$. 定义序列 $\langle\mathfrak{M}_\alpha:\alpha\leqslant\lambda\rangle$如下:

$\mathfrak{M}_{\alpha+1}=\mathscr{F}(\mathfrak{M}_\alpha)$的初始递归闭包,

$$\mathfrak{M}_\delta = \bigcup_{\alpha<\delta} \mathfrak{M}_\alpha, \quad 若\ \delta\ 是极限序数.$$

显然，$\mathfrak{M}_\lambda \in \mathfrak{W}$ 且 $\mathfrak{M}_\lambda$ 是 B_0 封闭的. □

一、$\mathscr{L}_{\mathfrak{M}_q}$的 Σ_1-紧致性

令 $\vec{c}$是诸集合的有穷序列，$q=q(\vec{x})$是 $\Delta_0(\vec{c})$-公式使得 $\omega\subseteq q^V$ 且 q^V 是传递的. 为了方便，我们规定 q 有下列性质：存在 $\vec{c}$-初始递归函数 p 使得若 $\vec{x},\vec{y}$ 是 q-序列，则 $p(\vec{x},\vec{y})$是 q-序列且 $\mathrm{Ran}(p)=\mathrm{Ran}(\vec{x})\bigcup\mathrm{Ran}(\vec{y})$. 下面我们先来定义语言 $\mathscr{L}_{\infty q}$.

10.5.2 定义 (1) 语言 $\mathscr{L}_{\infty q}$有下列 4 类符号：

① 个体变元 $v_a=\langle 0,a\rangle$，　　对每一集合 a.

② 个体常元符号 $c_a=\langle 1,a\rangle$，　对每一集合 a.

③ 关系符号 $R_a^b=\langle 2,a,b\rangle$，　对每一集合 a 和每一 $b\in q^V$ 使得 $b\neq\varnothing$.

④ 函数符号 $F_a^b=\langle 3,a,b\rangle$，　对每一集合 a 和每一 $b\in q^V$ 使得 $b\neq\varnothing$.

(**说明**：③和④中的 R_a^b 和 F_a^b 的上标 b 指称 R_a 和 F_a 的元数. 此外，用 $\equiv$ 表示 R_0^2 并把它看作是满足等词公理的非逻辑符号.)

(2) $\mathscr{L}_{\infty q}$的项的类 $\mathrm{Term}(\mathscr{L}_{\infty q})$是最小的类使得

① $v_a,c_a\in\mathrm{Term}(\mathscr{L}_{\infty q})$，　对所有的 a，

② 若$\varnothing\neq b\in q^V$ 且 $\vec{t}\in(\mathrm{Term}(\mathscr{L}_{\infty q}))^b$，则对所有的 a，

$$F_a^b(\vec{t})=\langle 4,a,b,\vec{t}\rangle\in\mathrm{Term}(\mathscr{L}_{\infty q}).$$

(3) 若$\varnothing\neq b\in q^V$ 且 $\vec{t}\in(\mathrm{Term}(\mathscr{L}_{\infty q}))^b$，则对所有的 a，

$$R_a^b(\vec{t})=\langle 5,a,b,\vec{t}\rangle 是原子公式.$$

(4) $\mathscr{L}_{\infty q}$的公式类 $\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\infty q})$是最小的类使得

① $\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\infty q})$包含所有的原子公式，

② 若 $\varphi\in\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\infty q})$，则$\neg\varphi=\langle 6,\varphi\rangle\in\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\infty q})$，

③ 若 Φ 是集合且 $\Phi\subseteq\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\infty q})$，则

$\bigwedge\Phi=\langle 7,\Phi\rangle$，$\bigvee\Phi=\langle 8,\Phi\rangle\in \mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\infty q})$，

① 若 $\varphi\in \mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\infty q})$且 $\vec{x}$ 是变元的单射 q-序列，则

$\forall\vec{x}\varphi=\langle 9,\vec{x},\varphi\rangle$，$\exists\vec{x}\varphi=\langle 10,\vec{x},\varphi\rangle\in \mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\infty q})$.

其它的语法和语义概念的定义如通常．我们用 $\mathrm{Term}_0(\mathscr{L}_{\infty q})$ 表示 $\mathscr{L}_{\infty q}$的闭项集，用 $\varphi(\vec{x})$表示 $\vec{x}$ 是变元的 q-序列使得 $\mathrm{Fv}(\varphi)\subseteq\vec{x}$. 若 $\vec{x}=\langle x_i;i\in b\rangle$，$\vec{t}=\langle t_i;i\in b\rangle$，则我们也用 $\varphi(\vec{x}/\vec{t})$表示 $\mathrm{SF}^{\vec{x}}_{\vec{t}}(\varphi)$（当然这里我们假设 $x_i=x_j\Rightarrow t_i=t_j$）.

说明：$\mathscr{L}_{\infty q}$的集合论公式 q 可以看作是一种规定，例如 q 可以是① $x\equiv x$，② "x 是序数"，③ $x<\alpha$（其中 α 是一固定序数）；若 α 是无穷基数 λ，则 $\mathscr{L}_{\infty q}$就是 $\mathscr{L}_{\infty\lambda\rho\pi}$，当然其中 ρ,π 的大小依赖 λ. 若 $\lambda=\omega$，$\mathscr{L}_{\infty q}$就是 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$.

10.5.3 定义　Skolem-语言 $\mathscr{L}^{*}_{\infty q}$从 $\mathscr{L}_{\infty q}$根据下列方法得到：对每一 $\mathscr{L}_{\infty q}$-公式 φ 和 $\vec{x},\vec{z},i$，增加一 b 元函数符号 $F_{\varphi,\vec{x},\vec{z},i}$使得

（1）$\vec{x}$ 是变元的单射 q-序列使得 $i\in \mathrm{Dom}(\vec{x})$，

（2）$\vec{z}$是变元的 q-序列，$b=\mathrm{Dom}(\vec{z})$且 $\mathrm{Fv}(\exists\vec{x}\varphi)\subseteq\vec{z}$.

说明：上述定义说明若$\exists\vec{x}\varphi(\vec{t})$在预期的解释下成立，其中 $\vec{t}$ 是 $\vec{z}$-序列，则 $\varphi(\vec{t},\vec{x}/\vec{s})$也在该解释下成立，其中

$$\vec{s}=\langle F_{\varphi,\vec{x},\vec{z},i}(\vec{t});i\in \mathrm{Dom}(\vec{x})\rangle.$$

10.5.4 引理　下列关系和函数是 $\bar{c}$-初始递归的：

（1）① $x\in \mathrm{Term}(\mathscr{L}_{\infty q})$，

② $x\in \mathrm{Term}_0(\mathscr{L}_{\infty q})$，

③ $x\in \mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\infty q})$，

④ $\mathrm{Fv}(x)$，

⑤ $x\in \mathrm{Sent}(\mathscr{L}_{\infty q})$，

⑥ $\mathrm{SF}^{\vec{x}}_{\vec{t}}(\varphi)$　（这里 SF 作为 $\vec{t},\vec{x},\varphi$ 的函数）.

（2）① x 是 Skolem-函数，

② $x\in \mathrm{Term}(\mathscr{L}^{*}_{\infty q})$，

③ $x\in \mathrm{Term}_0(\mathscr{L}^{*}_{\infty q})$，

④ $x \in \mathrm{Form}(\mathscr{L}^*_{\infty q})$,

⑤ $x \in \mathrm{Sent}(\mathscr{L}^*_{\infty q})$.

证明:分别考察上述各定义,**注意**:$\mathscr{L}_{\infty q}$,$\mathscr{L}^*_{\infty q}$中的项和公式都是集合. □

下面假设 $\mathfrak{M}$ 是初始递归封闭的传递集使得 $q \in \mathfrak{M}$. $\mathscr{L}_{\infty q}$对 $\mathfrak{M}$ 的限制以通常的方式定义如下:

10.5.5 定义 (1) 定义语言 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}q}$使得

$\mathrm{Term}(\mathscr{L}_{\mathfrak{M}q}) = \mathrm{Term}(\mathscr{L}_{\infty q}) \cap \mathfrak{M}$,

$\mathrm{Term}_0(\mathscr{L}_{\mathfrak{M}q}) = \mathrm{Term}_0(\mathscr{L}_{\infty q}) \cap \mathfrak{M}$,

$\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\mathfrak{M}q}) = \mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\infty q}) \cap \mathfrak{M}$,

$\mathrm{Sent}(\mathscr{L}_{\mathfrak{M}q}) = \mathrm{Sent}(\mathscr{L}_{\infty q}) \cap \mathfrak{M}$.

(2) **Skolem-语言** $\mathscr{L}^*_{\mathfrak{M}q}$也可以类似定义:

$$\mathrm{Term}(\mathscr{L}^*_{\mathfrak{M}q}) = \mathrm{Term}(\mathscr{L}^*_{\infty q}) \cap \mathfrak{M}, \quad \cdots.$$

若 $B = q^{\mathfrak{M}}$,则我们也用 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}B}$表示 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}q}$. 若 q 是公式 $x \in \lambda$(其中 $\lambda > \omega$ 是基数),则 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}q} = \mathscr{L}_{\mathfrak{M}\lambda}$是有无穷元的关系和函数符号的语言. 若 $\lambda = \omega$,则 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}\omega} = \mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$.

下面我们先来考察 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}q}$是 Σ_1-紧致的一个充分条件. 所用方法是本章§1 证明"$\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的 s-Π^1_1-自返原则蕴涵 Σ_1-紧致性"所用方法的概括.

我们用 $\mathrm{RF}_{\infty q}$和 $\mathrm{RF}^*_{\infty q}$分别表示 $\mathscr{L}_{\infty q}$和 $\mathscr{L}^*_{\infty q}$的归约公式类,即只允许原子公式前面有否定号的公式类(参见 1.3.6).

10.5.6 引理 存在初始递归函数$'$使得

(1) $\varphi \in \mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\infty q}) \Rightarrow \varphi' \in \mathrm{RF}_{\infty q}$,

$\varphi \in \mathrm{Form}(\mathscr{L}^*_{\infty q}) \Rightarrow \varphi' \in \mathrm{RF}^*_{\infty q}$;

(2) $\vdash \varphi \leftrightarrow \varphi'$, 对所有 φ;

(3) φ'恰好有与 φ 相同的自由变元、约束变元和非逻辑符号.

证明:据定义易得. □

下面的定义是为了用 Skolem-函数消去公式中的存在量词.

10.5.7 定义 对 $\varphi(\vec{y})\in \mathrm{RF}_{\infty q}$（这意味着 $\vec{y}$ 是 q-序列），递归定义公式 φ^* 如下：

(1) 若 φ 是原子公式或原子公式的否定，则 $\varphi^*=\varphi$，

(2) 若 φ 是 $\bigwedge\Phi$ 或 $\bigvee\Phi$，则 φ^* 是 $\bigwedge_{\psi\in\Phi}\psi^*$ 或 $\bigvee_{\psi\in\Phi}\psi^*$，

(3) 若 $\varphi=\forall\vec{x}\psi$，则 $\varphi^*=\forall\vec{x}\psi^*(\vec{z})$，其中 $\vec{z}=p(\vec{x},\vec{y})$（这里的 p 如 10.5.2 前所规定，因此 $\mathrm{Fv}(\psi)\subseteq\vec{z}$）.

(4) 若 $\varphi=\exists\vec{x}\psi$，则 $\varphi^*=\mathrm{SF}_{\vec{f}}^{\vec{x}}(\psi^*)^+(\vec{z})$，其中 $\vec{f}=\langle f_{\psi,\vec{x},\vec{y},i}(\vec{y}):i\in b\rangle$，$b=\mathrm{Dom}(\vec{x})$，$\vec{z}=p(\vec{x},\vec{y})$，$(\psi^*)^+(\vec{z})$ 是 $\psi^*(\vec{z})$ 使得其约束变元齐一地改变确保 $f_{\psi,\vec{x},\vec{y},i}(\vec{y})$ 对 $x_i\in\vec{x}$ 的代换是自由的.

10.5.8 引理 (1) 函数 $k(\varphi,\vec{y})=\varphi^*(\vec{y})$ 是 $\vec{c}$-初始递归的.

(2) 若 $\varphi(\vec{y})\in\mathrm{RF}_{\infty q}$，则 $\varphi^*(\vec{y})\in\mathrm{RF}_{\infty q}^*$ 且 $\varphi^*(\vec{y})$ 是全称公式.

(3) 若 $\mathrm{Fv}(\varphi(\vec{y}))\subseteq\mathrm{Fv}(\varphi^*(\vec{y}))\subseteq\vec{y}$，则所有 $\varphi(\vec{y})\in\mathrm{RF}_{\infty q}$.

(4) $\vdash\varphi^*(\vec{y})\to\varphi(\vec{y})$，　对所有 $\varphi(\vec{y})\in\mathrm{RF}_{\infty q}$.

证明：(1) 据 k 的递归定义显然.

(2)—(4)的证明要施归纳于 φ 的复杂度. □

注意：据上述(3)，若 φ 是句子，则 φ^* 也是句子.

本小节其余部分，我们固定 $\mathfrak{M}$ 是初始递归封闭的传递集使得 $\vec{c}\in\mathfrak{M}$. 令 $B=q^{\mathfrak{M}}$ 且假设存在初始递归封闭的传递集 $\mathfrak{M}_1\supseteq\mathfrak{M}$ 使得 $\mathfrak{M}_1$ 是 B-封闭的.

10.5.9 定义 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}q}^*$ 的 **$\mathfrak{M}_1$-典范结构** $\mathfrak{A}_0$ 是一结构使得它的个体域 A_0 是更大的语言 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}_1q}^*$ 的闭项集 $\mathrm{Term}_0(\mathscr{L}_{\mathfrak{M}_1q}^*)$，且 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}q}^*$ 的函数以自然方式得到解释（$\mathscr{L}_{\mathfrak{M}q}^*$ 的任意函数 F 对某个 $b\in B$ 是 b 元的，所以若 $\vec{t}$ 是从 b 到 A_0 的任意 b-序列，则据 $\mathfrak{M}_1$ 的 B-封闭性，$\vec{t}\in\mathfrak{M}_1$，所以 $F(\vec{t})\in A_0$，因此 $\mathfrak{A}_0$ 对 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}q}^*$ 的所有函数都有解释）.

下面固定 $\mathrm{RF}_{\mathfrak{M}q}=\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\mathfrak{M}q})\cap\mathrm{RF}_{\infty q}$，$\mathrm{Sent}_{\mathfrak{M}q}=\mathrm{Sent}(\mathscr{L}_{\mathfrak{M}q})\cap\mathrm{RF}_{\infty q}$，等等. 对集合 $T\subseteq\mathrm{Sent}_{\mathfrak{M}q}$，固定 $T^*=\{\varphi^*:\varphi\in T\}$.

10.5.10 引理 假设 T 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}q}^*$ 的归约句子集，则

$$T\text{ 有模型}\Leftrightarrow T^*=\{\varphi^*:\varphi\in T\}\text{ 有 }\mathfrak{M}_1\text{-典范模型}.$$

证明:"$\Leftarrow$":据 10.5.8(4).

"$\Rightarrow$":假设 T 有 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}_q}$-模型 $\mathfrak{A}$,把 $\mathfrak{A}$ 任意膨胀为 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}_{1q}}$的模型,然后如通常定义 Skolem-函数得到 $\mathscr{L}^*_{\mathfrak{M}_{1q}}$-模型 $\mathfrak{A}^*$ 使得 $A^*=A$. 因此对每一 $t\in \mathrm{Term}_0(\mathscr{L}^*_{\mathfrak{M}_{1q}})=A_0$,在 $\mathfrak{A}^*$ 中存在解释 t 的元素 $t^{\mathfrak{A}^*}$.

令 R^{b*}_a 是 $\mathfrak{A}^*$ 中对关系符号 R^b_a 的解释,现定义 $\mathscr{L}^*_{\mathfrak{M}_q}$的 $\mathfrak{M}_1$-典范结构 $\mathfrak{A}_0$ 使得在 $\mathfrak{A}_0$ 中,$\mathscr{L}^*_{\mathfrak{M}_q}$的每一关系符号 R^b_a 由 $\widetilde{R}^b_a$ 解释如下:

$$\widetilde{R}^b_a(\vec{t}\,)\Leftrightarrow R^{b*}_a(\,\vec{t}^{\mathfrak{A}^*}\,),\quad 对所有\ \vec{t}\in(A_0)^b.$$

我们要证明对所有 $\varphi(\vec{y})\in \mathrm{RF}_{\mathfrak{M}_q}$使得 $\vec{y}\in\mathfrak{M}$(其中 $\vec{y}$ 是 q-序列)和从 $\vec{y}$ 到 A_0 的所有 $\vec{y}$-序列 $\vec{t}$:

$$\mathfrak{A}^*\models\varphi(\vec{t}\,)\Rightarrow\mathfrak{A}_0\models\varphi^*(\vec{t}\,)\tag{10.20}$$

施归纳于 φ 的复杂度. 若 φ 是原子公式或原子公式的否定,则据 $\mathfrak{A}_0$ 的定义,就有(10.20)成立. 对 $\wedge$,$\vee$,$\exists\vec{x}$,$\forall\vec{x}$ 的情况的验证完全是例行公事.

从(10.20)直接可得 $\mathfrak{A}_0\models T^*$. □

10.5.11 定义 假设 $S\subseteq\mathfrak{M}_1$,$\mathscr{L}^*_{\mathfrak{M}_q}$的 $\mathfrak{M}_1$-典范结构 $\mathfrak{A}_S$(其个体域 $A_S=A_0$(如前规定))对 $\mathscr{L}^*_{\mathfrak{M}_q}$的关系符号 R^b_a 有下列解释 $(R^b_a)^{\mathfrak{A}_S}$:

$$(R^b_a)^{\mathfrak{A}_S}(\vec{t}\,)\Leftrightarrow\langle a,b,\vec{t}\,\rangle\in S\ 且\ \vec{t}\in(A_0)^b.$$

显然,每一 $\mathfrak{M}_1$-典范模型对某个 S 是 $\mathfrak{A}_S$.

令 $\Gamma(\vec{R}_n,U)$是从某个集合 D 的诸子集到 D 的诸子集的**单调算子**使得

$$U_1\subseteq U_2\Rightarrow\Gamma(\vec{R}_n,U_1)\subseteq\Gamma(\vec{R}_n,U_2).\tag{10.21}$$

例如,若关系 $x\in\Gamma(\vec{R}_n,U)$在结构$\langle A,E,R_1,\cdots,R_k\rangle$中由 U 在其中正出现的公式 $\Phi(\vec{R}_n,U,x)$来定义,则在(10.21)的意义上,Γ 在 U 中是单调的.

若 Φ 是 s-Π^1_1-公式,则我们称 Γ 是 **s-Π^1_1-正算子**.

对每一序数 α 和单调算子 Γ,定义

$$\Gamma^\alpha(\vec{R}_n)=\Gamma(\vec{R}_n,\bigcup_{\beta<\alpha}\Gamma^\beta(\vec{R}_n)),$$

$$\Gamma^\infty(\vec{R}_n)=\bigcup_{\alpha\in\mathrm{ON}}\Gamma^\alpha(\vec{R}_n).$$

因为 D 是集合，所以对某个序数 α，$\Gamma^\infty(\vec{R}_n)=\Gamma^\alpha(\vec{R}_n)$. 因此 $\Gamma^\infty(\vec{R}_n)$ 是 D 的最小子集 U 使得 $\Gamma(\vec{R}_n,U)=U$.

10.5.12 引理 令 $\Gamma(\vec{R}_n,U)$ 是某个结构 $\langle M,E\rangle$ 上的 s-Π_1^1-正算子，则 $\Gamma^\infty(\vec{R}_k)$ 是 $\langle M,E,\vec{R}_n\rangle$ 上的 s-Π_1^1，且 $\Gamma^\infty(\vec{R}_n)$ 的 s-Π_1^1-定义只依赖 Γ 的 s-Π_1^1-定义，不依赖 M,E 或 $\vec{R}_k$.

证明：为了方便，我们在证明中省略参数 $R_1,\cdots,R_k$. **注意**：若 $\Gamma(U)\subseteq U$，则据归纳对每一 α，$\Gamma^\alpha\subseteq U$，因此 $\Gamma^\infty\subseteq U$. 另一方面，$\Gamma(\Gamma^\infty)\subseteq\Gamma^\infty$，所以 $\Gamma^\infty=\bigcap\{U:\Gamma(U)\subseteq U\}$，因此

$$\forall U[\forall y[y\in\Gamma(U)\to U(y)]\to x\in U]$$

就是 $x\in\Gamma^\infty$ 的 s-Π_1^1-定义. □

10.5.13 引理 存在 s-$\Pi_1^1(\vec{c})$-公式 $\Theta(x,S)$ 使得对任意 $S\subseteq\mathfrak{M}_1$，若 $\varphi(\vec{y})$ 是 $\mathscr{L}^{*}_{\mathfrak{M}q}$ 的归约形式的存在公式，$\vec{y}\in\mathfrak{M}$，且 $\vec{t}$ 是从 $\vec{y}$ 到 A_0 的 $\vec{y}$-序列，则

$$(\mathfrak{M}_1,S)\models\Theta(\varphi(\vec{t}),S)\Leftrightarrow\mathfrak{A}_S\models\varphi(\vec{t}).$$

而且 $\Theta(x,S)$ 不依赖 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}_1$.

证明：定义 $\mathfrak{M}_1$ 上算子 $\Gamma(S,U)$ 如下：

$\varphi\in\Gamma(S,U)\Leftrightarrow$ 下列(1)—(5)之一成立：

(1) $\varphi=R_a^b(\vec{t})$， $b\in q^{\mathfrak{M}_1},\vec{t}\in(A_0)^b$ 且 $\langle a,b,\vec{t}\rangle\in S$，

(2) $\varphi=\neg R_a^b(\vec{t})$， $b\in q^{\mathfrak{M}_1},\vec{t}\in(A_0)^b$ 且 $\langle a,b,\vec{t}\rangle\notin S$，

(3) $\varphi=\bigwedge\Phi$， 对所有 $\psi\in\Phi,\psi\in U$，

(4) $\varphi=\bigvee\Phi$， 存在 $\psi\in\Phi,\psi\in U$，

(5) $\varphi=\exists\vec{x}\psi$， $\vec{x}=\langle x_i:i\in b\rangle$ 是个体变元的 $q^{\mathfrak{M}_1}$-序列且存在 $\vec{t}\in(A_0)^b$ 使得 $\mathrm{SF}_{\vec{t}}^{\vec{x}}(\psi)\in U$.

用 $q^{\mathfrak{M}_1}$和 A_0 的定义分别置换 $q^{\mathfrak{M}_1}$和 A_0，我们看到 Γ 是 $\Sigma(\vec{c},S)$-正算子使得其定义不依赖 $\mathfrak{M}_1$. 因此递归定义的极限 $\Gamma^\infty(S)$ 是 $\mathfrak{M}_1$ 上

的 s-$\Pi_1^1(\vec{c},S)$，且 $\Gamma^{\mathfrak{M}}(S)$有一个 s-$\Pi_1^1(\vec{c},S)$ 定义由不依赖 $\mathfrak{M}_1$ 的 s-$\Pi_1^1(\vec{c})$-公式$\Theta(x,S)$给定.

若 φ是存在公式，施归纳于 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}_q}^*$的归约公式 $\varphi=\varphi(\vec{y})$的复杂度，就能看到 $\Theta(x,S)$ 有我们要证的性质. □

10.5.14 引理 存在 T 在其中正出现的 s-$\Pi_1^1(\vec{c})$-公式 $\Phi(T)$ 使得 $\Phi(T)$不依赖 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}_1$ 且对任意 $T\subseteq \text{Sent}(\mathscr{L}_{\mathfrak{M}_q})$，

$$T \text{ 没有模型} \Leftrightarrow (\mathfrak{M}_1,T)\models\Phi(T).$$

证明：据 10.5.6，10.5.10 和 10.5.13，对 $\text{Sent}(\mathscr{L}_{\mathfrak{M}_q})$，

$$\begin{aligned} T \text{ 没有模型} &\Leftrightarrow T' \text{ 没有模型} \quad (\text{见 } 10.5.6)\\ &\Leftrightarrow (T')^* \text{ 没有 } \mathfrak{M}_1\text{-典范模型}\\ &\Leftrightarrow \forall S\exists\varphi[\varphi\in T\wedge\mathfrak{A}_S\models\neg(\varphi')^*\\ &\Leftrightarrow \forall S\exists\varphi[\varphi\in T\wedge\mathfrak{A}_S\models\varphi^{\#}], \end{aligned}$$

其中 $\varphi^{\#}=(\neg(\varphi')^*)'$. 因为$(\varphi')^*$是全称句，所以 $\varphi^{\#}$是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}_q}^*$的归约形式的存在句，因此据 10.5.13，

$$T \text{ 没有模型} \Leftrightarrow \forall S\exists\varphi[\varphi\in T\wedge\Theta(\varphi^{\#},S)].$$

令
$$\Phi(T)=\forall S\exists\varphi[\varphi\in T\wedge\Theta(\varphi^{\#},S)],$$

因为函数 $^{\#}$是 $\vec{c}$-初始递归的，所以 $\Phi(T)$是 s-$\Pi_1^1(\vec{c})$-公式. □

10.5.15 推论 若 $\mathfrak{M}$ 是 q-局部封闭的，则 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}_q}$的有效句子集是 $\mathfrak{M}$ 上的 s-$\Pi_1^1(\vec{c})$.

证明：令 $\Phi(x)$是下列 s-$\Pi_1^1(\vec{c})$-公式：

$$x\in\text{Sent}(\mathscr{L}_{\mathfrak{M}_q})\wedge\forall S[\Theta((\neg x)^{\#},S)],$$

其中 Θ 是 10.5.13 规定的公式，$^{\#}$的规定如 10.5.14 的证明.

下证：

$$\varphi \text{ 是 } \mathscr{L}_{\mathfrak{M}_q}\text{-有效句} \Leftrightarrow \mathfrak{M}\models\Phi(\varphi).$$

令 $\mathfrak{M}_1$ 是初始递归封闭和 $q^{\mathfrak{M}}$-封闭的传递集使得 $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{M}_1$，令 $\varphi\in\mathfrak{M}$，$\mathfrak{M}_0\in\mathfrak{M}$ 使得 $\varphi\in\mathfrak{M}_0$ 且 $\mathfrak{M}_0$ 是初始递归封闭的传递集（这里我们假设 $\omega\in\mathfrak{M}$）. 据 q-局部封闭的性质，选择一初始递归封闭和 $q^{\mathfrak{M}_0}$-封闭的传递集 $\mathfrak{M}'$ 使得 $\mathfrak{M}_0\subseteq\mathfrak{M}'\subseteq\mathfrak{M}$. 据 10.5.14，有

$$\begin{aligned}\varphi\text{是 }\mathscr{L}_{\mathfrak{M}q}\text{-有效句} &\Rightarrow \mathfrak{M}'\models\Phi(\varphi)\\ &\Rightarrow \mathfrak{M}\models\Phi(\varphi)\\ &\Rightarrow \mathfrak{M}_1\models\Phi(\varphi)\\ &\Rightarrow \varphi\text{是 }\mathscr{L}_{\mathfrak{M}_q}\text{-有效句},\end{aligned}$$

其中第三个蕴涵关系根据 s-Π_1^1-公式的保持性. (**注意**:若 κ 是 Σ_1-紧致基数,据 10.5.1,上述等价式可用于 $\mathfrak{M}=\mathbf{H}(\kappa)$ 的情况.)□

假设 $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{M}_1$,我们称 $\mathfrak{M}\prec_{s\text{-}\Pi_1^1}\mathfrak{M}_1\Leftrightarrow$ 对所有 s-Π_1^1-公式 $\Theta(\vec{x})$ 和 $\mathfrak{M}$ 中所有的序列 $\vec{a}$,

$$\mathfrak{M}\models\Theta(\vec{a})\Leftrightarrow\mathfrak{M}_1\models\Theta(\vec{a}).$$

10.5.16 定理 假设 $\mathfrak{M}$ 满足 s-Π_1^1-自返原则且存在初始递归封闭和 $q^{\mathfrak{M}}$-封闭的传递集 $\mathfrak{M}_1$ 使得 $\mathfrak{M}\prec_{s\text{-}\Pi_1^1}\mathfrak{M}_1$(特别是若 $\mathfrak{M}$ 是 q-封闭的),则 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}_q}$是 Σ_1-紧致的.

证明:令 T 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}_q}$的句子集使得对某个 Σ_1-公式 σ,$T=\sigma^{\mathfrak{M}}$,且假设 T 没有模型. 令 $\Phi(T)$是 10.5.14 规定的公式,Φ_1 是用 $\sigma(\varphi)$ 置换"$\varphi\in T$"从 Φ 得到的公式,则 Φ_1 是 s-Π_1^1-公式. 据 10.5.14,有 $(\mathfrak{M}_1,T)\models\Phi(T)$. 因为 $T=\sigma^{\mathfrak{M}}\subseteq\sigma^{\mathfrak{M}_1}$,所以 $\mathfrak{M}_1\models\Phi_1$,因此 $\mathfrak{M}\models\Phi_1$. 据 s-$\Pi_1^1$-自返原则,存在传递集 $\mathfrak{M}_0\in\mathfrak{M}$ 使得 $\mathfrak{M}_0\models\Phi_1$. 令 $T_0=\sigma^{\mathfrak{M}_0}$,则 $T_0\in\mathfrak{M}$,$T_0\subseteq T$ 且 $(\mathfrak{M}_0,T_0)\models\Phi(T_0)$. 因此据 s-$\Pi_1^1$-公式的保持性,$(\mathfrak{M}_1,T_0)\models\Phi(T_0)$,所以据 10.5.14,$T_0$ 没有模型. □

下面的推论是对共尾度为 λ 的 Σ_1-紧致性的概括.

10.5.17 定理 假设 $\mathfrak{M}$ 是初始递归封闭、$\mathscr{P}$-封闭且满足 s-Π_1^1-自返原则的集合,且 $\mathfrak{M}=\bigcup_{\alpha<\lambda}\mathfrak{M}_\alpha$ 使得 λ 是正则基数,且对每一 $\alpha<\lambda$,$\mathfrak{M}_\alpha\in\mathfrak{M}$,则 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}\lambda}$是 Σ_1-紧致的.

证明:令 $q(x)$是"$x<\lambda$",则 $\mathfrak{M}$ 是 q-封闭的,再据 10.5.16. □

显然,基数 κ 是 Σ_1-紧致基数 $\Leftrightarrow$ 片段 $\mathscr{L}_{\mathbf{H}(\kappa)}$是 Σ_1-紧致的.

10.5.18 推论

设 κ 是 Σ_1-紧致基数且 $\lambda\leqslant\mathrm{cf}(\kappa)$,则 $\mathscr{L}_{\mathbf{H}(\kappa),\lambda}$是 Σ_1-紧致语言.

证明:令 $q(x)$是"$x<\lambda$",则 $\mathbf{H}(\kappa)$是 q-封闭的,据 10.5.16 易

得本推论. □

说明:在下列定理中我们能看到,$\lambda \leqslant \mathrm{cf}(\kappa)$不是"$\mathscr{L}_{\mathbf{H}(\kappa),\lambda}$是$\Sigma_1$-紧致语言"的必要条件,因为如Barwise在其[1968]中注意到那样,由下面定理给出的绝大多数κ是奇异的.

10.5.19 定理

(1) 存在任意大的基数κ使得$\mathscr{L}_{\mathbf{H}(\kappa),\mathbf{H}(\kappa)}$是$\Sigma_1$-紧致语言.

(2) 若λ是不可达的,则存在λ个基数$\kappa<\lambda$使得$\mathscr{L}_{\mathbf{H}(\kappa),\mathbf{H}(\kappa)}$是$\Sigma_1$-紧致语言.

证明:先证(2):假设λ是不可达的,令γ_α是第α个序数γ使得$\mathbf{V}(\gamma)$是初始递归封闭的,则Barwise的[1969a]的5.3给出一个正规函数$g:\lambda\to\lambda$使得若$g(\alpha)<\beta<\lambda$,

$$\mathbf{V}(\gamma_{g(\alpha)}) \prec_{s\text{-}\Pi_1^1} \mathbf{V}(\gamma_\beta).$$

这蕴涵(参见Barwise[1969a])$\mathbf{V}(\gamma_{g(\alpha)})$满足s-$\Pi_1^1$-自返原则,所以据10.5.1,$\mathbf{V}(\gamma_{g(\alpha)})=\mathbf{H}(\kappa)$,其中$\kappa=\gamma_{g(\alpha)}=\beth_\kappa$.

令$q(x)$是$x=x$,据10.5.16,我们总能找到一个$\beta>g(\alpha)$使得$\mathbf{V}(\gamma_\beta)$是$\mathbf{H}(\kappa)$-封闭的,其中$\beta<\lambda$,所以对所有$\alpha<\lambda$使得$\kappa=\gamma_{g(\alpha)}$,$\mathscr{L}_{\mathbf{H}(\kappa),\mathbf{H}(\kappa)}$是$\Sigma_1$-紧致语言. □

注意:当$\lambda>\omega$时,"$\mathfrak{M}$在$\mathscr{P}$下封闭"并不是"$\mathscr{L}_{\mathfrak{M}\lambda}$是$\Sigma_1$-紧致语言"的必要条件. Chang在其[1971a]研究了用$\mathscr{L}_{\lambda\lambda}$(其中$\lambda$是正则基数)构造的集合的谱系(hierachy)$\langle \mathbf{C}_\alpha^\lambda:\alpha\in\mathbf{ON}\rangle$. Chang如下定义了另一个谱系$\langle \mathbf{N}_\alpha^\lambda\rangle$:

$$\mathbf{N}_0^\lambda=\varnothing,$$

$$\mathbf{N}_{\alpha+1}^\lambda=\mathscr{D}(\mathbf{N}_\alpha^\lambda)\cup(\mathbf{N}_\alpha^\lambda)^{<\lambda}=\bigcup\{(\mathbf{N}_\alpha^\lambda)^\beta:\beta<\lambda\},$$

$$\mathbf{N}_\delta^\lambda=\bigcup_{\alpha<\delta}\mathbf{N}_\alpha^\lambda,\quad \text{若 }\delta\text{ 是极限序数},$$

其中$\mathscr{D}(X)$是用$\mathscr{L}_{\omega\omega}$定义的$X$的诸子集. Chang注意到,通常$\mathbf{N}_\alpha^\lambda=\mathbf{C}_\alpha^\lambda$,所以$\mathbf{C}_\alpha^\lambda$通常是$\lambda$-封闭的,因此用10.5.19证明中相同的技巧,我们有:

10.5.20 定理 若$\lambda\geqslant\omega$是正则基数,则存在任意大的α使得

$\mathscr{L}_{L^{A}_{\alpha}}$是 Σ_1-紧致语言. □

本小节以下部分我们来讨论"$\mathscr{L}_{\mathfrak{M}_q}$是 Σ_1-紧致语言"的必要条件;我们来证明 10.5.16 的部分逆定理.

10.5.21 定理 假设$\mathscr{L}_{\mathfrak{M}_q}$是$\Sigma_1$-紧致语言且 $\mathfrak{M}$ 是 q-局部封闭的,则存在初始递归封闭和 $q^{\mathfrak{M}}$-封闭的传递集 $\mathfrak{M}_1$ 使得

$$\mathfrak{M} \prec_{s\text{-}\Pi_1^1} \mathfrak{M}_1.$$

证明:令 $\mathfrak{M}_1$ 是下列交集:

$\bigcap\{\mathfrak{M}_2 : \mathfrak{M}_2 \supseteq \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_2$ 是初始递归封闭且 $q^{\mathfrak{M}}$-封闭的$\}$,

下证:

$$\mathfrak{M} \prec_{s\text{-}\Pi_1^1} \mathfrak{M}_1.$$

用 ε 指称 R_1^2,令 $B=q^{\mathfrak{M}}$,不妨假设 B 包含一无穷集(否则 $\mathfrak{M}_1=\mathfrak{M}$),所以存在述说"$\varepsilon$ 是良建的"的 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}B}$-公式 WF($\varepsilon$).

令 T 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}B}$的表达下列句子的 Σ_1-句子集:

(1) $\forall x[x\varepsilon c_a \leftrightarrow \bigvee_{b\in a} x=c_b]$, 对 $a\in\mathfrak{M}$,

(2) 等词公理,

(3) WF(ε),

(4) (关于 ε 的)外延性公理,

(5)(B-封闭性质) 对所有 $b\in B$,

$$\forall\langle v_i : i\in b\rangle\exists x\forall y[y\varepsilon x \leftrightarrow \bigvee_{i\in b}(y=\langle c_i, v_i\rangle)],$$

(6) 初始递归封闭性质.

据 Mostowski-引理,T 的任意模型 $\mathfrak{M}'$是初始递归封闭和 B-封闭的传递集且 $\mathfrak{M}'\supseteq\mathfrak{M}$,因此任何这样的 $\mathfrak{M}'\supseteq\mathfrak{M}_1$.

设 $\Theta(\vec{x})$是 s-Π_1^1-公式,$\vec{a}\in\mathfrak{M}$ 且 $\mathfrak{M}_1\models\Theta(\vec{a})$. 为了简单,不妨设 $\Theta=\forall S\varphi$,其中 φ是 Σ_1-公式. 据上述假设,有 $T\models\varphi(\vec{a})$. 据 Σ_1-紧致性,存在 $T_0\in\mathfrak{M}$,$T_0\subseteq T$ 使得 $T_0\models\varphi(\vec{a})$. 令 $\mathfrak{M}_0=\mathrm{TC}(T_0\cup\{\vec{c}\})$,据 q-局部封闭性,存在一初始递归封闭且 $q^{\mathfrak{M}_0}$-封闭的传递集 $\mathfrak{M}'$使得 $\mathfrak{M}_0\subseteq\mathfrak{M}'\subseteq\mathfrak{M}$,所以 $\mathfrak{M}'\models T_0$,因此 $\mathfrak{M}'\models\varphi(\vec{a})$. 据 Σ_1-保持性,$\mathfrak{M}\models\varphi(\vec{a})$,所以 $\mathfrak{M}\models\Theta(\vec{a})$,因此 $\mathfrak{M}\prec_{s\text{-}\Pi_1^1}\mathfrak{M}_1$. □

再据 10.5.1，有：

10.5.22 推论 假设 $\mathfrak{M}$ 在 $\mathscr{P}$ 下封闭，则下列命题等价：

(1) $\mathscr{L}_{\mathfrak{M},q}$ 是 Σ_1-紧致语言.

(2) $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是 Σ_1-紧致语言且存在初始递归封闭且 $q^{\mathfrak{M}}$-封闭的传递集 $\mathfrak{M}_1$ 使得 $\mathfrak{M} \prec_{s\text{-}\Pi_1^1} \mathfrak{M}_1$. □

下面的引理说明，在 10.5.16 的情况下，q-局部封闭性对 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M},q}$ 的 Σ_1-紧致性是必要的.

10.5.23 引理

设 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}_1$ 满足 10.5.16 的条件，则 $\mathfrak{M}$ 是 q-局部封闭的.

证明：令 $B=q^{\mathfrak{M}}$，$\mathfrak{M}_0\in\mathfrak{M}$ 使得 $c\in\mathfrak{M}_0$，$B_0=B\cap\mathfrak{M}_0$，据 Δ_0-分离公理，$B_0\in\mathfrak{M}$. 任取 $X\in\mathfrak{M}$. 我们先证：

$$X^{<B_0}\in\mathfrak{M}. \tag{10.22}$$

因为 $\mathfrak{M}_1$ 是 B-封闭的，所以

$$\mathfrak{M}_1\models \forall S\forall b\in B_0[(S\cap(b\times X)\text{是函数使得其定义域为 }b)\\ \to\exists x(x=S\cap(b\times X))].$$

上式右边是一 s-Π_1^1-句子 Ψ，所以 Ψ 在 $\mathfrak{M}$ 中成立，因此存在某个传递集 $\mathfrak{M}'\in\mathfrak{M}$ 使得 $B_0,X\in\mathfrak{M}'$ 且 Ψ 在 $\mathfrak{M}'$ 中也成立. 这意味 $X^{<B_0}\subseteq\mathfrak{M}'$，所以据 Δ_0-分离公理，$X^{<B_0}\in\mathfrak{M}$. (10.22)证毕.

任取 $b\in B_0$，据(10.22)，函数集 $2^b\in\mathfrak{M}$，所以 $(2^b)^b\in\mathfrak{M}$，因此 $\mathscr{P}(\mathrm{b}\times\mathrm{b})\in\mathfrak{M}$，从而 b 的任意良序在 $\mathfrak{M}$ 中. 这样，我们有 $|b|\in\mathfrak{M}$，即 $|b|^+\leqslant \mathrm{o}(\mathfrak{M})$. 令 $\mu=\sup\{|b|^+;b\in B_0\}$，则 $\mu\leqslant\mathrm{o}(\mathfrak{M})$.

下证：

$$\text{存在正则基数 }\lambda\leqslant\mathrm{o}(\mathfrak{M})\text{使得 }\mu\leqslant\lambda. \tag{10.23}$$

若 μ 是正则的，则令 $\lambda=\mu$ 即可. 所以下设 μ 是奇异的. 因此 $\mu=\mathrm{Sub}\{|b|;b\in B_0\}$ 且存在 $b\in B_0$ 和 B_0 中序列 $\langle b_i;i\in b\rangle$ 使得 $\mu=\sum\limits_{i\in b}|b_i|$，从而存在双射 $f:\bigcup\limits_{i\in b}b_i\to\mu$. 令 $f_i=f\upharpoonright b_i$，据 B-封闭性，对每一 $i\in b$，$f_i\in\mathfrak{M}_1$. 再据 B-封闭性，序列 $\langle f_i;i\in b\rangle$ 在 $\mathfrak{M}_1$ 中，故

$$\bigcup_{i\in b}f_i=f\in\mathfrak{M}_1,\quad f^{-1}\in\mathfrak{M}_1.$$

假设 $h\in(M_1)^{\nu}$，则 $h\circ f:\bigcup_{i\in b}b_i\to\mathfrak{M}_1$，据对 f 相同的论证，有 $h\circ f\in\mathfrak{M}_1$，所以 $h\circ f\circ f^{-1}=h\in\mathfrak{M}_1$，因此 $(M_1)^{\nu}\subseteq\mathfrak{M}_1$。在这种情况下，$\mu=\sup\{|b|:b\in B_0\}$，据 Σ-聚合原则，$\mu\in\mathfrak{M}$。所以如上证，对 $b\in B_0$，我们能证明若 $X\in\mathfrak{M}$，则 $X^b\in\mathfrak{M}$。尤其是 $\mathscr{P}(\mu\times\mu)\in\mathfrak{M}$ 且 $\mu^+\leqslant o(\mathfrak{M})$。令 $\lambda=\mu^+$，我们就证明了(10.23)。

令 G 是函数 $g(X)=X^{<B_0}$ 的图形，据 Barwise 的[1969a]的 4.5，$\mathfrak{M}$ 是 G-可容集。定义序列 $\langle\mathfrak{M}_\alpha:\alpha\leqslant\lambda\rangle$ 如下：

$$\mathfrak{M}_{\alpha+1}=\mathrm{cl}(\mathrm{TC}(\mathfrak{M}_\alpha^{<B_0})),$$

$$\mathfrak{M}_\delta=\bigcup_{\alpha<\delta}\mathfrak{M}_\alpha,\quad 若\ \delta\ 是极限序数，$$

其中 cl 指称在初始递归函数下的闭包。

因此据(10.23)，对 $\alpha<\lambda$，$\mathfrak{M}_\alpha\in\mathfrak{M}$ 且 $\mathfrak{M}_\lambda\subseteq\mathfrak{M}$。易见 $\mathfrak{M}_\lambda$ 是传递且初始递归封闭的。假设 $b\in B_0$ 且 $f\in(M_\lambda)^b$，因为 $|b|<\lambda$ 且 λ 是正规的，所以对某个 $\alpha<\lambda$，$f\in(M_\alpha)^b$，因此 $f\in\mathfrak{M}_{\alpha+1}$，这意味 $\mathfrak{M}_\lambda$ 是 B_0-封闭的。□

现在我们把本小节的结果总结如下：

10.5.24 定理 若 $\mathfrak{M}$ 是 Σ_1-紧致的，则下列命题等价：

(1) $\mathfrak{M}$ 是 q-局部封闭的，且 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}q}$ 是 Σ_1-紧致语言。

(2) 存在初始递归封闭和 $q^{\mathfrak{M}}$-封闭集 $\mathfrak{M}_1$ 使得 $\mathfrak{M}\prec_{s\text{-}\Pi_1^1}\mathfrak{M}_1$。

证明：据 10.5.16、10.5.21 和 10.5.23。□

说明：(Ⅰ) 据 10.5.23 的证明，若 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}\mathfrak{M}}$ 据 10.5.16 被证明是 Σ_1-紧致语言，则 $\mathfrak{M}$ 在 $\mathscr{P}$ 下封闭，所以据 10.5.1，对某个基数 κ 使得 $\kappa=\beth_\kappa$，$\mathfrak{M}=\mathbf{V}(\kappa)=\mathbf{H}(\kappa)$。

(Ⅱ) 若 $\mathfrak{M}$ 是可数的且 $\alpha>\omega$，则 10.5.23 告诉我们用 10.5.16 不能得到"$\mathscr{L}_{\mathfrak{M}\alpha}$ 是 Σ_1-紧致语言"的任何实例，因为没有一个可数的 $\mathfrak{M}$ 是 α-局部封闭的。

(Ⅲ) 据 10.5.23 和 10.5.15，对所有从 10.5.16 得到有 Σ_1-紧致性的 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}q}$，其有效公式集都是 $\mathfrak{M}$ 上的 $s\text{-}\Pi_1^1(\delta)$。

二、$\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$(WF)的 Σ_1-紧致性

本小节固定 $\omega\in\mathfrak{M}$ 且 $\mathfrak{M}$ 是初始递归封闭的传递集.

令 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$(WF)是如下扩张 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}(=\mathscr{L}_{\mathfrak{M}\omega})$得到的语言:用 E 指称二元关系符号 R_1^2;引入新初始递归符号 WF=⟨11⟩,$\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$(WF)的公式的形成规则增加:

WF 是没有自由变元的原子公式.

$\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$(WF)的语义增加:WF 总是解释为"$E$ 的解释是良建的".

若 $B\subseteq\mathfrak{M}$ 且 B 包含一无穷元,则用 10.5.21 证明中所规定的 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}B}$-公式 WF($E$)置换 WF,这样我们就可以把 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$(WF)变成 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}B}$,所以 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}B}$的 Σ_1-紧致性蕴涵 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$(WF)的 Σ_1-紧致性.

称 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是 **Σ_1-良建紧致片段** $\Leftrightarrow$ 对 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的任意 Σ_1-句子集 T,若每一 $T_0\subseteq T,T_0\in\mathfrak{M}$,有良建模型(参见 10.4.5 前),则 T 有良建模型.

显然,若 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是 Σ_1-良建紧致片段,则 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是 Σ_1-紧致片段.

10.5.25 引理 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$(WF)是 Σ_1-紧致片段 $\Leftrightarrow$ $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是 Σ_1-良建紧致片段.

证明:"$\Rightarrow$":显然. 下证"$\Leftarrow$":设 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是 Σ_1-良建紧致片段,T 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$(WF)的任意 Σ_1-句子集使每一 $T_0\subseteq T,T_0\in\mathfrak{M}$,有模型.

情况 1 每一 $T_0\subseteq T,T_0\in\mathfrak{M}$,有非良建模型:令 T' 是用常假式 **F** 替换 T 中所有的 WF 得到的结果. 对某个新个体常元序列 $\langle c_n:n<\omega\rangle$,令 $T''=T'\cup\{c_{n+1}Ec_n:n<\omega\}$,据 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的 Σ_1-紧致性,T'' 有模型 $\mathfrak{A}$,所以 $\mathfrak{A}\models T'$,因为 $\mathfrak{A}\models \mathrm{WF}\leftrightarrow\mathbf{F}$,所以 $\mathfrak{A}\models T$.

情况 2 存在 $T_0\subseteq T,T_0\in\mathfrak{M}$,使得 T_0 的每一模型是良建的:令 T' 是用常真式 **T** 替换 T 中的 WF 得到的结果,据 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的 Σ_1-良建紧致性,T' 有良建模型 $\mathfrak{A}$. 因为 $\mathfrak{A}\models \mathrm{WF}\leftrightarrow\mathbf{T}$,所以 $\mathfrak{A}\models T$. □

本小节所谓的**典范结构**是指个体域为闭项集 $\mathrm{Term}_0(\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}^{*})$的

模型，即在前一小节意义上的 $\mathscr{L}^*_{\mathfrak{M}_\omega}$ 的 $\mathfrak{M}_1$-**典范模型**.

10.5.26 引理 假设 T 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的归约形式的句子集，则

$$T \text{ 有良建模型} \Leftrightarrow T^* \text{ 有良建的典范模型}.$$

证明：本证明类似 10.5.10，因为若 $\mathfrak{A}$ 是 T 的良建模型，则从 $\mathfrak{A}$ 得到的典范模型（本质上是子模型）也是良建模型. □

下面我们用 $\bar{f}(n)$ 表示 $\langle f(0), f(1), \cdots, f(n-1)\rangle$，其中 $n<\omega$.

10.5.27 引理 存在集合论公式

$$\Psi = \forall S \exists f \forall n<\omega[\psi_0(\bar{f}(n), S, T)]$$

使得 Ψ 不依赖 $\mathfrak{M}$，T 在 Ψ 中正出现，ψ_0 是 Δ_0-公式且若 T 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的句子集，则

$$T \text{ 没有良建模型} \Leftrightarrow (\mathfrak{M}, T) \models \Psi.$$

证明：令 $q(x) = x \in \omega$（因此 $\bar{c} = \varnothing$），据 10.5.14，有 s-Π^1_1-公式 $\forall S \exists \varphi[\varphi \in T \wedge \Theta_1(\varphi, S)]$，其中 $\Theta_1(\varphi, S)$ 表示 $\Theta(\varphi^q, S)$，据 10.5.14 和 10.5.26 的证明，若 T 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$-句子集，则 T 没有良建模型 $\Leftrightarrow$

$$\forall S[\exists f \forall n<\omega[f(n) \in \mathrm{Term}_0(\mathscr{L}^*_{\mathfrak{M}_q}) \wedge \langle 1, 2, \langle f(n+1), f(n)\rangle\rangle \in S] \vee \exists \varphi(\varphi \in T \wedge \Theta_1(\varphi, S))]$$

据适于 $\mathrm{Term}_0(\mathscr{L}^*_{\mathfrak{M}_q})$ 的定义的替换规则和通常的规定，上式可以变成本引理需要的形式. □

固定 Y 是所有形如 $\forall S \exists f \forall n<\omega[\psi_0(\bar{f}(n), S, \bar{x})]$ 的集合论公式集，易见 Y 的公式在终端扩张下保持.

称 $\mathfrak{M}$ 满足 **Y-自返原则** $\Leftrightarrow$ 对每一 $\Phi \in Y$，若 $\mathfrak{M} \models \Phi$，则存在传递集 $a \in \mathfrak{M}$ 使得 $\mathfrak{M} \upharpoonright a \models \Phi$.

10.5.28 定理

$$\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}(\mathrm{WF}) \text{ 是 } \Sigma_1\text{-紧致片段} \Leftrightarrow \mathfrak{M} \text{ 满足 } Y\text{-自返原则}.$$

证明："$\Leftarrow$"：假设 $\mathfrak{M}$ 满足 Y-自返原则，T 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的没有良建模型的 Σ_1-句子集. 令 $T = \sigma^{\mathfrak{M}}$，其中 σ 是 Σ_1-公式. 在 10.5.27 的公式 Ψ 中，用 $\sigma(\varphi)$ 置换"$\varphi \in T$"，经过适当的变换得到公式

$$\Psi' = \forall U \exists g \forall n<\omega[\psi_0'(\bar{g}(n), U)],$$

其中 ψ_0' 是 Δ_0-公式使得对任意初始递归封闭集 $\mathfrak{M}_0$，

$$\mathfrak{M}_0 \models \Psi' \Leftrightarrow \sigma^{\mathfrak{M}_0}\text{没有良建模型}.$$

因此 $\mathfrak{M} \models \Psi'$，据 Y-自返原则，存在初始递归封闭集 $\mathfrak{M}_0 \in \mathfrak{M}$ 使得 $\mathfrak{M}_0 \models \Psi'$. 令 $T_0 = \sigma^{\mathfrak{M}_0}$，有 $T_0 \in \mathfrak{M}$，$T_0 \subseteq T$ 且 T_0 没有良建模型.

"⇒"：假设 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是 Σ_1-良建紧致片段，令

$$\Psi(\vec{x}) = \forall S \exists f \forall n < \omega[\psi_0(\bar{f}(n), S, \vec{x})]$$

是 Y-公式使得 $\mathfrak{M} \models \Psi(\vec{a})$. 考虑下列 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$-句子集 T（其中 ϵ，S 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 中不同于 E 的关系符号）：

(1) 关于 $\in$ 的对集公理（这使得序列的定义成为可能），

(2) 等词公理和外延性公理，

(3) $\forall x[x \epsilon c_a \leftrightarrow \bigvee_{b \in a} x = c_b]$，　对 $a \in \mathfrak{M}$，

(4) $\forall v \forall w[E(v, w) \leftrightarrow v, w$ 是有穷序列使得 v 真扩张 w

$\wedge$ 对所有初始节 $v_0 \subseteq v$，$\psi_0(v_0, S, a)]$.

显然，T 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的 Σ_1-句子集. 下证 T 没有良建模型：我们假设 $\mathfrak{N} = \langle N, \epsilon^{\mathfrak{N}}, E^{\mathfrak{N}}, S^{\mathfrak{N}} \rangle$ 是 T 的模型，则 $\mathfrak{N}$ 是 $\mathfrak{M}$ 的终端扩张，所以 $\mathfrak{N} \models \psi(\vec{a})$ 且存在 g 对所有 $n < \omega$，$\mathfrak{N} \models \psi_0(\bar{g}(n), S, \vec{a})$，其中 $\bar{g}(n)$ 是在 $\langle N, \epsilon^{\mathfrak{N}} \rangle$ 意义上的序列 $\langle g(0), \cdots, g(n-1) \rangle$，因此对所有 $n < \omega$，

$$\langle \bar{g}(n+1), \bar{g}(n) \rangle \in E^{\mathfrak{N}},$$

所以 $\mathfrak{N}$ 不是良建的，这证明 T 没有良建模型.

因此存在 $T_0 \subseteq T$，$T_0 \in \mathfrak{M}$ 使得 T_0 没有良建模型. 令 $\mathfrak{M}_0 \supseteq T_0$ 使得 $\mathfrak{M}_0 \in \mathfrak{M}$ 是传递且初始递归的，$S \subseteq \mathfrak{M}_0$，$E_0$ 是由上述句子(4)根据 S 定义的 $\mathfrak{M}_0$ 上的关系. 则 $\langle M_0, \epsilon, E_0, S \rangle$ 是 T_0 的模型，所以 E_0 不是良建的. 令 $\langle a_n: n < \omega \rangle$ 是 $\mathfrak{M}_0$ 的元素的序列使得对所有 $n < \omega$，$\langle a_{n+1}, a_n \rangle \in E_0$. 则对所有 $n < \omega$，$a_{n+1} \supseteq a_n$，所以令 f 是 $\mathfrak{M}_0$ 上的任意函数使得 $f \supseteq \bigcup_{n < \omega} a_n$，则对任意 $n < \omega$ 和某个 m，$\bar{f}(n) \subseteq a_m$，因此

$$\mathfrak{M}_0 \models \forall n < \omega[\psi_0(\bar{f}(n), S, \vec{a})],$$

从而 $\mathfrak{M}_0 \models \psi(\vec{a})$，这意味 $\mathfrak{M}$ 满足 Y-自返原则. □

注意：因为任何本质上不可数的 Σ_1-紧致集 $\mathfrak{M}$ 都满足 Y-自返原则，所以上述结果是对 10.4.6 的概括.

Barwise 在其[1969a]的论证现在可以用于(非构造地)证明：

存在满足 Y-自返原则且不必然是本质上不可数的集合.

令 Y^* 是集合论公式集，它的公式是从 Δ_0-公式用有穷 $\wedge$，有穷 $\vee$，$\exists x\in y$，$\forall x\in y$，$\exists x$，$\forall S$，$\exists f$ 构造起来的，则 $Y^*\supseteq Y$ 且 Y^* 在终端扩张下保持.

注意：若 $\Theta\in Y^*$，则相对化公式 $\Theta^{(r)}\in Y^*$.

下列两引理的证明与关于 s-Π_1^1-公式的相应定理的证明非常类似.

10.5.29 引理　假设 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}'$ 都是传递集，$\mathfrak{M}\in\mathfrak{M}'$ 并且 $\mathfrak{M}\prec_{Y^*}\mathfrak{M}'$，则 $\mathfrak{M}$ 满足 Y^*-自返原则. □

10.5.30 引理　假设 $\kappa>\omega$ 是正则基数，$\langle\mathfrak{M}_\alpha:\alpha<\kappa\rangle$ 是诸传递集的序列使得对 $\alpha<\kappa$，$|\mathfrak{M}_\alpha|<\kappa$，$\mathfrak{M}_\alpha\in\mathfrak{M}_{\alpha+1}$，且对极限序数 δ，$\mathfrak{M}_\delta=\bigcup\limits_{\alpha<\delta}\mathfrak{M}_\alpha$. 则存在正规函数 $f:\kappa\to\kappa$ 使得当 $f(\alpha)<\beta<\kappa$ 时，有 $\mathfrak{M}_{f(\alpha)}\prec_{Y^*}\mathfrak{M}_\beta$，从而对所有 $\alpha<\kappa$，$\mathfrak{M}_{f(\alpha)}$ 满足 Y^*-自返原则. □

10.5.31 推论　令 κ 是正则基数，存在 κ 个序数 $\alpha<\kappa$ 使得 $\mathscr{L}_{\mathbf{L}(\alpha)}(\mathrm{WF})$ 是 Σ_1-紧致片段，($\mathbf{L}(\alpha)$ 的规定见 0.8.5). 特别当 $\kappa=\omega_1$ 时，存在不可数多个可数序数 α 使得 $\mathscr{L}_{\mathbf{L}(\alpha)}(\mathrm{WF})$ 是 Σ_1-紧致片段.
□

下列两个定理类似 Tarski 和 Hanf 关于 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$(其中 $\kappa\geqslant\lambda>\omega$)的非紧致结果.

10.5.32 定理

若 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}(\mathrm{WF})$ 是 Σ_1-紧致片段，则 $\mathfrak{M}$ 是递归不可达的.

证明：令 $\alpha=o(\mathfrak{M})$，$a\in\mathfrak{M}$ 使得 $a^+\notin\mathfrak{M}$(其中 a^+ 是下一个可容集)，据 Barwise，R.O. Gandy 和 Y.N. Moschovakis 的[1971]，对某个序数 $\gamma\leqslant\alpha$，$a^+=\mathbf{L}(a,\gamma)$. 因此对 $\beta<\alpha$，$\mathbf{L}(a,\beta)\in\mathfrak{M}$，所以

$$a^+=\mathbf{L}(a,\alpha)=\bigcup_{\beta<\alpha}\mathbf{L}(a,\beta).$$

令 T 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$(WF)的下列 Σ_1-句子集(其中 E 用 $\in$ 来解释,F 是函数符号),

(1) E 的外延性公理+等词公理,

(2) WF,

(3) $\forall x[xEc_a \leftrightarrow \bigvee_{b\in a} x=c_b]$, 对 $a\in\mathfrak{M}$,

(4) c 是序数,

(5) $c>c_\beta$, 对所有 $\beta\in\mathfrak{M}$,

(6) $\forall\gamma[F(\gamma)=\mathbf{L}(c_\alpha,\gamma)]$,

(7) $\forall\gamma>0(F(\gamma)$不是可容集).

注意:(6)是定义函数 $F(\gamma)=\mathbf{L}(a,\gamma)$的句子.

显然,$\mathfrak{M}$ 是任意 $T_0\subseteq T, T_0\in\mathfrak{M}$,的模型,但(1)-(6)的任意模型是 $\mathfrak{N}$ 使得 $\mathfrak{M}\subset\mathfrak{N}$ 且 $\alpha\in\mathfrak{N}$,所以 $F(\alpha)=\alpha^+\in\mathfrak{N}$,因此(7)在 $\mathfrak{N}$ 中不成立,这意味 T 没有模型. □

我们称可容序数 α **是递归不可达序数** $\Leftrightarrow$ α 是所有小于 α 的可容序数的最小上界.

10.5.33 定理 假设 $\mathfrak{M}$ 是可容集且对某个 $\beta<\alpha$,可容序数 $o(\mathfrak{M})=\alpha$ 是第 β 个递归不可达序数,则 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$(WF)是 Σ_1-紧致的.

证明:令 T 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$(WF)的下列 Σ_1-句子集($\in$ 仍解释 E):

(1) **KP**,

(2) WF,

(3) $\forall x[xEc_a \leftrightarrow \bigvee_{b\in a} x=c_b]$, 对 $a\in\mathfrak{M}$,

(4) d 是序数,

(5) $d>c_\gamma$, 对所有 $\gamma\in\mathfrak{M}$,

(6) $\bigwedge_{\gamma<\beta}(d_\gamma>d_\xi$ 是最小递归不可达可容序数,对所有 $\xi<\gamma)$,

(7) $\forall\delta[\delta$ 是递归不可达可容序数$\rightarrow\bigvee_{\gamma<\beta}(\delta=d_\gamma)]$.

显然,$\mathfrak{M}$ 是任意 $T_0\subseteq T, T_0\in\mathfrak{M}$,的模型,但(1)—(6)的任意模型是 $\mathfrak{N}$ 使得 $\mathfrak{M}\subset\mathfrak{N}$ 且 $\alpha\in\mathfrak{N}$,但这样的 $\mathfrak{N}$ 不是(7)的模型,这就证明了 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$(WF)不是 Σ_1-紧致片段. □

第 11 章　Löwenheim-Skolem-定理(上)

在本章和第 13 章，我们要全面而系统地研究无穷逻辑中的 Löwenheim-Skolem-定理(下面简称 **LS-定理**)的关系.

我们知道，对 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$ 的模型论，普通紧致性定理和 LS-定理是两个最为重要的定理. 早在 1969 年，P. Lindström 在其[1969]就已证明了下列命题：

一阶逻辑 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$ 是满足紧致性定理和 LS-定理的极大逻辑.

在 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$ 的模型论中，LS-定理往往表述为：

若一理论有无穷模型，则它有所有无穷基数的模型.

LS-定理的证明总是分成两部分："向下"部分允许人们从较大的模型得到较小的模型，而"向上"部分则相反. 在证明"向下"部分时，人们使用某种形式的子模型论证，而在证明"向上"部分时则使用普通的紧致性论证. 当我们向无穷逻辑方向概括 LS-定理时，也要分两部分去做. 在"向下"部分，我们可以把 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$ 的向下-LS-定理直接推广到无穷逻辑，使用的证明也类似 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$ 的情况，差别只在于子模型有多小. 但考虑"向上"部分时，我们发现 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$ 的向上-LS-定理几乎不能直接概括到无穷逻辑. 原因非常简单，对无穷逻辑来说，几乎完全丧失了普通的紧致性定理. 因为我们完全可以构造一个理论使得它有相当大基数的模型但没有任意大基数的模型.

但是，另一方面，Hanf 发现，只要语言 $\mathscr{L}$ 的表达式是集合，而不是真类，则可以相当容易地证明(虽然只是非构造性地证明)：

存在某个基数 κ 使得若 $\mathscr{L}$ 的句子 σ 有基数 $\geqslant\kappa$ 的模型，则它有任意大基数的模型.

这样的基数中最小的一个称为 Hanf-数．因此，通过寻找 Hanf-数或 Hanf-数的界限，我们在无穷逻辑中重新得到相对化或有条件的向上-LS-定理．

本章§1，我们首先研究 LS-定理的"向下"部分，用一种较为抽象的方式把迄今已知的所有向下-LS-定理统摄于一个主定理中，然后给出这个主定理的一些常见的推论．

在§2，我们先讨论 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$的向上-LS-定理以及它向无穷逻辑推广所遇到的困难，然后定义 Hanf-数和与之相关的 Morley-数．

在§3 我们研究 $\mathscr{L}_{\kappa^+\omega}$的 Hanf-数和 Morley-数．我们将证明 $\mathscr{L}_{\kappa^+\omega}$的 Hanf-数等于省略 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$-型的 Morley-数 $\mathbf{m}_\kappa$，并且进一步考查了 $\mathbf{m}_\kappa$，$\mathbf{n}_\kappa$（$\mathbf{n}_\kappa$ 与 Hanf-数相关）的、用 beth-数表达的下界与上界．

§1　向下-LS-定理

关于向下-LS-定理，我们在前面的有关章节作为某些定理的推论或作为练习已经给出过一些．例如，0.7.15，3.3.6，3.3.7，4.2.4，8.1.6，8.1.7和 8.1.25．此节我们要系统地考虑语言 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$的所有向下-LS-定理．为此我们要证明一个能概括 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$的所有迄今已知的向下-LS-定理的主定理 11.1.1．这个定理的证明是对 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$的向下-LS-定理的 Tarski-Vaught 证明（参见他们的[1957]）的一个推广．然后作为上述主定理的推论，我们来讨论几个常见且重要的、具有特殊形式的 LS-定理．最后我们用适当反例来证明 11.1.1 所给出的界限是最好可能的界限，不能再改善．

11.1.1 向下-LS-定理（的主定理）（Dickmann，[1975]）

令 $\mathfrak{B}$ 是 $\mathscr{L}$-结构，$X\subseteq B$，Γ 是在子公式下封闭的 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$的公式集，$\rho=\sup\{\aleph_0,|\mathrm{Fv}(\varphi)|:\varphi\in\Gamma\}$，$\delta\geq 2$ 是基数，$\tau\geq\rho$ 是基数，假设下列情况（1）或（2）成立：

（1）$\max\{|X|,|\mathscr{L}|,|\Gamma|\}\leq\delta^{\tau}\leq|B|$；

(2) 对所有 $\varphi\in\Gamma$, $\rho>|\mathrm{Fv}(\varphi)|$, $\rho\leqslant\mathrm{cf}(\tau)$ 且

$$\max\{|X|,|\mathscr{L}|,|\Gamma|\}\leqslant\delta^{<\tau}\leqslant|B|.$$

则存在结构 $\mathfrak{A}$ 使得 $X\subseteq A$, $\mathfrak{A}\prec_{\omega}^{\Gamma}\mathfrak{B}$ 且

在情况(1)的条件下，$|A|=\delta^{\tau}$(特别是存在幂为 δ^{τ} 的模型)；

在情况(2)的条件下，$|A|=\delta^{<\tau}$.

我们还可以进一步选择 $\mathfrak{A}$ 使得对每一 $\varphi\in\Gamma$ 和每一 $g\in A^{\mathrm{Fv}(\varphi)}$，

$$\mathfrak{A}\models\varphi[g]\Leftrightarrow\mathfrak{B}\models\varphi[g].$$

证明：根据上述假设，不妨设 $\mathrm{Sm}(\Gamma)=\mathscr{L}$，即 $\mathscr{L}$ 的每一符号出现在 Γ 的某个原子公式中，因为当 $\mathrm{Sm}(\Gamma)\subset\mathscr{L}$ 时，我们把包含 $\mathscr{L}-\mathrm{Sm}(\Gamma)$ 的符号的公式及其子公式放入 Γ，要证结果仍成立.

令 G 是下列族的一固定的选择函数：

$$\bigcup\{\mathscr{P}(D^{Z})-\{\varnothing\}:Z\subseteq\mathrm{Var}\text{ 且 }D\subseteq B\},$$

即 G 对每一 D^{Z} 的非空子集，选择一个函数. 为了方便，对 $\varphi\in\Gamma$，$Z\subseteq\mathrm{Var}$ 和 $f\in B^{Z}$，我们定义下列记号，

$$\varphi^{\mathfrak{B}}(Z,f,\cdot)=\{g\in B^{\mathrm{Fv}(\varphi)-Z}:\mathfrak{B}\models\varphi[f*g]\}.$$

任给 $Y\subseteq B$，我们用 $\mathrm{cl}(Y)$ 来指称 B 的、包含 Y 且在 $\mathscr{L}$ 的所有函数运算下封闭的最小子集(**注意**：$\mathrm{cl}(Y)$ 包含所有元素 $c^{\mathfrak{B}}$，其中 c 是 $\mathscr{L}$ 的个体常元符号). 称 Y 是**函数封闭集** $\Leftrightarrow\mathrm{cl}(Y)=Y$. 在以下的证明中，我们要用下列通过简单的基数计算就能证明的事实：

$$|\mathrm{cl}(Y)|\leqslant\max\{|\mathscr{L}|,|Y|,\aleph_0\}.\qquad(11.1)$$

现在我们分情况来证明本定理.

情况(1)：首先我们归纳定义 B 的诸子集的序列 $\langle D_\alpha:\alpha<\rho^{+}\rangle$ 使得下列性质得到满足：

① 对所有 $\alpha<\rho^{+}$，$|D_\alpha|=\delta^{\tau}$，

② 对所有 $\alpha\leqslant\beta<\rho^{+}$，$D_\alpha\subseteq D_\beta$，

③ 对所有 $\alpha<\rho^{+}$，D_α是封闭的，

④ 对所有 $\alpha<\rho^{+}$，$\varphi\in\Gamma$，$Z\subseteq\mathrm{Fv}(\varphi)$ 和 $f\in(D_\alpha)^{Z}$，

$\varphi^{\mathfrak{B}}(Z,f,\cdot)\neq\varnothing\Rightarrow$ 存在 $g\in\varphi^{\mathfrak{B}}(Z,f,\cdot)$ 且 $\mathrm{Ran}(g)\subseteq D_{\alpha+1}$.

令 D_0 是 B 的幂为 δ^{τ} 且包含 X 的任意函数封闭子集. 假设对所有 $\alpha<\xi<\rho^{+}$, D_α 已定义完毕.

情况(1) ξ 是后继序数:

令 $\mathscr{T}_\xi$ 是下列"指标集":

$$\mathscr{T}_\xi=\{\langle\varphi,Z,f\rangle:\varphi\in\Gamma,\ Z\subseteq \mathrm{Fv}(\varphi)\text{且 } f\in(D_{\xi-1})^{Z}\},$$

令 $\mathscr{D}_\xi=\{\varphi^{\mathfrak{B}}(Z,f,\cdot):\langle\varphi,Z,f\rangle\in\mathscr{T}_\xi\}$, 且限制选择函数 G 于 $\mathscr{D}_\xi-\{\varnothing\}$(据选择公理,每一非空集合的族有一选择函数,即若 $\mathscr{D}_\xi-\{\varnothing\}$ 是非空集合的族,则 $\mathscr{D}_\xi-\{\varnothing\}$ 的选择函数 G 是 $\mathscr{D}_\xi-\{\varnothing\}$ 上的函数使得对所有 $\varphi^{\mathfrak{B}}(Z,f,\cdot)\in\mathscr{D}_\xi-\{\varnothing\}$, $G(\varphi^{\mathfrak{B}}(Z,f,\cdot))\in\varphi^{\mathfrak{B}}(Z,f,\cdot)$, 即 $G(\varphi^{\mathfrak{B}}(Z,f,\cdot))\in B^{\mathrm{Fv}(\varphi)-Z}$ 使得

$$\mathfrak{B}\models\varphi[f*G(\varphi^{\mathfrak{B}}(Z,f,\cdot))].$$

所以我们可以把这样的 G 简写为 $G(\varphi,Z,f)$, 看作是 $\mathscr{T}_\xi$ 上的函数),我们就能得到定义在 $\mathscr{T}_\xi$ 上的映射(也称为 G)使得对所有三元组 $\langle\varphi,Z,f\rangle\in\mathscr{T}_\xi$,

$$G(\varphi,Z,f):(\mathrm{Fv}(\varphi)-Z)\to B,\quad \mathfrak{B}\models\varphi[f*G(\varphi,Z,f)].$$

定义

$$D'_\xi=D_{\xi-1}\cup\bigcup_{t\in\mathscr{T}_\xi}\mathrm{Ran}(G(t)),\quad D_\xi=\mathrm{cl}(D'_\xi).\tag{11.2}$$

据上述定义和(11.1)可直接得到性质②,据 D_ξ 的构造,性质③也成立. 为了证明性质①,我们先来证明下列断定(a),(b):

(a) $|\mathrm{Ran}(G(t))|\leqslant\rho$, 对每一三元组 $t\in\mathscr{T}_\xi$.

(b) $|\mathscr{T}_\xi|=\delta^{\tau}$.

(a)的证明: 显然,我们有

$$\begin{aligned}|\mathrm{Ran}(G(\varphi,Z,f))|&\leqslant|\mathrm{Dom}(G(\varphi,Z,f))|\\&=|\mathrm{Fv}(\varphi)-Z|\\&\leqslant|\mathrm{Fv}(\varphi)|\leqslant\rho.\end{aligned}$$

(b)的证明:通过对 $\mathscr{T}_\xi$ 的定义的分析,有

$$|\mathscr{T}_\xi|\leqslant\sum_{\varphi\in\Gamma}\Big(\sum_{Z\in\mathscr{P}(\mathrm{Fv}(\varphi))}|(D_{\xi-1})^{Z}|\Big).\tag{11.3}$$

若 $\varphi\in\Gamma$ 且 $Z\subseteq\mathrm{Fv}(\varphi)$, 则 $|Z|\leqslant\rho$ 且 $|\mathscr{P}(\mathrm{Fv}(\varphi))|\leqslant 2^{\rho}$, 因此据归纳

假设，

$$|(D_{\xi-1})^Z|\leqslant|(D_{\xi-1})^\rho|=(\delta^\tau)^\rho=\delta^\tau.$$

此外，对每一 $\varphi\in\Gamma$，

$$\sum_{Z\in\mathscr{P}(\mathrm{Fv}(\varphi))}|(D_{\xi-1})^Z|\leqslant 2^\rho\cdot\delta^\tau=\delta^\tau. \tag{11.4}$$

所以据(11.3)，(11.4)和假设(1)，我们有

$$|\mathscr{T}_\xi|\leqslant|\Gamma|\cdot\delta^\tau\leqslant\delta^\tau\cdot\delta^\tau=\delta^\tau.$$

因此(b)成立.

据(a)和(b)，我们有

$$\Big|\bigcup_{t\in\mathscr{T}_\xi}\mathrm{Ran}(G(t))\Big|\leqslant\sum_{t\in\mathscr{T}_\xi}|\mathrm{Ran}(G(t))|\leqslant|\mathscr{T}_\xi|\cdot\rho\leqslant\delta^\tau\cdot\rho=\delta^\tau. \tag{11.5}$$

（最后的等式成立是因为 $\delta^\tau\geqslant\delta^\rho\geqslant 2^\rho>\rho$.）现在我们来证明性质①：据(11.2)，显然，对所有 $\alpha<\rho^+$，$|D_\alpha|\geqslant\delta^\tau$. 另一方面，据归纳假设和(11.5)，对所有 $\alpha<\rho^+$，$|D'_\alpha|=\delta^\tau$. 而据(11.1)和(11.2)，

$$|D_\alpha|=|\mathrm{cl}(D'_\alpha)|\leqslant\max\{|\mathscr{L}|,|D'_\alpha|,\aleph_0\}.$$

据题设，$\tau\geqslant\rho\geqslant\aleph_0$，所以 $\delta^\tau\geqslant\aleph_0$，而据归纳假设，$|\mathscr{L}|\leqslant|D'_\alpha|$，所以 $|D_\alpha|\leqslant\delta^\tau$，性质①成立.

下证性质④也成立：假设 $\alpha=\xi-1$ 且 φ,Z,f 如④中所规定，则三元组 $\langle\varphi,Z,f\rangle\in\mathscr{T}_\xi$. 若 $\varphi^{\mathfrak{B}}(Z,f,\cdot)\neq\varnothing$，则 $g=G(\varphi,Z,f)$ 就是④所要求的映射，因此据 D'_ξ 的构造，$\mathrm{Ran}(g)\subseteq D_\xi$.

情况(Ⅱ) ξ 是极限序数：

这里我们只须定义 $D_\xi=\bigcup_{\zeta<\xi}D_\zeta$. ②是显然的，③可以直接验证，而且在此情况下，④空洞地满足. 验①成立如下(**注意**：$\xi<\rho^+$)：

$$\delta^\tau\leqslant|D_\xi|\leqslant\sum_{\zeta<\xi}|D_\zeta|=|\xi|\cdot\delta^\tau\leqslant\rho\cdot\delta^\tau=\delta^\tau.$$

至此我们完成了对序列 $\langle D_\alpha:\alpha<\rho^+\rangle$ 的归纳定义.

现令 $D=\bigcup_{\alpha<\rho^+}D_\alpha$ 且 $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}\upharpoonright D$. 显然，$A=D\supseteq X$ 且

$$\delta^\tau\leqslant|A|=|D|\leqslant\sum_{\alpha<\rho^+}|D_\alpha|=\rho^+\cdot\delta^\tau=\delta^\tau.$$

因为 D 是 B 的函数封闭子集，所以 $\mathfrak{A}\subseteq\mathfrak{B}$.

下面只须证 $\mathfrak{A}\prec_{\kappa\lambda}^{\Gamma}\mathfrak{B}$. 因为 $\mathfrak{A}\subseteq\mathfrak{B}$，所以对所有原子公式 φ 和 $g\in A^{\mathrm{Fv}(\varphi)}$，

$$\mathfrak{A}\models\varphi[g]\Leftrightarrow\mathfrak{B}\models\varphi[g]. \tag{11.6}$$

施归纳于公式的复杂度，易证(11.6)对所有的公式都成立：因为 Γ 对子公式封闭，所以联结词的情况显然. 令 $\varphi=\exists Z\psi$，其中 $Z\subseteq\mathrm{Var}$，$|Z|<\lambda$ 且 $\mathrm{Fv}(\psi)=\mathrm{Fv}(\varphi)\cup Z$. 通过必要的重名约束变元，我们还可以假设 $Z\cap\mathrm{Fv}(\varphi)=\varnothing$. 在这种情况下，(11.6)的"$\Rightarrow$"显然成立. 下证"$\Leftarrow$"：因为 $\mathfrak{B}\models\varphi[g]$，所以存在 $f_1\in B^Z$ 使得

$$\mathfrak{B}\models\psi[g*f_1].$$

因为 $Z=\mathrm{Fv}(\psi)-\mathrm{Fv}(\varphi)$，所以 $f_1\in\psi^{\mathfrak{B}}(\mathrm{Fv}(\varphi),g,\cdot)$. 因为 $\varphi\in\Gamma$ 且 Γ 在子公式下封闭，所以 $\psi\in\Gamma$. 因为

$$|\mathrm{Ran}(g)|\leqslant|\mathrm{Dom}(g)|=|\mathrm{Fv}(\varphi)|\leqslant\rho<\rho^+,$$

所以据假设 $g\in A^{\mathrm{Fv}(\varphi)}$，存在 $\alpha<\rho^+$ 使得 $\mathrm{Ran}(g)\subseteq D_\alpha$. 因为

$$\psi^{\mathfrak{B}}(\mathrm{Fv}(\varphi),g,\cdot)\neq\varnothing,$$

所以据性质④，存在 $f_2\in\psi^{\mathfrak{B}}(\mathrm{Fv}(\varphi),g,\cdot)$使 $\mathrm{Ran}(f_2)\subseteq D_{\alpha+1}\subseteq A$. 因此 $\mathfrak{B}\models\psi[g*f_2]$. 据归纳假设，$\mathfrak{A}\models\psi[g*f_2]$，从而 $\mathfrak{A}\models\varphi[g]$. 这意味 $\mathfrak{A}\prec_{\kappa\lambda}^{\Gamma}\mathfrak{B}$. 至此完成了对情况(1)的证明.

情况(2)的证明与情况(1)的证明有类似之处，因此我们下面只须指出与情况(1)的证明不同的部分.

注意：对所有 $\varphi\in\Gamma$，$\rho>|\mathrm{Fv}(\varphi)|$ 蕴涵 ρ 是极限基数.

这里我们要定义的诸 D_ξ的序列的长度为 γ，其中 γ 是基数(下面我们将它固定)且 $\gamma\leqslant\tau,\ \rho^+$.

情况(1)的证明中的性质①被下列性质①$'$置换：

①$'$　$|D_\xi|=\delta^{<\tau}$，

其中 D_ξ如前规定，但其幂为 $\delta^{<\tau}$. 若对所有 $\alpha<\xi$(其中 $\xi<\gamma$)，D_α已定义完毕且 ξ 是后继序数(情况(Ⅰ))，则 D_ξ' 和 D_ξ如(11.2)所定义. 但断定(a)和(b)被下列(a)$'$和(b)$'$所置换：

(a)′ $|\mathrm{Ran}(G(t))|<\rho$, 对所有 $t\in\mathscr{T}_\xi$.

(b)′ $|\mathscr{T}_\xi|\leqslant\delta^{<\tau}$.

(a)′的证明完全同(a)的证明. (b)′的证明也类似(b)的证明,不过我们要用到下列事实:

$\varphi\in\Gamma$ 且 $Z\subseteq\mathrm{Fv}(\varphi)$ 蕴涵 $|Z|<\rho$, 所以 $|\mathscr{P}(\mathrm{Fv}(\varphi))|\leqslant 2^{<\rho}$ 且 $(\delta^{<\tau})^{<\rho}=\delta^{<\tau}$(参见 Dickmann 的[1975],p. 6).

用 $\rho\leqslant\delta^{<\tau}$ 可直接验证(a)′和(b)′蕴涵①′.

情况(Ⅰ)的其余部分的证明如同前面.

在情况(Ⅱ),即当 ξ 是极限序数时,诸定义完全如前述,$\mathfrak{A}$ 的个体域 A 也如情况(1)所定义. 考虑 $\gamma\leqslant\tau$,显然,$|A|=\delta^{<\tau}$.

现在我们把情况(Ⅱ)余下要证部分分成两个子情况来考虑:

第一种子情况 $\rho<\tau$:我们令 $\gamma=\rho^+$. 因为 $\mathrm{cf}(\tau)\leqslant\tau$,所以据(2)的假设 $\rho\leqslant\mathrm{cf}(\tau)$,我们有 $\gamma\leqslant\tau$,因此 $\mathfrak{A}\prec^{\Gamma}_{\kappa\lambda}\mathfrak{B}$ 的证明如前述.

第二种子情况 $\rho=\tau=\mathrm{cf}(\tau)$:(这里第二个等式成立是因为据假设,$\rho=\tau$,而在情况(2)中又假设 $\rho\leqslant\mathrm{cf}(\tau)$,所以 $\tau\leqslant\mathrm{cf}(\tau)$,但另一方面,总有 $\mathrm{cf}(\tau)\leqslant\tau$,因此 $\tau=\mathrm{cf}(\tau)$.)现在我们固定 $\gamma=\rho$. 因为 ρ 是极限基数且 τ 是正则的,所以 ρ 是弱不可达的,加之 $\delta^{<\tau}\geqslant\rho$,因此 $|A|=\delta^{<\tau}$. 这里证明的关键在于:

$$\varphi\in\Gamma \text{ 且 } g\in A^{\mathrm{Fv}(\varphi)}\Rightarrow \text{存在 } \alpha<\rho \text{ 使 } \mathrm{Ran}(g)\subseteq D_\alpha.$$

但这也成立,因为 ρ 是正则的且 $|\mathrm{Fv}(\varphi)|<\rho$,故 $|\mathrm{Ran}(g)|<\rho$.

至此完成了对 11.1.1 的证明. □

说明:11.1.1 给出的向下-LS-定理足够一般,由此产生迄今所知的、特殊形式的 LS-定理. 下面我们给出该定理的一些重要的推论.

11.1.2 推论(Dickmann,[1970]) 令 $\mathfrak{B}$ 是 $\mathscr{L}$-结构、$X\subseteq B$ 且 κ、λ 是无穷基数使得

$$\max\{|X|,|\mathscr{L}|\}\leqslant\lambda=\lambda^{\kappa}\leqslant|B|,$$

则存在结构 $\mathfrak{A}$ 使得 $X\subseteq A$, $|A|=\lambda$ 且 $\mathfrak{A}\prec_{\kappa\kappa}\mathfrak{B}$. 若 κ 还是正则基

数，则本推论在更弱的假设 $\lambda=\lambda^{<\kappa}$ 下也成立.

证明：令 $\Gamma=\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\kappa\kappa})$ 且 λ 如上规定，则

$$|\Gamma|=|\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\kappa\kappa})|=\begin{cases}\beta^{<\kappa}, & \text{若 } \kappa \text{ 是正则基数；}\\ \beta^{\kappa}, & \text{若 } \kappa \text{ 是奇异基数.}\end{cases}$$

其中 $\beta=\max\{\kappa,|\mathscr{L}|\}$. 对 $\rho=\sup\{\aleph_0,|\mathrm{Fv}(\varphi)|:\varphi\in\Gamma\}$，令

$$\rho=\begin{cases}\alpha, & \kappa=\alpha^{+};\\ \kappa, & \text{若 } \kappa \text{ 是极限基数.}\end{cases}$$

因此，若 $\kappa=\alpha^{+}$，则 $\kappa>\rho$. 据 11.1.1 的情况(1)(令 $\delta=\lambda$)，存在 $\mathfrak{A}\prec^{\Gamma}_{\kappa\kappa}\mathfrak{B}$(即 $\mathfrak{A}\prec_{\kappa\kappa}\mathfrak{B}$)使得 $X\subseteq A$ 且 $|A|=\lambda^{\rho}=\lambda^{\alpha}=\lambda^{<\kappa}=\lambda$.

若 κ 是奇异极限基数，则 $\rho=\kappa$，而且 $\lambda^{\kappa}=\lambda$ 蕴涵 $\lambda\geqslant\kappa$. 因为据题设，$\lambda\geqslant|\mathscr{L}|,|X|$，所以有 $\lambda\geqslant\beta$ 且 $\lambda=\lambda^{\kappa}\geqslant\beta^{\kappa}=|\Gamma|$. 据 11.1.1 的情况(1)(令 $\lambda=\delta$)，存在具有我们要求的模型 $\mathfrak{A}$.

若 κ 是正则极限基数. $\lambda^{<\kappa}=\lambda$ 蕴涵 $\lambda\geqslant\mathrm{cf}(\lambda)\geqslant\kappa$(见 Dickmann 的[1975]，p. 6 的(10))，因此仍有 $\lambda\geqslant\beta$ 且 $\lambda=\lambda^{<\kappa}\geqslant\beta^{<\kappa}=|\Gamma|$. 因为 $\rho=\kappa=\mathrm{cf}(\kappa)$，因此令 $\kappa=\tau$ 且 $\lambda=\delta$，则上述结果满足 11.1.1 的条件(2)，所以据 11.1.1，我们有幂为 $\lambda^{<\kappa}=\lambda$ 的模型 $\mathfrak{A}$ 使得 $\mathfrak{A}$ 具有我们要求的性质. □

说明：对语言 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$，其中 $\lambda<\kappa$，由于

$$|\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\kappa\lambda})|=|\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\kappa\kappa})|,$$

所以我们不能改善 11.1.2 的结论.

11.1.3 推论(GCH) 令 $\mathfrak{B}$ 是 $\mathscr{L}$-结构，$X\subseteq B$ 且 κ,λ 是无穷基数使 $\max\{|X|,|\mathscr{L}|\}\leqslant\lambda\leqslant|B|$ 且 $\kappa\leqslant\mathrm{cf}(\lambda)$，则存在结构 $\mathfrak{A}$ 使

$$X\subseteq A,\quad |A|=\lambda,\quad \mathfrak{A}\prec_{\kappa\kappa}\mathfrak{B}.$$

证明：据 GCH，我们有

$$\kappa\leqslant\mathrm{cf}(\lambda)\Rightarrow\lambda^{<\kappa}=\lambda,\quad \kappa<\mathrm{cf}(\lambda)\Rightarrow\lambda^{\kappa}=\lambda.$$

所以若 κ 是正则的，则本推论的结论可以从 11.1.2 的第二部分得到. 若 κ 是奇异的，因为 $\mathrm{cf}(\lambda)$ 总是正则基数，所以 $\kappa<\mathrm{cf}(\lambda)$，因此结论可以从 11.1.2 的第一部分得到. □

11.1.4 推论(Hanf-Karp)　令 κ,λ 是正则无穷基数，$\lambda<\kappa$ 且

$$\alpha,\beta\in \mathbf{CN},\alpha<\kappa \text{ 且 } \beta<\lambda \Rightarrow \alpha^{\beta}<\kappa.$$

则 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$的每一有模型 $\mathfrak{B}$ 的句子 σ 也有幂$<\kappa$ 的模型 $\mathfrak{A}$. 此外，若 $|\mathscr{L}|<\kappa$，则 $\mathfrak{A}$ 可以看作 $\mathfrak{B}$ 的子结构，甚至看作 $\mathfrak{B}$ 的初等子结构.

证明：令 $\Gamma=\mathrm{Sub}(\varphi)$，首先计算 $|\Gamma|$ 和下列集合的上界：

$$\rho=\sup\{\aleph_0,|\mathrm{Fv}(\psi)|:\psi\in\Gamma\}.$$

① 施归纳于 φ的复杂度，我们可以证明 $|\Gamma|<\kappa$：若 φ是原子公式，则 $|\Gamma|<\kappa$. 若 φ是否定公式或存在公式，则据归纳假设，易得 $|\Gamma|<\kappa$. 若 $\varphi=\bigwedge\limits_{i\in I}\psi_i$，$|I|<\kappa$，则

$$\mathrm{Sub}(\varphi)=\bigcup_{i\in I}\mathrm{Sub}(\psi_i)\cup\{\varphi\},$$

因此
$$|\Gamma|\leqslant\sum_{i\in I}|\mathrm{Sub}(\psi_i)|+1.$$

因为 κ 是正则的，$|I|<\kappa$ 且据归纳假设，对每一 ψ_i，$|\mathrm{Sub}(\psi_i)|<\kappa$，所以$\sum\limits_{i\in I}|\mathrm{Sub}(\psi_i)|<\kappa$.

② 据公式性质(参见 1.1.4 及其后面的说明)，对 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$的所有公式 ψ，$|\mathrm{Fv}(\psi)|<\lambda$，所以据 λ 的正则性，$\rho\leqslant\lambda=\mathrm{cf}(\lambda)$.

注意：①和题设蕴涵对基数 $\gamma<\lambda$，$|\Gamma|^{\gamma}<\kappa$. 因为 κ 是正则的且 $\lambda<\kappa$，所以我们有

$$|\Gamma|^{<\kappa}=\sum_{\substack{\gamma<\lambda\\ \gamma\in\mathrm{CN}}}|\Gamma|^{\gamma}<\kappa.$$

下面我们说明，可以不失一般性地在下列新增假设下证明本推论：

$$|B|\geqslant\kappa,\ \mathscr{L}\subseteq\mathrm{Sm}(\varphi)(\text{因此}|\mathscr{L}|\leqslant|\Gamma|)\text{且}|\Gamma|\geqslant 2.$$

事实上，若 $|B|<\kappa$，则 $\mathfrak{B}$ 就是我们要找的模型. 若 $|\mathscr{L}|<\kappa$，通过给 φ增加一适当公式的合取，我们可以假设 $\mathscr{L}$ 的所有符号都出现在 φ中. 若 $|\mathscr{L}|\geqslant\kappa$，则我们只须证明关于 $\mathrm{Sm}(\varphi)$的向下-LS-定理且在 $\mathfrak{A}$ 中任意定义对 $\mathscr{L}-\mathrm{Sm}(\varphi)$的符号的解释. 最后，若 $|\Gamma|=1$，则 $\Gamma=\{\varphi\}$且 φ是原子句，所以 $\varphi\in\mathrm{Sent}(\mathscr{L}_{\omega\omega})$. 因为 $\kappa>\lambda\geqslant\aleph_0$，所以 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$的向下 LS 定理确保 φ有幂$<\kappa$ 的模型.

在这些新增的假设下，运用 11.1.1 的情况(2)于 $X=\varnothing$，$\delta=$

$|\Gamma|$ 和 $\tau=\lambda$，就能得到结构 $\mathfrak{A}$ 使得 $|A|=|\Gamma|^{<\lambda}$ 且具有 11.1.1 最后提到的性质. 特别是，有

$$\mathfrak{A}\models\varphi\Leftrightarrow\mathfrak{B}\models\varphi.$$

所以 $|A|<\kappa$ 且 $\mathfrak{A}\models\varphi$，即 $\mathfrak{A}$ 是 φ 的幂 $<\kappa$ 的模型.

为了证明本推论最后一个断定，我们从下列公式集出发：

$$\Gamma:=\mathrm{Sub}(\varphi)\cup\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\omega\omega})\quad(\text{仍有 } |\Gamma|<\kappa\,!),$$

重复前面的论证. 本推论的结论仍成立. □

从 11.1.4，可得 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$（其中 κ 是正则基数）的向下 LS-定理（这个结果包含在 Dickmann 的[1970]的 p.283 的定理 1.6 中）：

11.1.5 推论 令 $\kappa>\omega$ 是正则基数，则 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$ 的每一有模型的句子 σ 也有幂 $<\kappa$ 的模型. 特别是，若 $\kappa=\lambda^+$，则 σ 有幂 $\leqslant\lambda$ 的模型.

证明：因为 κ 和 ω 都是正则基数，据假设，$\kappa>\omega$，而且对所有 $\mu<\omega$ 和 11.1.1 中的 $\tau,\tau^{\mu}=\tau<\kappa$ 且 $\omega\leqslant\tau<\kappa$，所以 11.1.4 的假设得到满足，因此本推论的结论成立. □

若 $\kappa>\omega$ 是强不可达基数，则我们有：

11.1.6 推论 $\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$ 的每一有模型的句子有幂 $<\kappa$ 的模型.

证明：因为 κ 是强不可达的，所以 $\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$ 的每一句子对某个 $\lambda<\kappa$ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$ 的句子，所以据 11.1.4，就有本推论. □

注意：主定理 11.1.1 所能找到的模型 $\mathfrak{A}$ 的最小基数，对情况(1)是 2^{τ}，对情况(2)是 $2^{<\tau}$. 下面我们构造反例来证明这些下界是不能改善的，即在(1)或(2)的情况下，我们来构造一无穷句使得该句没有比 11.1.1 述说的相应基数更小的模型.

任给两集合 X,Y，下面我们用 $X<Y$ 指称 X 的每一元素 x 小于 Y 的任意元素 y，即 $x<y$.

11.1.7 定义 令 $\langle A,<\rangle$ 是任意线序集，称 $\langle A,<\rangle$ 是 η_{κ}**-集** $\Leftrightarrow$ 对 A 的任意两个幂 $\leqslant\kappa$ 的子集 X,Y 使得 $X<Y$，存在 $a\in A$ 使得 $X<a<Y$.

对极限基数 λ，通过适当修改上述定义来定义 η_{λ}-集：

令 $\langle A,<\rangle$ 是任意线序集，称 $\langle A,<\rangle$ 是 η_{λ}**-集** $\Leftrightarrow$ 对 A 的任意

两个幂$<\lambda$的子集X,Y使得$X<Y$，存在$a\in A$使得$X<a<Y$(**注意**：这里的X或Y可以是空集)。

说明：据 G. Kreisel-J. L. Krivine 的[1967]，我们知道 11.1.7 对刻画κ^+-饱和的无端点稠密线序是充分的。

11.1.8 引理

对每一无穷序数α，令U_α是所有由 0 和 1 组成的长度为α的序列$s:\alpha\to 2$的字典顺序集(lexicographically ordered set)。H_α是U_α的子线序使得H_α包含所有的序列$s:\alpha\to 2$使得s有下列性质：

存在$\gamma<\alpha$使得$s(\gamma)=1$，且若$\gamma<\beta<\alpha$，则$s(\beta)=0$。

则

(1)(W. Sierpiński) 每一H_{κ^+}是幂为2^κ的η_{κ^+}-集。

(2)(L. Gillman，[1956]) 每一η_{κ^+}-集包含一个同构于U_κ(甚至同构于H_{κ^+})的子集。特别地，每一η_{κ^+}-集有幂$\geq 2^\kappa$。

证明：在此我们只概述地证明每一η_{κ^+}-集包含一个同构于H_{κ^+}的子集，其余留给读者去补充。

假设$\alpha<\beta$，通过在U_α中每一序列的末尾增加 0，不妨把U_α看作是U_β的一子集，所以$H_{\kappa^+}=\bigcup\limits_{\alpha<\kappa^+}U_\alpha$。令$A$是任意$\eta_{\kappa^+}$-集，施归纳于$\alpha$，定义保序映射$f_\alpha:U_\alpha\to A$的一个递增序列$\langle f_\alpha:\alpha<\kappa^+\rangle$。在把$f_\alpha$扩张到$f_{\alpha+1}$时，要使$U_\alpha$中由$U_{\alpha+1}$的元素定义的截(cut)有幂$\leq\kappa$的共首(coinitial)且共尾的良序子集。□

11.1.9 反例 令$\mathscr{L}=\{<\}$，σ是$\mathscr{L}_{\lambda^+\lambda^+}$的句子使得$\sigma$公理化$\eta_{\lambda^+}$-集的概念，即$\sigma$是下列句子的合取：

(1) "$<$是线序"；

(2) $(\forall v\restriction\lambda)(\forall w\restriction\lambda)[\bigwedge\limits_{\alpha,\beta<\lambda}(v_\alpha<w_\beta)\to\exists x\bigwedge\limits_{\alpha,\beta<\lambda}(v_\alpha<x<w_\beta)]$；

(3) $(\forall v\restriction\lambda)(\exists xy)\bigwedge\limits_{\alpha<\lambda}(x<v_\alpha<y)$。

令$\Gamma=\mathrm{Sub}(\sigma)$，则$\Gamma$的基数等于$\lambda$且主定理 11.1.1 假设中的$\rho=\lambda$。另一方面，据 11.1.8(2)，$\sigma$的每一模型有幂$\geq 2^\lambda=2^\rho$，因此

2^{μ}是 11.1.1 的情况(1)的最小可能的界限. □

运用 **GCH**,11.1.9 还能进行修改使之适用于情况(2)(参见练习 11.1.14),但我们下面给出的例子是无需 **GCH** 的.

11.1.10 反例 令 $\lambda>\omega$ 是无穷基数,若 λ 不是弱不可达的,则在同构意义上,所有幂 $<\lambda$ 的遗传集的类 $\mathbf{H}(\lambda)$ 能用 $\mathscr{L}_{\lambda\lambda}$ 的一个单句 σ_λ 来刻画,其中 $\mathscr{L}=\{E\}$,E 是二元关系符号. 对 $\lambda=\kappa^+$ 的情况,这样的句子已在 1.2.9 中给出.

若 λ 是奇异基数,令 $\langle\lambda_\alpha:\alpha<\mathrm{cf}(\lambda)\rangle$ 是收敛于 λ 的基数的严格递增序列,则在同构意义上,$\mathbf{H}(\lambda)$ 被下列句子的合取 σ_λ 所刻画:

(1) $\forall xy[\forall z(zEx\leftrightarrow zEy)\rightarrow x\equiv y]$,

(2) $(\forall v\restriction\omega)\bigvee_{n<\omega}\neg(v_{n+1}Ev_n)$,

(3) $\exists x\forall y\neg(yEx)$,

(4) $\bigwedge_{\alpha<\mathrm{cf}(\lambda)}(\forall v\restriction\lambda_\alpha)\exists x\forall y[yEx\leftrightarrow\bigvee_{\beta<\lambda_\alpha}(y\equiv v_\beta)]$,

(5) $\forall x[\exists y(yEx)\rightarrow\bigvee_{\alpha<\mathrm{cf}(\lambda)}(\exists v\restriction\lambda_\alpha)\forall y(yEx\leftrightarrow\bigvee_{\beta<\lambda_\alpha}(y\equiv v_\beta))]$.

显然,σ_λ 是 $\mathscr{L}_{\lambda\lambda}$ 的句子,据 $\mathbf{H}(\lambda)$ 的定义,易证 $\mathbf{H}(\lambda)\models\sigma_\lambda$. 反之,若 $\langle A,E\rangle\models\sigma_\lambda$,则据句子(1)和(2)与 Shepherdson-Mostowski-定理(9.3.7),存在传递集 M 使得 $\langle A,E\rangle\cong\langle M,\in\restriction M\rangle$. 句子(5)说明每一 $x\in M$ 有基数 $<\lambda$. 因为 M 是传递的,所以 $M\subseteq\mathbf{H}(\lambda)$. **注意**:句子(3)蕴涵 $\varnothing\in M$. 最后,施归纳于 $\mathbf{H}(\lambda)$ 的元素的秩,据句子(4)在 $\langle M,\in\restriction M\rangle$ 中成立的事实,易证 $\mathbf{H}(\lambda)\subseteq M$. 因此 $\mathbf{H}(\lambda)=M$ 且

$$\langle A,E\rangle\cong\langle\mathbf{H}(\lambda),\in\restriction\mathbf{H}(\lambda)\rangle.$$

若 $\lambda>\omega$ 是弱不可达基数,则在同构意义上存在 $\mathscr{L}_{\lambda^+\lambda}$ 的句子 σ_λ 使得 σ_λ 刻画 $\mathbf{H}(\lambda)$;它由上述句子(1)—(3)和下列类似(4),(5)的句子合取而成:

(4)′ $\bigwedge_{\substack{\kappa<\lambda\\ \kappa\in\mathrm{CN}}}(\forall v\restriction\kappa)\exists x\forall y[yEx\rightarrow\bigvee_{\beta<\kappa}(y\equiv v_\beta)]$,

(5)′ $\forall x[\exists y(yEx)\rightarrow\bigvee_{\substack{\kappa<\lambda\\ \kappa\in\mathrm{CN}}}(\exists v\restriction\kappa)\forall y(yEx\rightarrow\bigvee_{\beta<\kappa}(y\equiv v_\beta))]$.

注意：因为 $\kappa<\lambda$，所以任意映射 $f:\kappa\to\lambda$ 是 $\mathbf{H}(\lambda)$的元素，因此 $\bigcup_{\kappa<\lambda}\lambda^{\kappa}\subseteq\mathbf{H}(\lambda)$，因此 $\lambda^{<\lambda}\leqslant|\mathbf{H}(\lambda)|$.

令 $\Gamma=\mathrm{Sub}(\sigma_\lambda)$，据 σ_λ 的构造，$\lambda=\kappa^+$ 蕴涵 11.1.1 的 $\rho=\kappa$；若 λ 是极限基数，则 $\rho=\lambda$ 且对所有 $\varphi\in\Gamma$，$|\mathrm{Fv}(\varphi)|<\rho$.

令 $\lambda=\kappa^+$，则 $|\mathbf{H}(\lambda)|\geqslant\lambda^{<\lambda}=(\kappa^+)^{\kappa}=2^{\kappa}$. 因此据 11.1.1 的情况(1)（使得 $\delta=2,\tau=\rho$），σ_{κ^+}有幂恰好为 2^{κ} 的模型. 因为 σ_{κ^+}的任何模型都同构于 $\mathbf{H}(\kappa^+)$，所以 $|\mathbf{H}(\kappa^+)|=2^{\kappa}$，因此我们又得到第 2 个反例来证明 11.1.1 的情况(1)的结果是最好的结果，不能改善.

现令 λ 是奇异极限 beth-基数，即 $\lambda=\beth_\alpha$，其中 α 是极限序数且 $\mathrm{cf}(\alpha)<\alpha$. 易证 $\lambda^{<\lambda}=\beth_{\alpha+1}=\lambda^{\lambda}=2^{\lambda}$，因此 $|\mathbf{H}(\lambda)|\geqslant2^{\lambda}$. 11.1.1 的情况(2)（使得 $\delta=2,\tau=\lambda^+$）证明 σ_λ 有幂为 2^{λ} 的模型. 如前所证，这蕴涵 $|\mathbf{H}(\lambda)|=2^{\lambda}$，从而证明了当 λ 是奇异基数时，11.1.1 的情况(2)的结果是最好可能的结果.

最后假设 $\lambda>\omega$ 是弱不可达基数. 类似上述的证明说明 σ_λ 的模型 $\mathbf{H}(\lambda)$有幂 $2^{<\lambda}$，而且当 λ 是极限正则基数时说明 11.1.1 的情况(2)还是最好可能的结果. □

说明：(Ⅰ) 11.1.10 并不包括 $\lambda=\omega$ 的情况，但我们知道存在一些没有有穷模型的 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$-句子，因此就是在这种情况下，11.1.1 的结论也是最好可能的结果.

(Ⅱ) 若 **GCH** 成立，则对所有 $\alpha\in\mathbf{ON}$，$\aleph_\alpha=\beth_\alpha$，因此对每一无穷基数 λ，我们都能给出一句子 σ_λ 使得 σ_λ 有一模型其幂具有 11.1.1 给出的最小基数，而且没有更小基数的模型. 但若不用 **GCH**，则我们还不知道是否有这种结果.

11.1.11 例 令 $\delta\geqslant2$ 是基数，$\tau\geqslant\aleph_0$ 是基数，$\kappa=(\delta^{\tau})^+$. 考虑句子 $\varphi=\exists v\varphi_\kappa^{<}(v)$，其中 $\varphi_\kappa^{<}(v)$是例 1.2.4 中定义的句子. 显然，φ 有幂为 κ 的模型，即有模型$\langle\kappa+1,\in\upharpoonright(\kappa+1)\rangle$，但 φ 没有幂$<\kappa$ 的模型. 因为

$$\langle A,<\rangle\models\varphi\Leftrightarrow\langle A,<\rangle\text{有同构于}\langle\kappa,\in\upharpoonright\kappa\rangle\text{的真初始节},$$

所以易见，若 $\Gamma=\mathrm{Sub}(\neg\varphi)$，则对任何幂$\leqslant\delta^{\tau}$ 的集合 A，

$$\langle A,<\rangle\not\prec^{\Gamma}_{\kappa^{+}\omega}\langle\kappa+1,\in\upharpoonright(\kappa+1)\rangle.$$

注意：在这个例子中，$\rho=\aleph_0$，$|\Gamma|=\kappa=(\delta^{\tau})^{+}$. □

说明：令 $\kappa=(\delta^{<\tau})^{+}$. 同样的例子说明在 11.1.1 的情况(2)中不能取消"$|\Gamma|\leqslant\delta^{<\tau}$"的假设.

类似的论证可以证明向下-LS-定理对形如 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$的语言类不成立，从而对形如 $\mathscr{L}_{\infty\lambda}$的语言类不成立. 因为对每一无穷基数 κ，存在 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$的句子$\exists v\varphi^{<}_{\kappa}(v)$使得它有幂$\geqslant\kappa$ 的模型但没有更小幂的模型. 当然这并不是说 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$的片段就不存在向下-LS-定理.

注意：关于向下-LS-定理对群论、拓扑学和完全布尔代数的运用请见 Dickmann 的[1975].

向下-LS-定理还有许多变种. 由于篇幅有限且涉及其它还未引入的技术，所以下面我们只给出其中一部分且不加证明：

我们称 $\mathscr{L}^{*}\subseteq\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\kappa^{+}\omega})$是一**片段** $\Leftrightarrow$ $\mathscr{L}^{*}\supseteq\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\omega\omega})$且在$\neg$、有穷合取、有穷析取、一阶量词下封闭且对每一 $\varphi\in\mathscr{L}^{*}$，

若 ψ 是 φ 的 $\mathscr{L}_{\kappa^{+}\omega}$-子公式，则 $\psi\in\mathscr{L}^{*}$.

易见对每一 $\psi\in\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\kappa^{+}\omega})$，存在幂为 κ 的片段 $\mathscr{L}^{*}$ 使得 $\psi\in\mathscr{L}^{*}$.

11.1.12 定理(R. Grossberg，[1988]) (1) 令 $\lambda\geqslant\kappa$ 是基数，$\mathscr{L}$ 是基数为 κ 的语言. 对每一幂$\geqslant\lambda$ 的 $\mathscr{L}$-结构 $\mathfrak{A}$，每一幂为 κ 的片段 $\mathscr{L}^{*}\subseteq\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\kappa^{+}\omega})$和每一幂$\leqslant\kappa$ 的 $X\subseteq A$，存在 $\mathscr{L}$-结构 $\mathfrak{B}$ 使得 $X\subseteq B$，$|B|=\kappa$，$\mathfrak{B}\prec_{\mathscr{L}^{*}}\mathfrak{A}$ 且对所有有穷 $\vec{a},\vec{b}\in B$，

$$(\mathfrak{B},\vec{a})\equiv_{\kappa^{+}\omega}(\mathfrak{B},\vec{b})\Leftrightarrow(\mathfrak{A},\vec{a})\equiv_{\infty\omega}(\mathfrak{A},\vec{b}).$$

(2) 令 $\mathscr{L}$ 是基数为 κ 的语言，$\mathscr{L}'\supseteq\mathscr{L}$ 是幂为 λ 的语言. 对每一幂$\geqslant\lambda$ 的 $\mathscr{L}'$-结构 $\mathfrak{A}$，每一幂为 κ 的片段 $\mathscr{L}^{*}\subseteq\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\kappa^{+}\omega})$和每一幂$\leqslant\kappa$ 的 $X\subseteq A$，存在 $\mathscr{L}$-结构 $\mathfrak{B}$ 使得 $X\subseteq B$，$|B|=\kappa$，$\mathfrak{B}\prec_{\mathscr{L}^{*}}\mathfrak{A}\upharpoonright\mathscr{L}$ 且对所有有穷 $\vec{a},\vec{b}\in B$，

$$(\mathfrak{B},\vec{a})\equiv_{\kappa^+\omega}(\mathfrak{B},\vec{b}) \Leftrightarrow (\mathfrak{A}\upharpoonright\mathscr{L},\vec{a})\equiv_{\infty\omega}(\mathfrak{A}\upharpoonright\mathscr{L},\vec{b}).\ \square$$

我们称可容集 $\mathfrak{M}$ 是**局部可数可容集** $\Leftrightarrow$ 对每一 $a\in\mathfrak{M}$，存在从 a 到 ω 中的单射 $f\in\mathfrak{M}$.

我们称可容集 $\mathfrak{M}$ 有 **LS-性质** $\Leftrightarrow$ 若 $\mathscr{L}$ 是 $\mathfrak{M}$-有穷语言且 φ 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的句子且有模型，则 φ 有 $\mathfrak{M}$-有穷模型.

11.1.13 定理(M. E. Nadel, [1972]) 可容集 $\mathfrak{M}\subseteq\mathbf{H}(\omega_1)$ 有 LS-性质 $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{M}$ 是局部可数且递归不可达的. $\square$

Nadel 在其[1974]中还证明了一系列向下-LS-定理(的精致形式)，非常有意思，有兴趣的读者可参见上述文献.

练 习

11.1.14 用**极限基数假说 LCH**(即"每一极限基数是强极限基数"，或换句话说，"若 λ 是极限基数且 $\kappa<\lambda$，则 $2^\kappa<\lambda$.")和 11.1.9 构造一满足 11.1.1 情况(2)的句子使得该句没有基数小于 $2^{<\rho}$的模型.

[提示：若 λ 是强极限基数，则存在幂为 λ 的 η_λ-集.]

11.1.15 令 $\mathscr{L}=\{<\}$，$\kappa>\omega$. 若 κ 是正则基数，则构造 $\mathscr{L}_{\kappa^+\kappa}$ 的句子 σ；若 κ 是奇异基数，则构造 $\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$的句子 σ，使得 σ 分别公理化共尾度$\geqslant\kappa$ 和共尾度$>\kappa$ 的所有良序的类.

11.1.16 令 $\mathscr{L}=\{<\}$，$\kappa>\omega$. 证明幂至少为 $2^{<\kappa}$的所有良序的类 $\mathscr{W}_\kappa$是 $\mathscr{L}_{\kappa^+\kappa}$中的 PC-类(PC-类的定义见 1.3.15). 证：

$$|\kappa\cap\mathbf{CN}_1|<\kappa \Rightarrow \mathscr{W}_\kappa\in\mathrm{PC}(\mathscr{L}_{\kappa\kappa}).$$

[提示：增加一个三元关系符号且对每一基数 $\lambda<\kappa$，增加一个体常元. 运用 9.2.1 前面规定的句子 $\Xi(x,\psi)$.]

§2 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$的向上-LS-定理及其概括

本节起过渡作用. 首先考察 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$的向上-LS-定理，然后讨论向

无穷语言概括所遇到的困难，最后引入几个重要的定义，为以后深入展开这一论题作必要的准备.

一、$\mathscr{L}_{\omega\omega}$的向上-LS-定理

$\mathscr{L}_{\omega\omega}$的情况本不在本书视野之内，但为了阐述问题的连贯性，我们在本小节简述如下.

现在已知 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$的向上-LS-定理的最好形式是下列定理：

11.2.1 定理(Tarski-Vaught，[1957]) 令 $\mathfrak{B}$ 是语言 $\mathscr{L}$ 的结构，基数 $\kappa \geqslant \max\{|B|, |\mathscr{L}|\}$，则存在 $\mathfrak{B}$ 的幂为 κ 的初等扩张.

证明：考虑语言 $\mathscr{L}_1 = \mathscr{L} \cup \{\bar{b}: b \in B\} \cup \{c_\alpha: \alpha < \kappa\}$，其中诸 c_α 是新个体常元. 令 Σ 是 $\mathscr{L}_1$ 的下列句子集：

(1) $\mathfrak{B}$ 的**初等图象**，

(2) $\neg(c_\alpha \equiv c_\beta)$， 对 $\alpha, \beta < \kappa, \alpha \neq \beta$.

显然，Σ 的每一有穷子集 Σ_1 有模型. 事实上，若 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 是所有互不相同的 $\alpha < \kappa$ 使得 c_α 在 Σ_1 中出现，$b_1, \cdots, b_m$ 是所有互不相同的 $b \in B$ 使得 $\bar{b}$ 在 Σ_1 中出现，且 $b_1', \cdots, b_n'$ 是 B 中互不相同的元素，则$(\mathfrak{B}, b_1, \cdots, b_m, b_1', \cdots, b_n')$是 Σ_1 的模型(其中对 $i = 1, \cdots, n$，b_i' 解释 c_{α_i}). 因此据普通紧致性定理，Σ 有模型 $\mathfrak{C}$. 据(2)，$|C| \geqslant \kappa$，据(1)，$\mathfrak{B} \prec \mathfrak{C} \restriction \mathscr{L}$. 据向下-LS-定理，存在 $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{C} \restriction \mathscr{L}$ 使得 $B \subseteq A$ 且 $|A| = \kappa$，因此 $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$. □

对语言 $\mathscr{L}$ 的结构 $\mathfrak{B}$(其中 $|B| \geqslant |\mathscr{L}|$)是否存在初等扩张的问题，上述结果给出完满的回答，但当 $|B| < |\mathscr{L}|$ 时，对基数 κ 使得 $|B| \leqslant \kappa < |\mathscr{L}|$，这样的问题并没有完全解决，下列定理只是给出部分答案：

11.2.2 定理(Morley，[1968]，p. 114) 令 $\mathfrak{B}$ 是无穷幂 λ 的结构，$\kappa \geqslant \lambda^\omega$，则存在 $\mathfrak{B}$ 的幂为 κ 的初等扩张.

证明：令 $\mathrm{Sm}(\mathfrak{B}) = \mathscr{L}$，$\mathscr{L}^*$ 是 $\mathscr{L}$ 的 Skolem-语言，$\mathfrak{B}^*$ 是 $\mathfrak{B}$ 对

$\mathscr{L}^*$ 的 Skolem-膨胀，$T=\mathrm{Th}((\mathfrak{B}^*, b)_{b\in B})$，则

$$\mathrm{Sm}(T)=\mathscr{L}^*\cup\{\bar{b}:b\in B\}=\mathscr{L}_1.$$

注意：$\mathscr{L}_1$-项是从 $\mathscr{L}^*$-项用若干 $\bar{b}$ 代换 $\mathscr{L}^*$-项中某些变元得到的．令 $X\subseteq B$ 有幂 $\aleph_0$．在 $\mathscr{L}_1$-项集上定义下列等价关系：

$t_1\approx t_2 \Leftrightarrow |\mathrm{Fv}(t_1)|=|\mathrm{Fv}(t_2)|$（比方说为 n）且对 X 的每一 n 元组 $\vec{x}_n$，$t_1^{\mathfrak{B}^*}[\vec{x}_n]=t_2^{\mathfrak{B}^*}[\vec{x}_n]$.

即 $t_1\approx t_2$ 成立 $\Leftrightarrow t_1^{\mathfrak{B}^*}$ 和 $t_2^{\mathfrak{B}^*}$ 定义 $(B)^{X^n}$ 中同一个映射 $X^n\to B$．若 $n=0$，则
$$t_1=t_2\Leftrightarrow t_1^{\mathfrak{B}^*}=t_2^{\mathfrak{B}^*}.$$

显然，模为 $\approx$ 的等价类的个数是

$$|\mathrm{Term}(\mathscr{L}_1)/\approx|\leqslant\left|\bigcup_{n<\omega}B^{X^n}\right|=\lambda^\omega.$$

考虑语言 $\mathscr{L}_2=\mathscr{L}_1\cup\{c_\alpha:\alpha<\kappa\}$，其中诸 c_α 是新个体常元．令 Σ 是 $\mathscr{L}_2$ 的下列句子集：

(1) T 中的所有句子，

(2) $\neg(c_\alpha\equiv c_\beta)$，　对 $\alpha,\beta<\kappa$ 使得 $\alpha\neq\beta$，

(3) $t_1(c_{\alpha_1},\cdots,c_{\alpha_n})\equiv t_2(c_{\alpha_1},\cdots,c_{\alpha_n})$，　对 $\mathscr{L}_1$ 中具有 $n(n<\omega)$ 个变元的所有项 t_1,t_2 使得 $t_1\approx t_2$ 且所有 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n<\kappa$.

显然，Σ 的每一有穷子集 Σ_1 有模型

$$(\mathfrak{B}^*, b_1,\cdots,b_m,x_1,\cdots,x_k),$$

其中 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 是所有互不相同的 α 使得 c_α 在 Σ_1 中出现，$b_1,\cdots,b_m$ 是所有互不相同的 b 使得 $\bar{b}$ 在 Σ_1 中出现．诸 x_i 是 X 的 k 个不同的元素且 c_{α_i} 的解释是 $x_i(i=1,\cdots,k)$．据普通紧致性定理，Σ 有模型 $\mathfrak{D}$．易见 $\mathfrak{D}$ 是 Skolem-结构．令 $Z=\{c_\alpha^{\mathfrak{D}}:\alpha<\kappa\}$，Hull$(\mathfrak{D})$是 $\mathfrak{D}$ 的 Skolem-包．**注意**：Hull$(\mathfrak{D})$的每一元素都能写作形如 $t^{\mathfrak{D}}[\vec{z}_n]$，其中 t 是 $\mathscr{L}_1$ 的项且 $\vec{z}_n\in Z$．换句话说，

$$|\mathrm{Hull}(\mathfrak{D})|=|\mathrm{Hull}(Z,\mathfrak{D}\restriction\mathscr{L}_1)|.$$

据句子(2)，我们有 $|Z|=\kappa$．因为 $|\mathrm{Hull}(\mathfrak{D})|\supseteq Z$，所以

$$|\mathrm{Hull}(\mathfrak{D})|\geqslant\kappa.$$

另一方面，据 $|\mathrm{Hull}(\mathfrak{D})|$ 的构造和句子(3)，易证

$$|\mathrm{Hull}(\mathfrak{D})| \leqslant |\mathrm{Term}(\mathscr{L}_1)/\approx| \cdot \left|\bigcup_{n<\omega} Z^n\right| \leqslant \lambda^\omega \cdot \kappa = \kappa.$$

因为 $\mathrm{Hull}(\mathfrak{D}) \prec \mathfrak{D}$，所以据句子(1)，$\mathfrak{A} = \mathrm{Hull}(\mathfrak{D}) \upharpoonright \mathscr{L}$ 是 $\mathfrak{B}$ 的幂为 κ 的初等扩张. □

现在剩下的问题就是上述界限 λ^ω 能否得到改善. 下例说明这种改善是不可能的，至少对不可测基数 λ 是如此.

11.2.3 定理 令 λ 是无穷不可测基数，则在幂为 2^λ 的语言中存在幂为 λ 的结构 $\mathfrak{A}$ 使得 $\mathfrak{A}$ 的每一真初等扩张有幂 $\geqslant \lambda^\omega$.

证明：令 $|A| = \lambda$. 对每一子集 $B \subseteq A^n$，令语言 $\mathscr{L}$ 包含一 n 元关系符号 R_B，令 $\mathfrak{A}$ 的个体域为 A 且对每一 $B \subseteq A^n (n<\omega)$，$R_B^{\mathfrak{A}} = B$ (这样的结构称为 **A 上的完全结构**，参见 9.3.5).

令 $\mathfrak{B}$ 是结构使得 $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$，$A \subset B$，即 $\mathfrak{B}$ 是 $\mathfrak{A}$ 的真初等扩张. 我们来证：$|B| \geqslant \lambda^\omega$. 据集合论的基本事实(参见 Sierpiński 的[1965]或 Kuratowski-Mostowski 的[1968])，存在 A 的诸子集的幂为 λ^ω 的族 $\langle P_\beta : \beta < \lambda^\omega \rangle$ 使得：

(1) $|P_\beta| = \aleph_0$，　对所有 $\beta < \lambda^\omega$.

(2) $P_\beta \cap P_\alpha$ 是有穷的，　对 $\beta, \alpha < \lambda^\omega, \beta \neq \alpha$.

把每一 P_β 写作形如 $\langle p_\beta^n : n<\omega \rangle$，固定 $x_0 \in B - A$，考虑下列集合族

$$\mathscr{D} = \{X \subseteq A : x_0 \in R_X^{\mathfrak{B}}\}.$$

据 9.3.8，$\mathscr{D}$ 是 A 上的非主超滤. 因为 λ 是不可测的，所以 $\mathscr{D}$ 是可数不完全的，即存在严格递减序列 $\langle X_n : n<\omega \rangle \subseteq \mathscr{D}$ 使得

$$\bigcap_{n<\omega} X_n = \varnothing.$$

对 $\beta < \lambda^\omega$，如下定义映射 $F_\beta : A \to P_\beta$：对 $a \in A$，

$$F_\beta(a) = p_\beta^n \Leftrightarrow a \in X_n - X_{n+1}.$$

因为 $\bigcap_{n<\omega} X_n = \varnothing$，$\langle X_n : n<\omega \rangle$ 又是严格递减的，所以 F_β 是满射. 考虑分别(作为 A 或 A^2 的子集)对应 F_β, P_β 和 X_n 的关系 $R_{F_\beta}, R_{P_\beta}, R_{X_n}$. 据 $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$，我们有

$$\mathfrak{B}\models\text{“}R_{F_\beta}\text{是把 }R_A\text{ 映射到 }R_{P_\beta}\text{上的函数”},$$

$$\mathfrak{B}\models\forall v[v\in R_A\to(R_{F_\beta}(v)=p_\beta^n\leftrightarrow v\in R_{X_n}-R_{X_{n+1}})].$$

因为对所有 $n<\omega, x_0\in R^{\mathfrak{B}}_{X_n}$，所以对所有 $n<\omega, R^{\mathfrak{B}}_{F_\beta}(x_0)\neq p^n_\beta$，即

$$R^{\mathfrak{B}}_{F_\beta}(x_0)\in R^{\mathfrak{B}}_{P_\beta}-P_\beta. \tag{11.7}$$

据(2)，不妨假设 $P_\beta\cap P_\alpha$有 m 个元素，其中 $\beta\neq\alpha$，则

$$\mathfrak{B}\models\text{“}R_{P_\beta}\cap R_{P_\alpha}\text{恰好有 }m\text{ 个元素”}.$$

因为 $\mathfrak{A}\prec\mathfrak{B}$，所以 $P_\beta\cap P_\alpha\subseteq R^{\mathfrak{B}}_{P_\beta}\cap R^{\mathfrak{B}}_{P_\alpha}$且 $P_\beta\cap P_\alpha$和 $R^{\mathfrak{B}}_{P_\beta}\cap R^{\mathfrak{B}}_{P_\alpha}$都有 m 个元素，因此它们是相同的．据此和(11.7)可得

$$R^{\mathfrak{B}}_{F_\beta}(x_0)\neq R^{\mathfrak{B}}_{F_\alpha}(x_0),\quad\text{对 }\beta\neq\alpha.$$

因此集合$\{R^{\mathfrak{B}}_{F_\beta}(x_0):\beta<\lambda^\omega\}$是 B 的幂为 λ^ω 的子集，即$|B|\geqslant\lambda^\omega$. □

注意：上述反例首先由 Rabin 用 **GCH** 证明，后来 Keisler 不用 **GCH**，只用极限超幂就给予证明．最后 Chang 在其[1965]将这个证明简化．

二、Hanf-数，Morley-数

我们在本章§1 已经看到，可以相当直接地把向下-LS-定理概括到无穷语言．于是人们自然要问：对向上-LS-定理，这样的概括存在吗？我们在本章其余部分和第 13 章讨论这个问题及其相关的问题．

首先，我们知道 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$中用于证明向上-LS-定理的紧致性定理在经典集合论背景下对绝大多数无穷语言不再成立，因为我们完全可以构造一个有相当大基数的模型的理论使得它没有任意大基数的模型．下面就是一例：

11.2.4 反例(Morley，[1965])　令 $\alpha<\omega_1$，则存在 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的句子 σ 使得 σ 有幂为$\beth_\alpha$ 的模型，从而有幂$\leqslant\beth_\alpha$ 的每一无穷模型，但没有幂$>\beth_\alpha$ 的模型．

证明：因为 α 是可数的，所以可以写作 $\omega+\alpha=\{\beta_n:n<\omega\}$. 令我们考虑的语言 $\mathscr{L}$ 有二元关系 $\in$，一元函数 rank（表示"秩"）和常元集 $\{c_{\beta_n}: n<\omega\}$. 令 σ 是下列句子的合取：

$\forall x[x\in c_{\beta_n}\leftrightarrow \bigvee_{\beta_m<\beta_n} x\equiv c_{\beta_m}]$，　　对每一 $n<\omega$，

$\forall x(\bigvee_{n<\omega}\text{rank}(x)\equiv c_{\beta_n})$，

$\text{rank}(c_{\beta_n})\equiv c_{\beta_n}$，　　　　　对每一 $n<\omega$，

$\forall xy[x\in y\rightarrow\text{rank}(x)\in\text{rank}(y)]$，

$\forall xy[\forall z(z\in x\leftrightarrow z\in y)\rightarrow x\equiv y]$.

因为 $|\mathbf{R}(\omega+\alpha)|=\beth_\alpha$，其中 $\mathbf{R}(\omega+\alpha)$ 是任意秩 $<\omega+\alpha$ 的集合的聚合，所以 σ 有我们想要的性质. □

我们将在下一节看到存在一些无穷句使得它们的模型的基数有一不可枚举的上界.

在此小节我们首先讨论关于 Hanf-数的一般情况.

11.2.5 定义　对任意语言 $\mathscr{L}_*$ 的每一句子集 Σ，Σ 的 **Hanf-数**，记作 $\text{h}(\Sigma)$，是最小的基数 λ 使得对 Σ 的所有句子 σ，

若 σ 有幂 $\geq\lambda$ 的模型，则 σ 有任意大幂的模型.

这里"任意大幂"是指"对每一基数 κ，σ 有基数 $\geq\kappa$ 的模型".

若 $\text{h}(\text{Sent}(\mathscr{L}_*))$ 有定义，则用 $\text{h}(\mathscr{L}_*)$ 来指称 $\text{h}(\text{Sent}(\mathscr{L}_*))$.

Hanf 首先注意到，几乎对所有语言 $\mathscr{L}_*$，$\text{h}(\mathscr{L}_*)$ 存在. 而且他还认识到结构类和结构类的族的 Hanf-数. 他在其[1964]已得到下列命题：

每一结构类的族 $\{\mathscr{M}_i:i\in I\}$ 有 Hanf-数.

上述命题可以如下证明：对每一 $i\in I$，若 $\mathscr{M}_i$ 包含任意大幂的结构，则定义 $\alpha_i=0$；否则，令 α_i 是 $\mathscr{M}_i$ 中所有结构的幂的上确界. 据集合论的置换公理，存在基数 κ 使得对所有 $i\in I$，$\alpha_i<\kappa$. 则 κ 有下列性质：对所有 $i\in I$，

$\mathscr{M}_i$ 有幂 $\geq\kappa$ 的结构 $\Rightarrow$ $\mathscr{M}_i$ 有任意大幂的结构.

因此存在最小的基数 κ_0 具有上述性质；这个 κ_0 就是 $\{\mathscr{M}_i:i\in I\}$ 的

Hanf-数. 证毕.

关于结构类和结构类的族的 Hanf-数的更深入研究,我们将放到第 13 章 § 3 去研究,在这以前我们主要研究语言和公式集的 Hanf-数.

11.2.6 引理(Hanf,[1962])

对任意语言 $\mathscr{L}_*$ 的任意句子集 Σ, $h(\Sigma)$ 存在. 特别是对任意语言 $\mathscr{L}_*$ 使得 $\mathrm{Sent}(\mathscr{L}_*)$ 是一集合, $h(\mathscr{L}_*)$ 存在.

证明:对 Σ 的每一没有任意大幂的模型的句子 σ,我们考虑基数 κ_σ 如下: κ_σ 是最小的 λ 使得 σ 没有幂 $\geqslant\lambda$ 的模型. 因为 Σ 是集合,所以所有这样的 κ_σ 的最小上界 ρ 存在且 $\rho\geqslant h(\Sigma)$. □

上述论证还可以进一步证明下列引理:

11.2.7 引理 令 Σ 是某个 $\mathscr{L}_*$ 的句子集,则 $\mathrm{cf}(h(\Sigma))\leqslant|\Sigma|$.

证明:用前一引理的记号,我们注意到 $\rho=h(\Sigma)$. 事实上,若 $\rho>h(\Sigma)$,则存在 $\sigma\in\Sigma$ 使得 $h(\Sigma)<\kappa_\sigma\leqslant\rho$. 显然, σ 有幂 $\geqslant h(\Sigma)$ 的模型(事实上 σ 有幂为 κ_σ 的模型)但没有任意大基数的模型,这与 $h(\Sigma)$ 的定义矛盾.

据 ρ 的规定, $\rho=\sup\{\kappa_\sigma:\kappa_\sigma$ 如 11.2.6 的证明所规定$\}$,显然

$$\mathrm{cf}(h(\Sigma))=\mathrm{cf}(\rho)\leqslant|\Sigma|. \quad \square$$

11.2.8 引理(Kunen,[1970]) (1) $h(_{\kappa\lambda})$是极限序数. 若 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$ 的公式 φ 有任意幂 $<h(\mathscr{L}_{\kappa\lambda})$ 的模型,则 φ 有任意大幂的模型.

(2) $h(\mathscr{L}_{\kappa\lambda})=\beth_\alpha$, 对某个序数 α.

(3) $\lambda>\omega\Rightarrow h(\mathscr{L}_{\kappa\lambda})=\beth_{h(\mathscr{L}_{\kappa\lambda})}$.

(4) $\kappa\leqslant\mathrm{cf}(h(\mathscr{L}_{\kappa\lambda}))\leqslant|\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\kappa\lambda})|$. □

证明留给读者做练习.

说明:(Ⅰ) 类语言 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$ 和 $\mathscr{L}_{\infty\infty}$ 是 $\mathscr{L}_*$ 无需有定义 $h(\mathscr{L}_*)$ 的两个例子.

(Ⅱ) 对集合 Σ,Ξ,

$$\Sigma\subseteq\Xi\subseteq\mathrm{Sent}(\mathscr{L}_*)\Rightarrow h(\Sigma)\leqslant h(\Xi).$$

若 Ξ 的每一句子还 $\mathscr{L}_*$-等价 Σ 中的一句子,则 $h(\Sigma)=h(\Xi)$. 特

别是对任意语言 $\mathscr{L}$. 和基数 $\kappa,\kappa_1,\lambda,\lambda_1$ 使得 $\kappa\leqslant\kappa_1,\lambda\leqslant\lambda_1$,我们有

$$h(\mathscr{L}_{\kappa\lambda})\leqslant h(\mathscr{L}_{\kappa_1\lambda_1}).$$

(Ⅲ) 据 11.2.7 和 11.2.8,我们有

$$cf(h(\mathscr{L}_{\kappa\lambda}))\leqslant|Form(\mathscr{L}_{\kappa\lambda})|=\begin{cases}\beta^{<\kappa}, & \text{若 } \kappa \text{ 是正则基数},\\ \beta^{\kappa}, & \text{若 } \kappa \text{ 是奇异基数};\end{cases}$$

其中 $\beta=\max\{|\mathscr{L}|,\kappa\}$.

(Ⅳ) 一般地说,对特定的语言 $\mathscr{L}$,我们不能具体计算出 $h(\mathscr{L}_{\kappa\lambda})$. 例如,对包含 5 个二元关系、16 个三元关系和 43 个一元函数符号的语言,我们无法计算出 $h(L_{\omega_1\omega})$. 就象在 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$-模型论中那样,我们只能对类似下面的问题感兴趣:

对某种语言,什么是最好可能的向上-LS-定理?

因此我们只能提供对下列形式的基数的估计:

$$\sup\{h(\mathscr{L}_{\kappa\lambda}):\mathscr{L}_{\kappa\lambda}\text{是幂}<\kappa\text{的语言}\}. \tag{11.8}$$

为了简单,我们还是用 $h(\mathscr{L}_{\kappa\lambda})$来指称这个上确界. 在后面的每一场合,我们要研究的是形如(11.8)的特定基数. 这一点请读者切记! 类似地说明也适用于下面定义的 Morley-数.

11.2.6 的论证可以运用于各种不同的情况. 其中之一就是下面定义的 Morley-数 $\mathbf{m}_\kappa,\mathbf{n}_\kappa$ 存在. 我们称 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$-公式集 Σ 是 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$的变元为 $\vec{v}_n$的**型**(type) $\Leftrightarrow$ Σ 中句子所包含的自由变元至多是 $\vec{v}_n$.

由于在下面给出的、关于型的论证中,n 个变元的型和一个变元的型所起的作用完全类似,所以下面我们只关注一个变元的型.

称 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$-型被 $\mathscr{L}$ 的结构 $\mathfrak{A}$ **实现** $\Leftrightarrow$ 存在 $a\in A$ 使得对所有 $\sigma\in\Sigma$, $\mathfrak{A}\models\sigma[a]$. 有时也称 $\mathfrak{A}$, a **实现** Σ. 否则,称 Σ 被 $\mathfrak{A}$ **省略**. 称由诸 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$-型构成的集合 S(后面常称 S 为 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$-**型集**)被 $\mathfrak{A}$ **省略** $\Leftrightarrow$ 每一 $\Sigma\in S$ 被 $\mathfrak{A}$ 省略.

固定无穷基数 κ,下面我们只考虑幂$\leqslant\kappa$ 的语言. **注意**:在这种情况下,$|Form(\mathscr{L}_{\omega\omega})|\leqslant\kappa$ 且至多存在 2^κ 个型.

11.2.9 定义 (1) **Morley-数** $\mathbf{m}_\kappa$ 是最小的基数 λ 使得对每一

幂$\leqslant\kappa$的$\mathscr{L}_{\omega\omega}$-型集$S$，若$S$被幂$\geqslant\lambda$的模型省略，则$S$被任意大幂的模型省略.

(2) 第二个 **Morley-数** $\mathbf{n}_\kappa$ 是最小的基数λ使得对每一$\mathscr{L}_{\omega\omega}$-型集$S$，若$S$被幂$\geqslant\lambda$的模型省略，则$S$被任意大幂的模型省略.

显然，我们有$\mathbf{m}_\kappa\leqslant\mathbf{n}_\kappa$. 下一节我们将看到$\mathbf{m}_\kappa<\mathbf{n}_\kappa$；这是因为存在$2^\kappa$个幂$\leqslant\kappa$的$\mathscr{L}_{\omega\omega}$-型集，所以至多可能有$2^{2^\kappa}$个（不逻辑等价）的任意幂的$\mathscr{L}_{\omega\omega}$-型集$S$. 这也将得出$\mathbf{m}_\kappa=\mathrm{h}(\mathscr{L}_{\kappa^+\omega})$. 我们在下一节证明这一点.

下一节我们研究$\mathrm{h}(\mathscr{L}_{\kappa\omega})$. 第13章我们将着重研究$\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$(其中$\lambda>\omega$)、$\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$和结构类等的Hanf-数. 这些研究将指明如何直接把Hanf-数和相应的语言的表达力结合起来.

练　习

11.2.10　证明11.2.8.

§3　$\mathscr{L}_{\kappa^+\omega}$的Hanf-数和Morley-数

本节我们研究$\mathscr{L}_{\kappa\omega}$的Hanf-数，但主要关注$\kappa$是后继基数的情况，虽然在此得到的许多结果只依赖$\kappa$是正则不可数基数的假设. 在本节，我们用$\mathbf{h}_\kappa$来表示$\mathrm{h}(\mathscr{L}_{\kappa^+\omega})$，即所有幂$\leqslant\kappa$的语言$\mathscr{L}_{\kappa^+\omega}$的Hanf-数$\mathrm{h}(\mathscr{L}_{\kappa^+\omega})$的上确界.

11.3.1 定理(Chang，[1968a])　对每一无穷基数κ，$\mathbf{m}_\kappa=\mathbf{h}_\kappa$.

证明：证明$\mathbf{m}_\kappa\leqslant\mathbf{h}_\kappa$：令$S=\{\Phi_\xi:\xi<\kappa\}$是幂$\leqslant\kappa$的$\mathscr{L}_{\omega\omega}$-型集，$\mathfrak{A}$是省略$S$且幂为$\mathbf{h}_\kappa$的模型. 对$\xi<\kappa$，令$\varphi_\xi=\neg\exists x\bigwedge\Phi_\xi$且$\varphi=\bigwedge_{\xi<\kappa}\varphi_\xi$. 因为对每一$\xi$，$|\Phi_\xi|\leqslant\kappa$，所以诸$\varphi_\xi$和$\varphi$都是$\mathscr{L}_{\kappa^+\omega}$的公式. 显然，对任何结构$\mathfrak{B}$，我们有

$$\mathfrak{B}\models\varphi\Leftrightarrow\mathfrak{B}\text{ 省略 }S.$$

因此 $\mathfrak{A}\models\varphi$. 据 $\mathbf{h}_\kappa$ 的定义，存在基数任意大的结构 $\mathfrak{B}$ 使得 $\mathfrak{B}\models\varphi$，因此 S 被任意大基数的 $\mathfrak{B}$ 省略.

证明 $\mathbf{h}_\kappa\leqslant\mathbf{m}_\kappa$：据公式性质，$\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$的每一公式只有$<\lambda$ 个自由变元. 令 σ 是 $\mathscr{L}_{\kappa^+\omega}$的句子，则 σ 至多有 κ 个 $\mathscr{L}_{\kappa^+\omega}$-子公式，且每一子公式有有穷多个自由变元. 对每一 $\varphi\in\mathrm{Sub}(\sigma)$使得 $\mathrm{Fv}(\varphi)=n$，我们引入新的 n 元谓词符号 R_φ. 对每一无自由变元的 $\varphi\in\mathrm{Sub}(\sigma)$，我们引入新的一元谓词 R_φ. 令

$$\mathscr{L}'=\mathscr{L}\cup\{R_\varphi:\varphi\in\mathrm{Sub}(\sigma)\}.$$

考虑下列 $\mathscr{L}'_{\kappa^+\omega}$-句子集 Σ，其中 $\vec{v}$ 指称适当的有穷非空变元序列：

(1) $\forall\vec{v}[\varphi(\vec{v})\leftrightarrow R_\varphi(\vec{v})]$， 对原子公式 $\varphi\in\mathrm{Sub}(\sigma)$，$\mathrm{Fv}(\varphi)\neq\varnothing$，

(1)′ $\varphi\leftrightarrow\forall\vec{v}R_\varphi(\vec{v})$， 对原子公式 $\varphi\in\mathrm{Sub}(\sigma)$，$\mathrm{Fv}(\varphi)=\varnothing$，

(2) $\forall\vec{v}[R_\psi(\vec{v})\leftrightarrow\neg R_\varphi(\vec{v})]$， 对 $\psi\in\mathrm{Sub}(\sigma)$，$\psi=\neg\varphi$，

(3) $\forall\vec{v}[R_\psi(\vec{v})\leftrightarrow\exists yR_\varphi(\vec{v}*y)]$，

对 $\psi\in\mathrm{Sub}(\sigma)$，$\psi=\exists y\varphi$，$\mathrm{Fv}(\psi)\neq\varnothing$，

(3)′ $\forall\vec{v}R_\psi(\vec{v})\leftrightarrow\exists yR_\varphi(y)$，

对 $\psi\in\mathrm{Sub}(\sigma)$，$\psi=\exists y\varphi$，$\mathrm{Fv}(\psi)=\varnothing$，

(4) $\forall\vec{v}[R_\psi(\vec{v})\leftrightarrow\bigwedge\limits_{\xi<\kappa}R_{\varphi_\xi}(\vec{v})]$， 对 $\psi\in\mathrm{Sub}(\sigma)$，$\psi=\bigwedge\limits_{\xi<\kappa}\varphi_\xi$，

(5) $\forall\vec{v}R_\psi(\vec{v})\leftrightarrow\exists\vec{v}R_\psi(\vec{v})$， 对 $\psi\in\mathrm{Sub}(\sigma)$，$\mathrm{Fv}(\psi)=\varnothing$，

(6) $\forall\vec{v}R_\sigma(\vec{v})$.

若我们把公理(1)—(4)看作与下列(7)—(8)等价，则更容易把握它们的意义：

(7) $\forall\vec{v}[\psi(\vec{v})\leftrightarrow R_\psi(\vec{v})]$， 对 $\psi\in\mathrm{Sub}(\sigma)$，$\mathrm{Fv}(\psi)\neq\varnothing$，

(8) $\psi\leftrightarrow\forall\vec{v}R_\psi(\vec{v})$， 对 $\psi\in\mathrm{Sub}(\sigma)$，$\mathrm{Fv}(\psi)=\varnothing$.

我们把(1)—(4)和(7)—(8)的等价性证明留给读者作为练习.

下面我们依次证明三个断定：

断定(Ⅰ)：$|\mathscr{L}'|\leqslant\kappa$.

此证明显然.

断定(Ⅱ)：存在幂$\leqslant\kappa$ 的 $\mathscr{L}'_{\omega\omega}$-型集 S 使得对任意结构 $\mathfrak{B}$：

$$\mathfrak{B}\models\Sigma\Leftrightarrow\mathfrak{B}\text{ 省略 }S.$$

断定(Ⅱ)的证明：对每一形如(1)—(3)和(6)的公理，令 S 包含一个型使得该型的唯一元素就是对应的使其外部量词被删去的公理的否定. 例如，对 σ 的原子子公式 φ 使得 $\mathrm{Fv}(\varphi)\neq\varnothing$，$S$ 包含型 $\{\neg[\varphi(\vec{v})\leftrightarrow R_\varphi(\vec{v})]\}$，对(2)，(3)和(6)也如此. 对每一形如(1)$'$，(3)$'$和(5)的公理，令 S 包含由该公理的否定构成的(0 个变元的)型. 最后，对每一形如(4)的公理，对每一 $\xi<\kappa$，令 S 包含型

$$\{\neg[R_\psi(\vec{v})\to R_{\varphi_\xi}(\vec{v})]\}.$$

还令 S 包含型$\{R_{\varphi_\xi}(\vec{v})\wedge\neg R_\psi(\vec{v}):\xi<\kappa\}$，其中 $\psi=\bigwedge\limits_{\xi<\kappa}\varphi_\xi$. 显然，$S$ 的幂$\leqslant\kappa$ 且 S 中每一型的幂$\leqslant\kappa$. (**注意**：S 中的型的自由变元的个数这里没加限制，但是就象在 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$-模型论那样，对原来语言作适当的扩张，就可以把 S 中的型转化为扩张语言中只有一个自由变元的型，读者可以作为练习做做这类转化.)

若 $\mathfrak{B}$ 省略 S 且 $\vec{b}$是 B 中适当长度的有穷序列，则对 σ 的每一原子公式 φ，我们有：

$$\mathfrak{B}\models\neg\neg(\varphi\leftrightarrow R_\varphi)[\vec{b}],$$

因此 $\mathfrak{B}\models\forall\vec{v}[\varphi(\vec{v})\leftrightarrow R_\varphi(\vec{v})]$. 类似的论证能证明形如(1)$'$，(2)，(3)，(3)$'$，(5)和(6)的所有公理在 $\mathfrak{B}$ 中成立. 考虑形如(4)这样的公理，对每一 $\vec{b}\in B$，我们有

$$\mathfrak{B}\models(R_\psi\to R_{\varphi_\xi})[\vec{b}],\qquad\text{对每一 }\xi<\kappa,\text{ 且}$$

$$\mathfrak{B}\models\neg(R_{\varphi_\xi}\wedge\neg R_\psi)[\vec{b}],\quad\text{对某个 }\xi<\kappa,$$

即 $\qquad\mathfrak{B}\models(R_\psi\to\bigwedge\limits_{\xi<\kappa}R_{\varphi_\xi})[\vec{b}],\quad\mathfrak{B}\models\bigvee\limits_{\xi<\kappa}(\neg R_{\varphi_\xi}\vee R_\psi)[\vec{b}].$

因此，对后者有

$$\mathfrak{B}\models(\bigwedge_{\xi<\kappa}R_{\varphi_\xi}\to R_\psi)[\vec{b}],$$

从而 $\qquad\mathfrak{B}\models\forall\vec{v}[R_\psi(\vec{v})\leftrightarrow\bigwedge\limits_{\xi<\kappa}R_{\varphi_\xi}(\vec{v})].$

这样，我们证明了所有形如(4)的句子在 $\mathfrak{B}$ 中成立，因此 $\mathfrak{B}\models\Sigma$.

反之，易证若 $\mathfrak{B}\models\Sigma$，则 $\mathfrak{B}$ 省略 S.

断定(Ⅲ)：任给语言 $\mathscr{L}$ 的结构 $\mathfrak{A}$，

$$\mathfrak{A}\models\varphi\Leftrightarrow\mathfrak{A}\text{ 有对 }\mathscr{L}'\text{ 的膨胀 }\mathfrak{A}_1\text{ 使得 }\mathfrak{A}_1\models\Gamma.$$

断定(Ⅲ)的证明：据句子(6)和(8)，显然有"$\Leftarrow$".

下证"$\Rightarrow$"：定义 $\mathfrak{A}_1$ 如下：

$\mathfrak{A}_1\upharpoonright\mathscr{L}=\mathfrak{A}$，

$R_\psi^{\mathfrak{A}_1}=\psi^{\mathfrak{A}}=\{\vec{b}\in A^{\mathrm{Fv}(\psi)}:\mathfrak{A}\models\psi[\vec{b}]\}$，

对每一 $\psi\in\mathrm{Sub}(\sigma)$，$\mathrm{Fv}(\psi)\neq\varnothing$，

$$R_\psi^{\mathfrak{A}_1}=\begin{cases}A, & \text{若 }\mathfrak{A}\models\psi,\\ \varnothing, & \text{若 }\mathfrak{A}\models\neg\psi,\end{cases}\qquad\text{对每一 }\psi\in\mathrm{Sub}(\sigma),\mathrm{Fv}(\psi)=\varnothing.$$

显然，$\mathfrak{A}_1\models\Sigma$. 断定(Ⅲ)成立.

现令 $\mathfrak{A}$ 是 σ 的模型且 $|A|\geqslant\mathbf{m}_\kappa$，令 $\mathfrak{A}_1$ 是断定(Ⅲ)给出的 $\mathfrak{A}$ 的膨胀. 因为 $\mathfrak{A}_1\models\Sigma$，所以据断定(Ⅰ)，$\mathfrak{A}_1$ 省略 S. 因为 $|A_1|\geqslant\mathbf{m}_\kappa$ 且 $|\mathscr{L}'|\leqslant\kappa$，所以存在任意大基数且省略 S 的模型 $\mathfrak{B}$. 据断定(Ⅲ)，$\mathfrak{B}$ 对 $\mathscr{L}$ 的归约就是 σ 的基数任意大的模型. □

说明：上述定理在 $\kappa=\omega$ 的情况下首先由 López-Escobar 证明，他和 Morley 还进一步认识到 $\mathbf{m}_\omega=\beth_{\omega_1}$，从而 $\mathbf{h}_\omega=\beth_{\omega_1}$，但他们的证明方法依赖对 ω-逻辑的模型的研究，而不是上述证明所用的、较为直接的方法.

作为 11.3.1(证明)的一个推论，可得 11.1.5 的另一种形式的证明：

11.3.2 定理(推论 11.1.5 的另一种形式) 令 κ 是无穷基数，Σ_1 是幂$\leqslant\kappa$ 的 $\mathscr{L}_{\kappa^+\omega}$-句子集，$\mathfrak{B}$ 是 Σ_1 的模型. 对每一基数 λ 使得 $\kappa\leqslant\lambda\leqslant|B|$，存在 Σ_1 的模型 $\mathfrak{A}$ 使得 $|A|=\lambda$. 若 $X\subseteq A$ 是幂$\leqslant\lambda$ 的集合，则可以选择 $\mathfrak{A}$ 使得 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathfrak{B}$ 的初等子结构且包含 X.

证明：因为幂$\leqslant\kappa$ 的 $\mathscr{L}_{\kappa^+\omega}$-句子集等价于一个单句(即该集合的合取)，只须证 $\Sigma_1=\{\sigma\}$ 的 11.3.2. 我们还注意到，σ 包含$\leqslant\kappa$ 个符号，所以不妨假设 $|\mathscr{L}|\leqslant\kappa$. 因为 $\mathfrak{B}\models\sigma$，所以据 11.3.1 证明中的

断定(Ⅲ),$\mathfrak{B}$ 有语言 $\mathscr{L}'$ 的膨胀 $\mathfrak{B}_1$ 使得 $\mathfrak{B}_1 \models \Sigma$. 据断定(Ⅰ),$\mathfrak{B}_1$ 省略由 Σ 构造的 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$ 的型集 S. 因为 $|\mathscr{L}'| \leqslant \kappa$,所以据 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$ 的向下-LS-定理,存在 $\mathfrak{A}_1 \prec \mathfrak{B}_1$ 使得 $X \subseteq A_1$ 且 $|A_1| = \lambda$. 显然,$\mathfrak{A}_1$ 也省略 S,因此 $\mathfrak{A}_1 \models \Sigma$. 据 11.3.1 证明中的断定(Ⅲ),$\mathfrak{A}_1 \upharpoonright \mathscr{L} = \mathfrak{A}$ 是 σ 的模型,而且具有我们要求的性质. □

下面我们来研究 $\mathscr{L}_{\kappa^+\omega}$ 的 Hanf-数的下界:

(i) 对每一无穷基数 κ, $\beth_{\kappa^+} \leqslant \mathbf{h}_\kappa$ (11.3.3),

(ii) 若 $\mathrm{cf}(\kappa) > \omega$,则 $\beth_{\kappa^+} < \mathbf{h}_\kappa$ (11.3.6).

证明这些结果的技巧在于用 $\mathscr{L}_{\kappa^+\omega}$ 的一句子定义适当序型 α 的一良序,然后形式化诸集合 $\mathbf{R}(\beta)$,$\beta < \alpha$,的累积谱系(cumulative hierarchy)的相关部分,从而推出 $\mathscr{L}_{\kappa^+\omega}$ 的某个句子的所有模型有幂 $< \beth_\alpha$. 据 Hanf-数的定义,$\beth_\alpha \leqslant \mathbf{h}_\kappa$. 用同样的方式,我们有

(iii) $\mathbf{n}_\kappa \geqslant \beth_{(2^\kappa)^+}$ (11.3.5).

11.3.3 定理(Morley) 对每一无穷基数 κ, $\beth_{\kappa^+} \leqslant \mathbf{h}_\kappa$.

证明:我们要构造语言 $\mathscr{L}$,且对每一 $\alpha < \kappa^+$,构造 $\mathscr{L}_{\kappa^+\omega}$-句子 σ_α 使得 σ_α 有幂 $\beth_\alpha$ 的模型但没有更大幂的模型,从而使 $\mathbf{h}_\kappa \not< \beth_{\kappa^+}$. 因为 $\mathbf{h}_\kappa$ 存在,所以 $\beth_{\kappa^+} \leqslant \mathbf{h}_\kappa$.

令 $\alpha < \kappa^+$, $\{\beta_\xi : \xi < \max\{|\alpha|, \omega\}\}$ 是 $\omega + \alpha$ 的无重复枚举,语言 $\mathscr{L}$ 有下列符号:

二元关系 E, 一元关系 Rank,

个体常元集 $\{c_{\beta_\xi} : \xi < \max\{|\alpha|, \omega\}\}$.

句子 σ_α 是下列句子的合取:

(1) $\forall x[xEc_{\beta_\xi} \leftrightarrow \bigvee_{\beta_\eta < \beta_\xi} x \equiv c_{\beta_\eta}]$, 对每一 $\xi < \max\{|\alpha|, \omega\}$,

(2) $\forall x \bigvee \{\mathrm{Rank}(x) \equiv c_{\beta_\xi} : \xi < \max\{|\alpha|, \omega\}\}$,

(3) $\mathrm{Rank}(c_{\beta_\xi}) \equiv c_{\beta_\xi}$, 对每一 $\xi < \max\{|\alpha|, \omega\}$,

(4) $\forall xy[xEy \to \mathrm{Rank}(x) E \,\mathrm{Rank}(y)]$,

(5) $\forall xy[\forall z(zEx \leftrightarrow zEy) \to x \equiv y]$.

显然，$\langle \mathbf{R}(\omega+\alpha), \in, \rho, \beta_\xi \rangle_{\xi<\max\{|\alpha|,\omega\}}$ 是 σ_α 的模型，其中 $\in$ 指称通常集合论的属于关系，ρ 解释秩函数 Rank；它们都限制在 $\mathbf{R}(\omega+\alpha)$ 上. 还须注意：$|\mathbf{R}(\omega+\alpha)| = \beth_\alpha$. 现在假设 $\mathfrak{A}$ 是 σ_α 的任意模型，我们来定义单射 $f: A \to \mathbf{R}(\omega+\alpha)$（不必然保持 $\mathfrak{A}$ 中的关系、函数和个体常元！），从而使 $|A| \leqslant \beth_\alpha$，这样就证明了11.3.3.

因此余下所要做的是定义具有上述性质的 f：

据句子(2)，对某个 $\xi<\max\{|\alpha|,\omega\}$，$A$ 的每一形如 $\mathrm{Rank}^{\mathfrak{A}}(x)$ 的元素等于 $c^{\mathfrak{A}}_{\beta_\xi}$，因此 X 的任意元（其中 $\varnothing \neq X \subseteq A$ 且该元在 $\mathrm{Rank}^{\mathfrak{A}}$ 下的象是 $c^{\mathfrak{A}}_{\beta_\xi}$ 使得 β_ξ 极小）是 X 的 $E^{\mathfrak{A}}$-极小元，所以 $E^{\mathfrak{A}}$ 是良建的，因此下列归纳原则在 $\mathfrak{A}$ 中成立：

$$\forall x[\forall u(uEx \to \Phi(u)) \to \Phi(u)] \to \forall x \Phi(x),$$

这就允许我们归纳定义 σ_α 的诸模型间的映射.

据上述归纳原则，若 $y \in A$ 且对所有 $x \in A$，f 已定义使得 $xE^{\mathfrak{A}}y$，则我们定义

$$f(y) = \{f(x): x \in A \text{ 且 } \mathfrak{A} \models xEy\},$$

而这意味对所有 $x, y \in A$，

$$f(x) \in f(y) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models xEy \Leftrightarrow xE^{\mathfrak{A}}y. \tag{11.9}$$

下证 $\mathrm{Ran}(f) \subseteq \mathbf{R}(\omega+\alpha)$. 为此先证下列(11.10)和(11.11)：

$$y \in A \Rightarrow \rho(f(y)) \leqslant f(\mathrm{Rank}^{\mathfrak{A}}(y)). \tag{11.10}$$

$$f(c^{\mathfrak{A}}_{\beta_\xi}) = \beta_\xi, \quad \text{对 } \xi<\max\{|\alpha|,\omega\}. \tag{11.11}$$

注意：(11.11)蕴涵(11.10)中不等式的右边是一序数.

假设 $f(c^{\mathfrak{A}}_{\beta_\delta}) \in f(c^{\mathfrak{A}}_{\beta_\xi})$，则

$$\begin{aligned} f(c^{\mathfrak{A}}_{\beta_\delta}) \in f(c^{\mathfrak{A}}_{\beta_\xi}) &\Leftrightarrow c_{\beta_\delta} E^{\mathfrak{A}} c_{\beta_\xi}, && \text{据(11.9)} \\ &\Leftrightarrow \bigvee_{\beta_\eta<\beta_\xi} c_{\beta_\delta} \equiv c_{\beta_\eta}, && \text{据句子(1)} \\ &\Leftrightarrow \beta_\delta \in \beta_\xi \\ &\Leftrightarrow f(c^{\mathfrak{A}}_{\beta_\delta}) \in \beta_\xi, && \text{据归纳假设} \end{aligned}$$

所以 $f(c^{\mathfrak{A}}_{\beta_\xi}) = \beta_\xi$，(11.11)成立.

下面我们用归纳原则来证明(11.10)：因为

$$\rho(f(y))=\sup\{\rho(f(x)):x\in A \text{ 且 } \mathfrak{A}\models xEy\}，\text{且}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}\models xEy &\Rightarrow \mathfrak{A}\models \mathrm{Rank}(x)E\,\mathrm{Rank}(y), && \text{据(4)}\\ &\Rightarrow f(\mathrm{Rank}^{\mathfrak{A}}(x))\in f(\mathrm{Rank}^{\mathfrak{A}}(y)), && \text{据(11.9)}\end{aligned}$$

所以据归纳假设，对所有 $x\in A$ 使得 $\mathfrak{A}\models xEy$，我们有

$$\rho(f(x))\leqslant f(\mathrm{Rank}^{\mathfrak{A}}(x))<f(\mathrm{Rank}^{\mathfrak{A}}(y)),$$

所以(11.10)成立.

假设 $y\in A$，据句子(3)，对某个 $\xi<\max\{|\alpha|,\omega\}$，$\mathrm{Rank}^{\mathfrak{A}}(y)=c_{\beta_\xi}^{\mathfrak{A}}$. 据(11.11)，$f(\mathrm{Rank}^{\mathfrak{A}}(y))=\beta_\xi<\omega+\alpha$. 据(11.10)，

$$\rho(f(y))\leqslant f(\mathrm{Rank}^{\mathfrak{A}}(y))<\omega+\alpha,$$

所以 $\mathrm{Ran}(f)\subseteq \mathbf{R}(\omega+\alpha)$.

最后我们来证明 f 是单射，即对任意 $x,y\in A$，证明：

$$x=y\Leftrightarrow f(x)=f(y).$$

据 f 的构造，"⇒"显然. 设 $x\neq y$，据句子(5)，存在 $z\in A$ 使

$$(zE^{\mathfrak{A}}x \text{ 但并非 } zE^{\mathfrak{A}}y)\text{或}(\text{并非 } zE^{\mathfrak{A}}x \text{ 但 } zE^{\mathfrak{A}}y).$$

据(11.9)，在这两种情况下都有 $f(x)\neq f(y)$. □

说明：11.3.3由 Morley 得到，但其证明思想可以追溯到 Scott 的[1958].

下面定理包含寻找 Hanf-数下界的技巧. 在此我们用 Morley-数 $\mathbf{m}_\kappa,\mathbf{n}_\kappa$，而不是用 Hanf-数 $\mathbf{h}_\kappa$ 来表述这个结果：

11.3.4定理 令 ξ 是无穷序数，假设存在 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$-句子集 Σ(其中 $|\mathscr{L}|\leqslant\kappa$)，$\mathscr{L}_{\omega\omega}$-型集 S，$\mathscr{L}_{\omega\omega}$-公式 $\varphi(v_0,v_1)$和序数 η 使得

(1) 对每一省略 S 且是 Σ 的模型 $\mathfrak{A}$，$\varphi^{\mathfrak{A}}$ 以 $\leqslant\eta$ 的序型良序 A，

(2) 存在省略 S 且是 Σ 的模型 $\mathfrak{B}$ 使得 $\varphi^{\mathfrak{B}}$ 以 $\geqslant\xi$ 的序型良序 A.

证明 $\mathbf{n}_\kappa>\beth_\xi$，若 $|S|\leqslant\kappa$，证明 $\mathbf{m}_\kappa>\beth_\xi$.

证明：令 $\mathscr{L}_1$ 由 $\mathscr{L}$ 的符号和下列符号组成：

两个一元谓词 M 和 Q，

一个二元谓词 E，

一个一元函数符号 Rank，

$\aleph_0$ 个个体常元 c_n，$n<\omega$.

显然，$|\mathscr{L}_1|\leqslant\kappa$. 对 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$ 的每一公式 ψ，称 ψ^Q 是 ψ **相对一元谓词 Q 的相对化公式** $\Leftrightarrow$ ψ 中形如 $\forall x\theta$ 的子公式被 $\forall x(Q(x)\to\theta)$ 置换，形如 $\exists x\theta$ 的子公式被 $\exists x(Q(x)\wedge\theta)$ 置换. 对每一 $\Gamma\in\boldsymbol{S}$，令 $\Gamma^Q=\{\psi^Q:\psi\in\Gamma\}$；还令

$$\Gamma_1=\{M(v_0)\}\cup\{\neg(v_0\equiv c_n):n<\omega\},$$

$$\boldsymbol{S}^Q=\{\Gamma^Q:\Gamma\in\boldsymbol{S}\}\cup\{\Gamma_1\}.$$

则 $|\boldsymbol{S}^Q|=|\boldsymbol{S}|+1$，令 $\Sigma^Q=\{\psi^Q:\psi\in\Sigma\}$ 且增加下列公理：

$$\psi_1=\forall xy[\forall z(zEx\leftrightarrow zEy)\to x\equiv y],$$

$$\psi_2=\forall xQ(\mathrm{Rank}(x)),$$

$$\psi_3=\forall xy[xEy\to\varphi^Q(\mathrm{Rank}(x),\mathrm{Rank}(y))],$$

$$\psi_4=\forall x[M(x)\leftrightarrow\neg\exists y\varphi^Q(\mathrm{Rank}(y),\mathrm{Rank}(x))];$$

其中 ψ_2 和 ψ_3 断定 Rank 相对 E 和序 φ^Q 是一秩函数，其值在 Q 中，ψ_4 断定 $x\in M\Leftrightarrow x$ 有极小秩.

令 $\Sigma_1=\Sigma^Q\cup\{\psi_1,\cdots,\psi_4\}$. 显然，若 $\mathfrak{A}\models\Sigma_1$，则 $\mathfrak{A}\restriction Q^{\mathfrak{A}}\models\Sigma$. 若 $\mathfrak{A}$ 省略 $\boldsymbol{S}^Q$，则 $\mathfrak{A}\restriction Q^{\mathfrak{A}}$ 省略 $\boldsymbol{S}$. 而在这样的假设下，据题设(1)，$Q^{\mathfrak{A}}$ 以 $\leqslant\eta$ 的序型被 $(\varphi^Q)^{\mathfrak{A}\restriction Q^{\mathfrak{A}}}$ 良序. 令 $\langle a_\alpha:\alpha<\zeta\rangle$，$\zeta\leqslant\eta$，是在由 φ^Q 定义的序中对 $Q^{\mathfrak{A}}$ 的枚举：

$$\alpha<\beta(<\zeta)\Leftrightarrow\mathfrak{A}\models\varphi^Q[a_\alpha,a_\beta].\qquad(11.12)$$

我们定义：

$$\begin{aligned}A_\alpha&=\{a\in A:\mathrm{Rank}^{\mathfrak{A}}(a)=a_\alpha\}\\&=(\mathrm{Rank}^{\mathfrak{A}})^{-1}[a_\alpha],\quad\text{对 }\alpha<\zeta,\end{aligned}$$

$$f(a)=\{b\in A:bE^{\mathfrak{A}}a\},\quad\text{对 }a\in A.$$

为了简单，我们用 ρ 表示 $\mathrm{Rank}^{\mathfrak{A}}$，用 $a<b$ 表示 $\mathfrak{A}\models\varphi^Q[a,b]$，其中 $a,b\in Q^{\mathfrak{A}}$.

因为 $\mathfrak{A}\models\psi_1$，所以 $a=b\Leftrightarrow f(a)=f(b)$，因此 f 是单射. 令 $a\in A_\alpha$ 且 $b\in f(a)$，则 $\rho(a)=a_\alpha$ 且 $bE^{\mathfrak{A}}a$. 据 ψ_2 和 ψ_3，

$$\mathfrak{A} \models \varphi^Q[\text{Rank}(b), \text{Rank}(a)],$$

即 $\rho(b) \prec a_\alpha$，因此对某个 $\beta < \alpha, \rho(b) = a_\beta$，即 $b \in \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta$，所以有

$$a \in A_\alpha \Rightarrow f(a) \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta. \tag{11.13}$$

据(11.13)和 f 是单射的事实，直接可得

$$|A_\alpha| = |\{f(a): a \in A_\alpha\}| \leqslant \left|\mathscr{P}\left(\bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta\right)\right| \tag{11.14}$$

下证：

$$|A_0| \leqslant \aleph_0. \tag{11.15}$$

为此只须证若 $\rho(a) = a_0$，则对某个 $n < \omega, a = c_n^{\mathfrak{A}}$. 假设不成立，则存在 $a \in A$ 使得 $\rho(a) = a_0$ 且对所有 $n < \omega, a \neq c_n^{\mathfrak{A}}$，因此据(11.12)，

$$\mathfrak{A} \models \neg \exists y \varphi^Q(\text{Rank}(y), \text{Rank}(a)).$$

据 ψ_4，$\mathfrak{A} \models M[a]$，因此据 Γ_1 的构造，a 实现 Γ_1，与 $\mathfrak{A}$ 省略 S^Q 矛盾. (11.15)得证.

据超穷归纳，(11.14)和(11.15)，对所有 $\alpha < \zeta$，

$$\left|\bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta\right| \leqslant \sum_{\beta<\alpha} |A_\beta| \leqslant \alpha \cdot 2^{|\bigcup_{\gamma<\beta} A_\gamma|} \leqslant \alpha \cdot 2^{\beth_\beta} \leqslant \alpha \cdot \beth_{\beta+1} \leqslant \beth_\alpha. \tag{11.16}$$

因为 $\rho: A \to Q^{\mathfrak{A}}$，所以 $A = \bigcup_{\alpha<\zeta} A_\alpha$，因此

$$|A| = \left|\bigcup_{\alpha<\zeta} A_\alpha\right| \leqslant \sum_{\alpha<\zeta} \beth_\alpha \leqslant \beth_\eta.$$

因此 Σ_1 的每一省略 S^Q 的模型的幂 $\leqslant \beth_\eta$.

下证存在 Σ_1 的幂 $\geqslant \beth_\xi$ 的模型使得它省略 S^Q. 据题设(2)，令 $\mathfrak{B}$ 是 Σ 的省略 S 的模型使得 $\varphi^{\mathfrak{B}}$ 以序型 $\zeta \geqslant \xi$ 良序 B. 不妨假设 $B = [0, \zeta)$，且对 $\alpha, \beta < \zeta$，假设 $\alpha < \beta \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[\alpha, \beta]$. 定义 $\mathscr{L}_1$ 的结构 $\mathfrak{B}_1$ 如下：

$B_1 = \bigcup_{\alpha<\zeta} \mathbf{R}(\alpha)$，　$Q^{\mathfrak{B}_1} = [0, \zeta)$，

$\text{Rank}^{\mathfrak{B}_1}(x) = \rho(x)$，　对 $x \in B$，其中 ρ 是秩函数，

$E^{\mathfrak{B}_1} = \in \restriction B_1$，　$M^{\mathfrak{B}_1} = \{\varnothing\}$，

$c_n^{\mathfrak{B}_1} = \varnothing$，　对所有 $n < \omega$，

$S^{\mathfrak{B}_1} = S^{\mathfrak{B}}$，　对任意符号 $S \in \mathscr{L}$.

显然，$\mathfrak{B}_1 \models \psi_i (i=1,\cdots,4)$. 施归纳于 $\psi \in \mathrm{Form}_n(\mathscr{L})$ 的复杂度，其中 $n<\omega$，易证对每一 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n<\zeta$：

$$\mathfrak{B} \models \psi[\alpha_1,\cdots,\alpha_n] \Leftrightarrow \mathfrak{B}_1 \models \psi^Q[\alpha_1,\cdots,\alpha_n].$$

由上式直接可得 $\mathfrak{B}_1 \models \Sigma^Q$. 因为 $\mathfrak{B}$ 省略每一 $\Gamma \in S$，所以 $\mathfrak{B}_1$ 省略 Γ^Q. 此外，显然 $\mathfrak{B}_1$ 省略 Γ_1，因此 $\mathfrak{B}_1$ 省略 S^Q.

因为 Σ_1 的省略 S 的所有模型的基数 $\leqslant \beth_\eta$ 且 Σ_1 有省略 S^Q 且幂 $\geqslant \beth_\xi$ 的模型，因此 $\mathbf{n}_\kappa > \beth_\xi$. 因为 $|S^Q| = |S|+1$，所以本定理最后一个断定也成立. □

说明：上述11. 3. 4出现在 S. Shelah 的[1970]，但在他之前，这个定理以其它形式已为人所知.

作为11. 3. 4的第一个运用，我们有：

11. 3. 5定理(Shelah，[1970]) 对每一无穷基数 κ，

$$\mathbf{n}_\kappa \geqslant \beth_{(2^\kappa)^+}.$$

证明：我们要证对每一序数 ξ 使得 $2^\kappa \leqslant \xi < (2^\kappa)^+$，11. 3. 4的题设得到满足. 对任意这样的 ξ，令 $\eta=\xi$ 且构造 $\mathscr{L}$，Σ 和 S 如下：

因为 $|\xi| = 2^\kappa$，所以存在 $\mathscr{P}(\kappa)$ 上的、序型为 ξ 的序 $\prec$(比方说，$\mathscr{P}(\kappa) = \langle a_\alpha : \alpha < \xi \rangle$)使得

$$a_\alpha \prec a_\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta.$$

令 $\mathscr{L}$ 由下列符号组成：

一元谓词符号 Q_α， 对每一 $\alpha < \kappa$，

二元谓词符号 $<$.

Σ 由表述 $<$ 是个体域 $\mathscr{P}(\kappa)$ 上的线序的公理组成. 令

$$\Gamma = \{Q_\alpha(v_0) \leftrightarrow Q_\alpha(v_1) : \alpha < \kappa\} \cup \{\neg(v_0 \equiv v_1)\}.$$

对每一对 α,β 使得 $\alpha < \beta < \kappa$，定义型 $\Gamma_{\alpha,\beta}$ 如下：

$$\Gamma_{\alpha,\beta} = \{v_0 < v_1\} \cup \{Q_\eta(v_0) : \eta \in a_\beta\} \cup \{\neg Q_\eta(v_0) : \eta \in \kappa - a_\beta\}$$
$$\cup \{Q_\delta(v_1) : \delta \in a_\alpha\} \cup \{\neg Q_\delta(v_1) : \delta \in \kappa - a_\alpha\}.$$

令 $S = \{\Gamma_{\alpha,\beta} : \alpha < \beta < \kappa\} \cup \{\Gamma\}$. 这里要注意：$S$ 中的型有两个变元，而11. 3. 4只适用于一个变元的型，但不难看到通过适当调整句子集 Σ，S 能转化为一个变元的型. 我们把细节留给读者.

下证11.3.4的题设(1)和(2)在此成立. 令 $\mathfrak{A}\models\Sigma$ 且 $\mathfrak{A}$ 省略 S，下证：

$$<^{\mathfrak{A}}\text{ 以序型 }\xi\text{ 良序 }A.$$

定义映射 $f:A\to\mathscr{P}(\kappa)$ 如下：

$$f(x)=\{\eta<\kappa:x\in Q_\eta^{\mathfrak{A}}\},\quad \text{对 } x\in A.$$

因为 $\mathfrak{A}$ 省略 Γ，所以对所有 $x,y\in A$ 使得 $x\neq y$，存在 $\alpha<\kappa$ 和公式 $Q(v_0)\leftrightarrow Q(v_1)$ 使得

$$\mathfrak{A}\not\models Q(v_0)\leftrightarrow Q(v_1)[x,y],$$

因此 $x\in Q_\alpha^{\mathfrak{A}}\not\Leftrightarrow y\in Q_\alpha^{\mathfrak{A}}$. 据 f 的构造，$f(x)\neq f(y)$. 另一方面，显然有 $x=y\Rightarrow f(x)=f(y)$，所以 f 是单射. 下证：

$$x<^{\mathfrak{A}}y\Leftrightarrow f(x)\prec f(y),\quad \text{对 } x,y\in A. \tag{11.17}$$

令 $f(x)=a_\alpha, f(y)=a_\beta$. "$\Rightarrow$"：因为 f 是单射，所以 $x<^{\mathfrak{A}}y\Rightarrow f(x)\neq f(y)$，因此 $\alpha<\beta$ 或 $\beta<\alpha$. 假设 $\beta<\alpha$，因为

$$\eta\in a_\alpha\Leftrightarrow x\in Q_\eta^{\mathfrak{A}},\quad \delta\in a_\beta\Leftrightarrow y\in Q_\delta^{\mathfrak{A}},$$

所以序对 $\langle x,y\rangle$ 实现 $\Gamma_{\alpha,\beta}$，这与 $\mathfrak{A}$ 省略 S 矛盾. 因此 $\alpha<\beta$，从而

$$f(x)\prec f(y).$$

"$\Leftarrow$"：若 $f(x)\prec f(y)$，则 $\alpha<\beta$ 且 $x\neq y$，因此 $x<^{\mathfrak{A}}y$ 或者 $y<^{\mathfrak{A}}x$. 若 $y<^{\mathfrak{A}}x$，则序对 $\langle y,x\rangle$ 实现 $\Gamma_{\alpha,\beta}$，又与 $\mathfrak{A}$ 省略 S 矛盾. 所以

$$x<^{\mathfrak{A}}y.$$

显然，(11.17)证明 $<^{\mathfrak{A}}$ 的序型小于或等于 $\mathscr{P}(\kappa)$ 在 $\prec$ 下的序型 ξ，从而证明11.3.4的(1)成立.

令 $\mathfrak{B}$ 是下列模型：

$$B=\mathscr{P}(\kappa),\quad <^{\mathfrak{B}}=\prec,$$

$$a_\alpha\in Q_\eta^{\mathfrak{B}}\Leftrightarrow\eta\in a_\alpha,\quad \text{对 } \eta<\kappa,\alpha<\xi.$$

显然，$\mathfrak{B}$ 是 Σ 的模型且省略 S，并且 $<^{\mathfrak{B}}$ 恰好有序型 ξ，因此11.3.4(2)也成立. 由此完成本定理的证明. □

11.3.4的另一个运用是下列定理：

11.3.6定理 对每一无穷基数 κ，若 $\mathrm{cf}(\kappa)>\omega$，则

$$\beth_{\kappa^+} < \mathbf{m}_\kappa = \mathbf{h}_\kappa.$$

证明：我们要构造语言 $\mathscr{L}$，$\mathscr{L}_{\omega\omega}$-句子集 Σ 和幂 $\leqslant\kappa$ 的 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$-型集 S 使得11.3.4的题设(1)和(2)对 $\eta=\xi=\kappa^+$ 成立，

假设 $\mathrm{cf}(\kappa)>\omega$. κ 的典范良序关系是集合论关系 $\in$. 我们知道每一序数 $\alpha<\kappa$ 也是 κ 的真子集. 令关系 $R\subseteq\kappa\times\kappa$ 线序 κ(不必然是良序). 若 R 恰好是良序(不必然是 κ 的典范良序)，则对每一 $\alpha\in\kappa$，$R\upharpoonright\alpha$ 是 α 的良序(因为被良序的集合的子集也被良序). 因为 κ 是基数且 $\alpha<\kappa$，所以有 $|\alpha|<\kappa$，且对某个 $\beta<\kappa$，有 $\langle\alpha,R\upharpoonright\alpha\rangle\cong\langle\beta,\in\upharpoonright\beta\rangle$. 我们来证明下列等价：

(Ⅰ) R 良序 κ.

(Ⅱ) 对每一 $\alpha<\kappa$，存在 $\beta<\kappa$ 使得

$$\langle\alpha,R\upharpoonright\alpha\rangle\cong\langle\beta,\in\upharpoonright\beta\rangle.$$

我们已证(Ⅰ)$\Rightarrow$(Ⅱ). 下证(Ⅱ)$\Rightarrow$(Ⅰ)：假设 R 不能良序 κ，则存在诸序数 $\alpha_n<\kappa$ 的一个无穷 R-递降序列

$$\cdots R\alpha_nR\alpha_{n-1}R\cdots R\alpha_2R\alpha_1R\alpha_0.$$

因为 $\mathrm{cf}(\kappa)>\omega$，所以存在 $\alpha<\kappa$ 使得 $\{\alpha_n:n<\omega\}\subseteq\alpha$. 因此 $R\upharpoonright\alpha$ 不能良序 α，这意味 $\langle\alpha,R\upharpoonright\alpha\rangle$ 不能同构于任何 $\langle\beta,\in\upharpoonright\beta\rangle$. 证毕.

下面我们用(Ⅱ)(**注意**：(Ⅱ)可以用 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$-句子集和型来"述说")从 κ 的线序中挑选出 κ 的良序来.

令语言 $\mathscr{L}$ 有下列符号：

κ 个个体常元 c_α，　$\alpha<\kappa$，

一个二元关系符号 $<$，　两个一元谓词 K，J，

一个三元谓词 S，　　两个四元谓词 F，G.

我们要选择 S 和 Σ 使得 Σ 的省略 S 的任何模型同构如下定义的诸模型 $\mathfrak{A}_\zeta$ 中的一个：其中 $\kappa\leqslant\zeta\leqslant\kappa^+$，

(i)　$c_\alpha^{\mathfrak{A}_\zeta}=\alpha$，　对 $\alpha<\kappa$，

(ii)　$K^{\mathfrak{A}_\zeta}=\{\alpha:\alpha<\kappa\}=\kappa$，

(iii)　$J^{\mathfrak{A}_\zeta}\subseteq[\kappa,\zeta)=\{\beta:\kappa\leqslant\beta<\zeta\}$，

(iv)　$A = K^{\mathfrak{A}_\zeta} \cup J^{\mathfrak{A}_\zeta}$,

(v)　$<^{\mathfrak{A}_\zeta} = \in \restriction A$.

对每一$\xi \in J^{\mathfrak{A}_\zeta}$，选择序型为$\xi$的关系$R_\xi \subseteq \kappa \times \kappa$使得$R_\xi$良序$\kappa$且当$\xi = \kappa$时，$R_\kappa = \in \restriction \kappa$. 因此定义：

(vi)　$S^{\mathfrak{A}_\zeta} = \{\langle \xi, \gamma, \eta \rangle : \xi \in J^{\mathfrak{A}_\zeta},\ \eta, \gamma < \kappa$ 且 $\langle \gamma, \eta \rangle \in R_\xi\}$.

从上述(Ⅰ)和(Ⅱ)的等价性，可得每一R_ξ有性质(Ⅱ)，因此对每一$\alpha < \kappa$，存在(唯一确定的)$\beta < \kappa$和f_α^ξ使得

$$f_\alpha^\xi : \langle \alpha, R_\xi \restriction \alpha \rangle \cong \langle \beta, \in \restriction \beta \rangle.$$

定义

(vii)　$F^{\mathfrak{A}_\zeta} = \{\langle \xi, \alpha, \eta, \delta \rangle : \xi \in J^{\mathfrak{A}_\zeta},\ \alpha < \kappa$ 且 $\langle \eta, \delta \rangle \in f_\alpha^\xi\}$.

令$\xi_1, \xi_2 \in J^{\mathfrak{A}_\zeta}$且$\xi_1 < \xi_2$，则关系$R_{\xi_i}$以序型$\xi_i$良序$\kappa$，因此$\langle \kappa, R_{\xi_1} \rangle$同构于$\langle \kappa, R_{\xi_2} \rangle$的一个真初始节. 据经典集合论，我们知道相应的同构g_{ξ_1, ξ_2}是唯一确定的. 令

(viii)　$G^{\mathfrak{A}_\zeta} =$

$$\{\langle \xi_1, \xi_2, \eta, \delta \rangle : \xi_1, \xi_2 \in J^{\mathfrak{A}_\zeta}, \xi_1 < \xi_2 \text{且} \langle \eta, \delta \rangle \in g_{\xi_1, \xi_2}\}.$$

易见，Σ应该包括下列句子：

(1)　$c_\alpha < c_\beta$,　对$\alpha < \beta < \kappa$,

(2)　$K(c_\alpha)$,　对$\alpha < \kappa$,

(3)　"$<$是个体域上的线序",

(4)　$\forall x[K(x) \vee J(x)]$,

(5)　$\forall xy[K(x) \wedge J(x) \rightarrow x < y]$,

(6)　$\forall x[J(x) \rightarrow$ "$S(x, \cdot, \cdot) \cap K^2$是$K$的线序"$]$,

(7)　$\forall xy[J(x) \wedge K(y) \rightarrow \exists z[K(z) \wedge$ "$F(x, y, \cdot, \cdot)$是从
$\langle \{u \in K : S(x, u, y)\}, S(x, \cdot, \cdot) \rangle$到
$\langle \{v \in K : v < z\}, < \rangle$的保序双射"$]]$,

(8)　$\forall xy[J(x) \wedge J(y) \rightarrow [x < y \leftrightarrow$ "$G(x, y, \cdot, \cdot)$是从
$\langle K, S(x, \cdot, \cdot) \rangle$到$\langle K, S(y, \cdot, \cdot) \rangle$一真初始节上的
序同构"$]]$.

显然，$\mathfrak{A}_\xi$ 是 Σ 的模型. 令 S 包括下列型：

(9) $\Gamma=\{K(v_0)\}\cup\{\neg(v_0\equiv c_\alpha):\alpha<\kappa\}$，

(10) $\Sigma_\alpha=\{v_0<c_\alpha\}\cup\{\neg(v_0\equiv c_\xi):\xi<\alpha\}$， 对 $\alpha<\kappa$.

注意：

$$\mathfrak{A}_\xi \text{ 省略 } \Gamma \Leftrightarrow K^{\mathfrak{A}_\xi}\subseteq\{c_\alpha^{\mathfrak{A}_\xi}:\alpha<\kappa\},$$

$$\mathfrak{A}_\xi \text{ 省略 } \Sigma_\alpha \Leftrightarrow \mathfrak{A}_\xi\models\forall v_0[v_0<c_\alpha\rightarrow\bigvee_{\xi<\alpha}(v_0\equiv c_\xi)].$$

因为 $\mathfrak{A}_{\kappa^+}$ 是 Σ 的、省略 S 的模型，所以11.3.4(2)对 $\xi=\kappa^+$ 成立.

另一方面，若 $\mathfrak{A}$ 是 Σ 的任意模型且省略 S，则据(10)，(1)和(3)，集合 $\{c_\alpha^{\mathfrak{A}}:\alpha<\kappa\}$ 是由 $<^{\mathfrak{A}}$ 以序型 κ 良序的 A 的一初始节. 据句子(9)和(2)，$K^{\mathfrak{A}}=\{c_\alpha^{\mathfrak{A}}:\alpha<\kappa\}$. 据句子(6)，对 $x\in J^{\mathfrak{A}}$，集合

$$R_x=\{\langle y,z\rangle:y,z\in K^{\mathfrak{A}} \text{ 且 } \langle x,y,z\rangle\in S^{\mathfrak{A}}\}$$

是 $K^{\mathfrak{A}}$ 的线序. 据句子(7)，这个线序满足上述性质(Ⅱ). 因为(Ⅱ)$\Rightarrow$(Ⅰ)，所以 R_x 是 $K^{\mathfrak{A}}$ 的良序. 据句子(8)，对 $x,y\in J^{\mathfrak{A}}$，

$$x<^{\mathfrak{A}}y \Leftrightarrow \langle K^{\mathfrak{A}},R_x\rangle \text{ 同构于 } \langle K^{\mathfrak{A}},R_y\rangle \text{ 的一真初始节}.$$

因此映射

$$x\mapsto\overline{\langle K^{\mathfrak{A}},R_x\rangle}\quad(=\langle K^{\mathfrak{A}},R_x\rangle \text{ 的序型})$$

是 $\langle J^{\mathfrak{A}},<^{\mathfrak{A}}\upharpoonright J^{\mathfrak{A}}\rangle$ 和由 $\in$ 排序的 $[\kappa,\kappa^+)$ 的一子集之间的同构. 因此 $<^{\mathfrak{A}}$ 以 $\leqslant\kappa^+$ 的序型良序 $J^{\mathfrak{A}}$. 据句子(4)和(5)，$\langle A,<^{\mathfrak{A}}\rangle$ 是 $\langle K^{\mathfrak{A}},<^{\mathfrak{A}}\rangle$ 和 $\langle J^{\mathfrak{A}},<^{\mathfrak{A}}\rangle$ 的**有序和**，因此 $<^{\mathfrak{A}}$ 以 $\leqslant\kappa^+$ 的序型良序 A. 这样我们证明了11.3.4的条件(1)当 $\eta=\kappa^+$ 时被满足. 因为 S 有幂 κ，所以 $\mathbf{m}_\kappa>\beth_{\kappa^+}$. □

说明：(1) 类似11.3.6的一个结果(用不同的语言)是由 M. D. Morley 和 V. Morley 在其[1967]提出，当然，他们的证明用了构造性公理 $\mathbf{V}=\mathbf{L}$. 后来 J. H. Silver 说明如何消去假设 $\mathbf{V}=\mathbf{L}$，但所用方法比较复杂，也不完全是构造性的. 上述根据(Ⅰ)和(Ⅱ)的等价性所做的较简单的论证主要由 Chang 在其[1968a]给出. 我们这里更简洁的表述来自 Dickmann 的[1975].

(2) 在第13章我们要刻画一个序数 α 使得 $\mathbf{m}_\kappa=\beth_\alpha$. 从上述定

理可见，这个 α 要比 κ^+ 大得多.

下面我们来研究 Morley-数的上界，在此给出的几个证明是 Chang 对 Morley 原来对 $\mathbf{m}_\omega=\beth_{\omega_1}$ 的证明的扩充. 采用的方法是巧妙地把不可辨元、Skolem 函数等方法结合起来.

我们称型 Φ 是 **n-极大型** $\Leftrightarrow$ 对所有具有 n 个自由变元的公式 φ，$\varphi\in\Phi$ 或 $\neg\varphi\in\Phi$. 为了方便我们有时简称其为**极大型**.

对于 $\mathscr{L}$ 的项(至多 κ 个)，我们可以用以下两种方法来枚举：

(1) $\langle t_\xi:\xi<\kappa\rangle$ 是 $\mathscr{L}$ 的所有项的(可以是有重复)枚举，

(2) 对固定的 $n<\omega$，$\langle t_{n,\delta}:\delta<\kappa\rangle$ 是 $\mathscr{L}$ 的恰好有 n 个变元的项的(可以是有重复)枚举. 对 $n=0$，它就是所有闭项的枚举.

注意：为了简单，我们把只在(自由)变元的名字上不同的项看作是相同的. 一旦上述枚举固定下来，我们就可以定义下列函数：

$$h(\xi)=t_\xi\text{ 的变元的个数(因此 }h:\kappa\to\omega).$$

因为 t_ξ 在形如(2)的枚举中对应 $h(\xi)$ 出现，即 t_ξ 在 $\langle t_{h(\xi),\delta}:\delta<\kappa\rangle$ 中，所以我们定义：

$$f(\xi)=\text{最小的 }\delta\text{ 使得}[t_\xi=t_{h(\xi),\delta}]\quad\text{(因此 }f:\kappa\to\kappa).$$

这样，对每一 $\xi<\kappa$，t_ξ 是 $t_{h(\xi),f(\xi)}$.

11.3.7定理 (1) 令 S 是 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$-型集，$\Sigma$ 是 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$-句子集. 若

对每一 $\zeta<(2^\kappa)^+$，存在 Σ 的、省略 S 且幂 $\geqslant\beth_\zeta$ 的模型 $\mathfrak{A}_\zeta$， (11.18)

则存在 Σ 的、省略 S 的任意大幂的模型.

(2) $\mathbf{n}_\kappa=\beth_{(2^\kappa)^+}$.

证明：证(1)：我们要考虑下列命题(i)—(v)并证(i)蕴涵(1)的结论，且对 n=ii，…，v，(n)蕴涵(n−1)，最后证明(v).

因为 $|\mathscr{L}|\leqslant\kappa$，所以在 $\mathscr{L}$ 中存在 $\leqslant 2^\kappa$ 个型. 令 $\langle\Delta_\xi:\xi<2^\kappa\rangle$ 是

$$\{\Delta:\Delta\text{ 是 }\mathscr{L}\text{ 的极大型且 }\Delta\text{ 被某个 }\mathfrak{A}_\zeta\text{ 实现},\zeta<(2^\kappa)^+\}$$

的一枚举. **注意**：该枚举中的 Δ_ξ 和 Δ_{ξ_1} 可以由(11.18)中不同的模型 $\mathfrak{A}_\zeta$，$\mathfrak{A}_{\zeta_1}$ 来实现. 假设 $\Gamma\in S$ 且 $\xi<2^\kappa$，因为存在 $\gamma<(2^\kappa)^+$ 使得 $\mathfrak{A}_\gamma$

实现 Δ_ξ 且省略 Γ，所以 $\Gamma \not\subseteq \Delta_\xi$.

命题(i) *存在 Σ 的、只实现 $\langle \Delta_\xi : \xi < 2^\kappa \rangle$ 中极大型且基数任意大的模型 $\mathfrak{C}$. 换句话说，这样的模型 $\mathfrak{C}$ 实现的每一型是上述枚举中某个 Δ_ξ 的子集.*

断定1：命题(i) $\Rightarrow$ (1)的结论.

断定1的证明：假设命题(i)成立，则任意如命题(i)中规定的 $\mathfrak{C}$ 实现的型是 $\langle \Delta_\xi : \xi < 2^\kappa \rangle$ 中某个 Δ_ξ 的子集，所以据前面的说明，$\mathfrak{C}$ 省略的型不是 $\langle \Delta_\xi : \xi < 2^\kappa \rangle$ 中某个 Δ_ξ 的子集，因此 $\mathfrak{C}$ 省略的型被(11.18)中所有的 $\mathfrak{A}_\xi$ 所省略，尤其是 $\mathfrak{C}$ 省略所有在 S 中的型.

命题(ii) *存在映射 $g : \kappa \to 2^\kappa$ 使得对每一线序集 $\langle X, < \rangle$，存在模型 $\mathfrak{B} \models \Sigma$，$B \supseteq X$，使得对每一 $\xi < \kappa$ 和每一 $x_1 < \cdots < x_{h(\xi)} \in X$ (表示 X 中长度为 $h(\xi)$ 的严格递增序列；这里和下面类似的记号，请参见8.2.2前面)：*

$$\mathfrak{B} \models \Delta_{g(\xi)}[t_\xi^{\mathfrak{B}}[x_1, \cdots, x_{h(\xi)}]]. \tag{11.19}$$

断定2：命题(ii) $\Rightarrow$ 命题(i).

断定2的证明：令 λ 是无穷基数，$\langle X, < \rangle$ 是幂 $\geqslant \lambda$ 的线序集，$\mathfrak{B}$ 是由(ii)规定的包含 $\langle X, < \rangle$ 的结构，据8.2.1，令 $\mathfrak{C} = \mathrm{Hull}(X, \mathfrak{B})$. 通过证明下列断定①—③，我们来证明命题(i)：

① $|C| = |\mathrm{Hull}(X, \mathfrak{B})| = \max\{|\mathscr{L}|, |X|, \aleph_0\} \geqslant \lambda$.

② $\mathfrak{C} \prec_{\infty\omega} \mathfrak{B}$，因此 $\mathfrak{C} \models \Sigma$.

③ 在 $\mathfrak{C}$ 中实现的每一型是 $\langle \Delta_\xi : \xi < 2^\kappa \rangle$ 中某个 Δ_ξ 的子集.

根据第8章的内容，通过对项的代换，$\mathrm{Hull}(X, \mathfrak{B})$ 的每一元素可以表达为形如 $t^{\mathfrak{B}}[x_1, \cdots, x_n]$，其中 $x_1, \cdots, x_n$ 是 X 中适当长度的递增序列，因此

$$\mathrm{Hull}(X, \mathfrak{B}) = \{t_\xi^{\mathfrak{B}}[x_1, \cdots, x_{h(\xi)}] : \xi < \kappa, x_1 < \cdots < x_{h(\xi)} \in X\}.$$

显然，我们有①和②. 下证③：假设 Θ 是由 $\mathfrak{C}$ 中元素 c 实现的型. 对某个 $\xi < \kappa$，我们把 c 写作 $c = t_\xi^{\mathfrak{B}}[x_1, \cdots, x_{h(\xi)}]$；则

$$\mathfrak{C} \models \Theta[t_\xi^{\mathfrak{B}}[x_1, \cdots, x_{h(\xi)}]].$$

因为 $\mathfrak{C}\prec_{\infty\omega}\mathfrak{B}$，则 $\mathfrak{B}\models\Theta[t_\xi^{\mathfrak{C}}[x_1,\cdots,x_{h(\xi)}]]$. 据命题(ii)的(11.19)和 $\Delta_{g(\xi)}$ 的极大性，有 $\Theta\subseteq\Delta_{g(\xi)}$，所以命题(i)成立.

命题(iii) 存在映射 $g:\kappa\to 2^\kappa$ 使得对每一线序集 $\langle X,<\rangle$，(语言 $\mathscr{L}'=\mathscr{L}\cup\{\bar{x}:x\in X\}$ 的)下列句子集是一致的：

$$\Sigma\cup\bigcup_{\xi<\kappa}\{\Delta_{g(\xi)}(t_\xi(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_{h(\xi)})):x_1<\cdots<x_{h(\xi)}\in X\}. \tag{11.20}$$

断定3：命题(iii) ⇒ 命题(ii).

断定3的证明：因为(11.20)是一致的，所以它有($\mathscr{L}'$ 的)模型 $\mathfrak{B}_1$. 令 $\mathfrak{B}=\mathfrak{B}_1\upharpoonright\mathscr{L}$，则易证 $\mathfrak{B}$ 满足命题(ii).

命题(iv) 对每一 $n<\omega$，存在映射 $g:\kappa\to 2^\kappa$ 使得对每一线序集 $\langle X,<\rangle$，下列句子集是一致的：

$$\Sigma\cup\bigcup_{\substack{\gamma<\kappa\\ n<\omega}}\{\Delta_{g_n(\eta)}(t_{n,\gamma}(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n)):x_1<\cdots<x_n\in X\}. \tag{11.21}$$

这恰好是根据枚举(2)对命题(iii)的重述.

断定4：命题(iv) ⇒ 命题(iii).

断定4的证明：定义 $g:\kappa\to 2^\kappa$ 如下：

$$g(\xi)=g_{h(\xi)}(f(\xi)),\quad 对\ \xi<\kappa.$$

因为 $t_\xi=t_{h(\xi),f(\xi)}$，所以显然 g 满足命题(iii).

命题(v) 对每一 $n<\omega$，存在映射 $g_n:\kappa\to 2^\kappa$，结构序列 $\langle\mathfrak{B}_\zeta^n:\zeta<(2^\kappa)^+\rangle$ 和线序集序列 $\langle\langle X_\zeta^n,<_\zeta^n\rangle:\zeta<(2^\kappa)^+\rangle$ 使得下列条件满足：

(1) 每一 $\mathfrak{B}_\zeta^n$ 与(11.18)中的某个 $\mathfrak{A}_\eta$ 相同，

(2) $|X_\zeta^n|>\beth_\zeta$，　对每一 $\zeta<(2^\kappa)^+$，

(3) $X_\zeta^n\subseteq B_\zeta^n$，　对每一 $\zeta<(2^\kappa)^+$，

(4) 对每一 $m\leqslant n,\eta<\kappa,\zeta<(2^\kappa)^+$ 和 $x_1<_\zeta^n\cdots<_\zeta^n x_m\in X_\zeta^n$，

$$\mathfrak{B}_\zeta^n\models\Delta_{g_m(\eta)}[t_{m,\eta}^{\mathfrak{B}_\zeta^n}[x_1,\cdots,x_m]].$$

断定5：命题(v) ⇒ 命题(iv).

断定5的证明：据普通紧致性定理，只须证(11.21)的每一有穷子集 Σ_1 有模型($\langle X,<\rangle$ 是固定的). 令

$$Z=\{x\in X:\bar{x}\ 在\ \Sigma_1\ 中出现\},$$

$n_0=\max\{n<\omega: n$ 在 Σ_1 中出现$\}$.

因为 Σ_1 有穷，所以 Z 有穷且 n_0 存在.

考虑 $n=n_0$ 时由命题(v)给出的序列 $\langle\langle X_\zeta^{n_0},<_\zeta^{n_0}\rangle:\zeta<(2^\kappa)^+\rangle$ 和 $\langle\mathfrak{B}_\zeta^{n_0}:\zeta<(2^\kappa)^+\rangle$. 固定 $\zeta<(2^\kappa)^+$，因为 Z 有穷且 $X_\zeta^{n_0}$ 无穷，所以存在保序单射 $\mathrm{e}:\langle Z,<\upharpoonright Z\rangle\to\langle X_\zeta^{n_0},<_\zeta^{n_0}\rangle$. 据条件(4)，对 $X_\zeta^{n_0}$ 中每一任意长度 $m\leqslant n_0$ 的递增序列 $x_1<_\zeta^{n_0}\cdots<_\zeta^{n_0}x_m$ 和所有 $\eta<\kappa$，特别是对所有长度 $\leqslant n_0$ 且形如 $\mathrm{e}(z)$（其中 $z\in Z$）的元素的所有递增序列，

$$\mathfrak{B}_\zeta^{n_0}\models\Delta_{g_m(\eta)}[t_{m,\eta}^{\mathfrak{B}_\zeta^{n_0}}[x_1,\cdots,x_m]].$$

再据 $\mathfrak{B}_\zeta^{n_0}\models\Sigma$（据命题(v)的性质(1)）和下列事实（这从 n_0 的定义中得到）

$$\Gamma\subseteq\Sigma\cup\bigcup\{\Delta_{g_m(\eta)}(t_{m,\eta}(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_m)): m\leqslant n_0,\eta<\kappa \text{ 且 } x_1<\cdots<x_m\in X\},$$

我们有

$$(\mathfrak{B}_\zeta^{n_0},\mathbf{e}(z))_{z\in Z}\models\Gamma.$$

（**说明**：我们之所以需要一个由诸 $\mathfrak{B}_\zeta^{n_0}$ 构成的序列和一个由诸线序 $\langle X_\zeta^{n_0},<_\zeta^{n_0}\rangle$ 构成的序列，而不是一个 $\mathfrak{B}$ 和一个无穷线序集，是因为对非常大的 γ，$\mathfrak{B}_\zeta^{n+1}$ 和 X_ζ^{n+1} 要由涉及 $\mathfrak{B}_\gamma^n$ 和 X_γ^n 的归纳过程构造起来. 用这种方式，我们能确保性质(4)的有效性.）

最后，我们施归纳于 n 来证明命题(v). 这里要用的归纳假设就是已经定义了的、满足命题(v)的 $g_0,\cdots,g_n$. 为了方便，我们先引入下列定义且先证明一个引理：

11.3.8定义 令 $n<\omega,\zeta<(2^\kappa)^+$，$\mathrm{d}:\kappa\to2^\kappa$ 是函数. 假设我们已知满足命题(v)的 $g_0,\cdots,g_{n-1}$，我们称序对 $\langle\mathrm{d},\zeta\rangle$ 是 **n-良对** $\Leftrightarrow$ 存在线序集 $\langle X,<\rangle$ 和结构 $\mathfrak{B}$ 使得：

(1) $\mathfrak{B}$ 和(11.18)中的某个 $\mathfrak{A}_\delta$ 相同，

(2) $|X|>\beth_\zeta$,

(3) $X\subseteq B$,

(4) 对每一 $m<n,\eta<\kappa$ 和 $x_1<\cdots<x_m\in X$,

$$\mathfrak{B}\models\Delta_{g_m(\eta)}[t^{\mathfrak{B}}_{m,\eta}[x_1,\cdots,x_m]],$$

(5) 对每一 $\eta<\kappa$ 和 $x_1<\cdots<x_n\in X$,

$$\mathfrak{B}\models\Delta_{\mathrm{d}(\eta)}[t^{\mathfrak{B}}_{n,\eta}[x_1,\cdots,x_n]].$$

(**注意**:当 $n=0$时,(4)是空洞的.)

据上述定义,只须令 g_n是任意映射 $\mathrm{d}:\kappa\to 2^\kappa$ 使得对每一$\zeta<(2^\kappa)^+$,序对$\langle\mathrm{d},\zeta\rangle$是 n-良对,就能从下列引理推出命题(v).

11.3.9引理 对每一 $n<\omega$,存在映射 $\mathrm{d}:\kappa\to 2^\kappa$ 使得对每一 $\zeta<(2^\kappa)^+$,序对$\langle\mathrm{d},\zeta\rangle$是 n-良对.

引理11.3.9的证明:施归纳于 n. 在任意步骤 n 上,我们先从下列较弱的命题出发:

(I_n):对每一 $\zeta_0<(2^\kappa)^+$,存在 $\mathrm{d}_0:\kappa\to 2^\kappa$ 使$\langle\mathrm{d}_0,\zeta_0\rangle$是 n-良对.

然后通过下列后继步骤达到11.3.9:

(II_n):存在 $\mathrm{d}_0:\kappa\to 2^\kappa$ 使$\{\zeta<(2^\kappa)^+:\langle\mathrm{d}_0,\zeta\rangle$是 n-良对$\}$与$(2^\kappa)^+$共尾.

(III_n):存在 $\mathrm{d}:\kappa\to 2^\kappa$ 使对所有 $\zeta<(2^\kappa)^+$,$\langle\mathrm{d},\zeta\rangle$是 n-良对.

(III_n)就是 n 值时的11.3.9,所以若(III_n)已证明,则我们可以用它来证明(I_{n+1}),因此我们的归纳程序是:

$$(\mathrm{I}_n)\Rightarrow(\mathrm{II}_n)\Rightarrow(\mathrm{III}_n)\Rightarrow(\mathrm{I}_{n+1}),$$

其中(I_n) ⇒ (II_n) ⇒ (III_n)的证明对所有 $n<\omega$ 是统一的.

断定6:(I_n) ⇒ (II_n).

断定6的证明:对 $\mathrm{d}:\kappa\to 2^\kappa$,令

$$Z_{\mathrm{d}}=\{\zeta<(2^\kappa)^+:\langle\mathrm{d},\zeta\rangle\text{是 }n\text{-良对}\}.$$

命题(I_n)断定$(2^\kappa)^+=\bigcup_{\mathrm{d}\in(2^\kappa)^\kappa}Z_{\mathrm{d}}$. 因为$|(2^\kappa)^\kappa|=2^\kappa$,所以据鸽巢原则(the pigeon-hole principle),存在 $\mathrm{d}_0:\kappa\to 2^\kappa$ 使得$|Z_{\mathrm{d}_0}|=(2^\kappa)^+$. 据基数的基本性质,$Z_{\mathrm{d}_0}$与$(2^\kappa)^+$共尾,即命题($\mathrm{II}_n$)成立.

断定7:(II_n) ⇒ (III_n).

断定7的证明:令命题(II_n)中的 $\mathrm{d}_0=\mathrm{d}$,显然,"$\langle\mathrm{d},\zeta\rangle$是 n-良

对”这个条件在 ζ 的下降下保持不变：

$\langle \mathrm{d}, \zeta_1 \rangle$ 是 n-良对且 $\zeta_2 \leqslant \zeta_1 \Rightarrow \langle \mathrm{d}, \zeta_2 \rangle$ 是 n-良对.

现在我们回过头来证明命题(I_n)：

情况一　$n=0$：任给 $\zeta_0 < (2^\kappa)^+$，令

$\mathfrak{B} = \mathfrak{A}_{\zeta_0+1}$（参见(11.18)），

$X = B$ 的幂 $\geqslant \beth_{\zeta_0+1}$ 的任意子集　（$|B| \geqslant \beth_{\zeta_0+1} \Rightarrow X$ 存在），

$< = X$ 的任意线序.

显然，11.3.8的性质(1)—(3)成立. 在 $n=0$ 的情况下，性质(4)空洞地满足. 下证性质(5)成立：令 Σ_η（其中 $\eta<\kappa$）是 $\mathfrak{B}$ 中由元素 $t^{\mathfrak{B}}_{0,\eta}$（**注意**：$t^{\mathfrak{B}}_{0,\eta}$ 是闭项）实现的型. 因为 Σ_η 是在某个 $\mathfrak{A}_\gamma$ 中实现的极大型，所以据诸 Δ_ξ 的定义，存在 $\beta < 2^\kappa$ 使得 $\Sigma_\eta = \Delta_\beta$. 定义 $\mathrm{d}_0(\eta) = \beta$，因此性质(5)成立，从而证明了 $\langle \mathrm{d}_0, \xi_0 \rangle$ 是0-良对.

情况二　归纳阶段：归纳假设就是命题(III_n).

一旦我们固定了 $\zeta_0 < (2^\kappa)^+$，就能施归纳于 $\zeta_1 = \max\{\zeta_0, 2^\kappa\} + n$，得到线序集 $\langle Y, < \rangle$ 和结构 $\mathfrak{B}$ 使得11.3.8的性质(1)，(3)和下列成立：

(2)′　$|Y| > \beth_{\zeta_1} = \beth_n(\beth_{\max\{\zeta_0, 2^\kappa\}})$，

(4)′　对每一 $m \leqslant n, \eta < \kappa$ 和 $y_1 < \cdots < y_m \in Y$，

$$\mathfrak{B} \models \Delta_{\beta_m(\eta)}[t^{\mathfrak{B}}_{m,\eta}[y_1, \cdots, y_m]].$$

固定 $\xi < \kappa$，对 $\beta < 2^\kappa$，定义 $C^\xi_\beta \subseteq [Y]^{n+1}$（参见9.3.17(4)）如下：

$$\{y_1, \cdots, y_{n+1}\} \in C^\xi_\beta \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 < \cdots < y_{n+1}, & \text{且} \\ \mathfrak{B} \models \Delta_\beta[t^{\mathfrak{B}}_{n+1,\xi}[y_1, \cdots, y_{n+1}]]. \end{cases} \tag{11.22}$$

令 $y_1 < \cdots < y_{n+1} \in Y$，$\Theta$ 是 $\mathfrak{B}$ 中由元素 $t^{\mathfrak{B}}_{n+1,\xi}[y_1, \cdots, y_{n+1}]$ 实现的型. 据性质(1)，Θ 是在某个 $\mathfrak{A}_\delta$ 中实现的极大型，因此存在 $\beta < 2^\kappa$ 使得 $\Theta = \Delta_\beta$，所以 $\{y_1, \cdots, y_{n+1}\} \in C^\xi_\beta$，因此我们证明了对任意 $\xi < \kappa$，

$$[Y]^{n+1} = \bigcup_{\beta < 2^\kappa} C^\xi_\beta,$$

从而

$$[Y]^{n+1}=\bigcap_{\xi<\kappa}\Big(\bigcup_{\beta<2^{\kappa}}C_{\beta}^{\xi}\Big).$$

据布尔代数的分配律(参见 Jech 的[1978]),有

$$[Y]^{n+1}=\bigcup_{d\in(2^{\kappa})^{\kappa}}\Big(\bigcap_{\gamma<\kappa}C_{d(\gamma)}^{\gamma}\Big).$$

因为$|Y|>\beth_{n}(\beth_{\max(\zeta_0,2^{\kappa})})$且上述等式右边中的指标集是$(2^{\kappa})^{\kappa}$(该指标集的幂为$2^{\kappa}\leqslant\beth_{\max(\zeta_0,2^{\kappa})}$),所以据 Erdös-Rado-定理,存在 $X\subseteq Y$ 和 $d_0\in(2^{\kappa})^{\kappa}$ 使得

$$[X]^{n+1}\subseteq\bigcap_{\gamma<\kappa}C_{d_0(\gamma)}^{\gamma},\quad |X|>\beth_{\max(\zeta_0,2^{\kappa})}\geqslant\beth_{\zeta_0}.$$

下面验证我们选择的 $\mathfrak{B}$ 和$\langle X,<\upharpoonright X\rangle$能够使序对$\langle d_0,\zeta_0\rangle$成为$(n+1)$-良对.

显然,11.3.8的性质(1)—(3)被满足.对所有 $m\leqslant n,\eta<\kappa$ 和 $y_1<\cdots<y_m\in Y$,(4)$'$中断定的公式也成立,特别是对所有 $m<n+1,\eta<\kappa$ 和 $x_1,\cdots,x_m\in X$,(4)$'$中断定的公式成立(因为 $X\subseteq Y$).这就意味(4)成立.(5)的验证直接来自(11.22)和下列事实:

$$[X]^{n+1}\subseteq\bigcap_{\gamma<\kappa}C_{d_0(\gamma)}^{\gamma}.$$

这样我们证明了命题(I_n)成立,从而完成了对11.3.9的证明.至此也完成了对11.3.7(1)的全部证明.

对11.3.7(2)的证明:如前所述,我们只须考虑$\leqslant\kappa$个符号的语言 $\mathscr{L}$,只须考虑 $\mathscr{L}$ 包含 Skolem-函数的情况,因为否则,我们可以如第8章§1那样定义 Skolem-语言 $\mathscr{L}^*$($\mathscr{L}^*$ 仍有基数$\leqslant\kappa$).(2)对 $\mathscr{L}^*$ 成立蕴涵对 $\mathscr{L}$ 成立.这个断定的证明留给读者做练习.□

11.3.10定理(López-Escobar,[1966]) 对每一无穷基数 κ,

$$\mathbf{m}_{\kappa}<\beth_{(2^{\kappa})^{+}}.$$

证明:令$\langle S_{\xi}:\xi<2^{\kappa}\rangle$是 $\mathscr{L}$ 的所有幂$\leqslant\kappa$的 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$-型集的一完全的列举(**注意**:至多存在$2^{\kappa}$个这样的 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$-型集,若不限制 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$-型集的基数,至多可能有$2^{2^{\kappa}}$个 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$-型集),令 α_{ξ} 是最小的基数 λ 使得若 S_{ξ} 被幂$\geqslant\lambda$的结构省略,则存在任意大幂且省略 S_{ξ} 的结构.

注意：　　　　$\mathbf{m}_\kappa \leqslant \sup\{\alpha_\xi : \xi < 2^\kappa\}$.

对每一 $\xi < 2^\kappa$，若 S_ξ 被幂 $\geqslant \beth_{(2^\kappa)^+}$ 的模型省略，则据11.3.7(2)，S_ξ 被任意大的模型省略，据 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$ 的向下-LS-定理的一平凡推论：

任给 $\mathscr{L}$ 的型 Σ 和省略 Σ 的 $\mathfrak{A}$，对每一 λ 使得 $\max\{|\mathscr{L}|, \aleph_0\} \leqslant \lambda \leqslant |A|$，存在幂为 λ 且省略 Σ 的结构. 对任意 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$-型集 S，同样的结论也成立.　　(11.23)

S_ξ 也被幂 $< \beth_{(2^\kappa)^+}$ 的模型省略，所以上述 $\alpha_\xi < \beth_{(2^\kappa)^+}$. 因为 $\mathrm{cf}(\beth_{(2^\kappa)^+}) = (2^\kappa)^+$ 且 $(2^\kappa)^+$ 是正则基数，所以 $\sup\{\alpha_\xi : \xi < 2^\kappa\} < \beth_{(2^\kappa)^+}$. 因此

$$\mathbf{m}_\kappa < \beth_{(2^\kappa)^+}. \square$$

说明：据11.3.1，11.3.6和11.3.10，对正则基数 $\kappa > \omega$，

$$\beth_{\kappa^+} < \mathbf{h}_\kappa < \beth_{(2^\kappa)^+}.$$

Barwise 和 Kunen 在其[1971]用布尔代数的方法证明上述界限在 ZFC 中不能得到改善.

11.3.11定理(Helling，[1964])　令 κ 是 beth-数使得 $\mathrm{cf}(\kappa) = \omega$，$\mathscr{L}$ 是幂 $\leqslant \kappa$ 的语言，S 是幂 $\leqslant \kappa$ 的 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$ 的型集，Σ 是 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$-句子集. 若对每一 $\zeta < \kappa^+$，存在 Σ 的、省略 S 且幂 $\geqslant \beth_\zeta$ 的模型，则存在 Σ 的、省略 S 的任意大幂的模型.

证明：如11.3.7(2)的证明那样，我们假设 $\mathscr{L}$ 包含 Skolem-函数. $\mathscr{L}$ 的项的枚举 $\langle t_\xi : \xi < \kappa\rangle$ 和 $\langle t_{n,\delta} : \delta < \kappa\rangle$ 和映射 f, h 如11.3.7前所述. 令 $S = \{\Gamma_\alpha : \alpha < \kappa\}$ 是 S 的一个枚举. 再对每一 Γ_α 进行枚举：$\Gamma_\alpha = \{\varphi^\alpha_\delta : \delta < \kappa\}$ 使得 Γ_α 的每一公式重复 κ 次.

定义 $\kappa \times \kappa$ 上的关系 R 如下：

$$\langle \alpha_1, \gamma_1\rangle R \langle \alpha_2, \gamma_2\rangle \Leftrightarrow \max\{\alpha_1, \gamma_1\} < \max\{\alpha_2, \gamma_2\} \text{或}[\max\{\alpha_1, \gamma_1\} = \max\{\alpha_2, \gamma_2\} \text{且}[\alpha_1 < \alpha_2 \text{或}(\alpha_1 = \alpha_2 \text{且} \gamma_1 < \gamma_2)]].$$

显然，R 有下列我们需要的性质：

(Ⅰ) R 以序型 κ 良序 $\kappa \times \kappa$，

(Ⅱ) 对每一 $\beta < \kappa$，$Y_\beta = \{\langle \alpha, \gamma\rangle : \max\{\alpha, \gamma\} \leqslant \beta\}$ 是 $\langle \kappa \times \kappa, R\rangle$ 的、有一最大元的初始节；事实上，

$Y_\beta=\{\langle\alpha,\gamma\rangle:\langle\alpha,\gamma\rangle=\langle\beta,\beta\rangle$ 或 $\langle\alpha,\gamma\rangle$ 是 $\langle\beta,\beta\rangle$ 的 R-前趋$\}$.

据对 κ 的假设,我们可以用 $\langle\kappa_n:n<\omega\rangle$ 来指称具有下列性质的严格递增的基数的序列:

(Ⅲ) 若 $\kappa=\omega$,则每一 κ_n 有穷且 $\kappa_{n+1}\geqslant 2^{\kappa_n}$,

(Ⅳ) 若 $\kappa>\omega$,则每一 κ_n 形如 $\beth_{\xi+1}$(因此仍有 $\kappa_{n+1}\geqslant 2^{\kappa_n}$),

(Ⅴ) $\operatorname*{Lim}_{n<\omega}\kappa_n=\kappa$.

下面的证明类似11.3.7(1)的证明,因此我们只指出与11.3.7(1)的证明不同之处.

(i) 存在映射 $g:\kappa\times\kappa\to\kappa$ 使得对每一线序集 $\langle X,<\rangle$,存在 $\mathfrak{B}\models\Sigma, B\supseteq X$,使得对所有 $\alpha,\gamma<\kappa$ 和所有 $x_1<\cdots<x_{h(\gamma)}\in X$:

$$\mathfrak{B}\models\neg\varphi^{\beta}_{g(\alpha,\gamma)}[t^{\mathfrak{B}}_\gamma[x_1,\cdots,x_{h(\gamma)}]].$$

(ii) 存在映射 $g:\kappa\times\kappa\to\kappa$ 使得对每一线序集 $\langle X,<\rangle$,(语言 $\mathscr{L}\cup\{\bar{x}:x\in X\}$ 的)下列句子集是一致的:

$$\Sigma\cup\{\neg\varphi^{\beta}_{g(\alpha,\gamma)}(t_\gamma(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_{h(\gamma)})):\alpha,\gamma<\kappa \text{ 且 } x_1<\cdots<x_{h(\gamma)}\in X\}. \tag{11.24}$$

就象11.3.7(1)的断定2和断定3那样,我们能证明(ii) ⇒ (i)且(i) ⇒ 11.3.11的结论.

(iii) 对每一 $n<\omega$,存在映射 $g_n:\kappa\times\kappa\to\kappa$,结构序列 $\langle\mathfrak{B}_\xi:\xi<\kappa^+\rangle$ 和线序集序列 $\langle\langle X_\zeta,<_\zeta\rangle:\zeta<\kappa^+\rangle$ 使得:

(1) 每一 $\mathfrak{B}_\xi$ 同于某个 $\mathfrak{A}_\eta$,

(2) $|X_\zeta|>\beth_\zeta$, 对每一 $\zeta<\kappa^+$,

(3) $X_\zeta\subseteq B_\zeta$, 对每一 $\zeta<\kappa^+$,

(4) 对每一 $m\leqslant n$, $\beta<\kappa$, $\zeta<\kappa^+$,和对每一序数对 α,γ 使得 $\max\{\alpha,\gamma\}\leqslant\beta$ 和 $x_1<_\zeta\cdots<_\zeta x_m\in X_\zeta$,

$$\mathfrak{B}_\zeta\models\neg\varphi^{\alpha}_{g_m(\alpha,\gamma)}[t^{\mathfrak{B}_\zeta}_{m,\gamma}[x_1,\cdots,x_m]].$$

(iii) ⇒ (ii)的证明如11.3.7的断定4和断定(5). 显然,

(11.24)一致 ⇔ 它的每一有穷子集一致.

所以令Γ是(11.24)的有穷子集，对下列n和β的特定值，Γ的一致性可直接从(iii)推出：

$$n=\max\{h(\gamma):t_\gamma\text{ 在 }\Gamma\text{ 中出现}\},$$

$$\beta=\max\{\alpha,f(\gamma):\varphi^\alpha\text{ 和 }t_\gamma\text{ 在 }\Gamma\text{ 中出现}\}.$$

如11.3.7(1)，我们定义$g:\kappa\times\kappa\to\kappa$如下：

$$g(\alpha,\gamma)=g_{h(\gamma)}(\alpha,f(\gamma)).$$

函数值$g_n(\alpha,\gamma)$通过施归纳于n得到定义.这个归纳过程的每一步涉及对在(iii)中出现的参数β进行二次超穷归纳(*嵌套归纳*).我们通过如下修正11.3.8来进行：

11.3.12定义 令$n<\omega,\beta<\kappa,\xi<\kappa^+$, $\mathsf{d}:Y_\beta\to\kappa$.假设对所有$m<n$，映射$g_m$已经得到定义且有上述(iii)的性质(4)，序对$\langle\mathsf{d},\zeta\rangle$称为**$\langle n,\beta\rangle$-良对**$\Leftrightarrow$存在线序$\langle X,<\rangle$和结构$\mathfrak{B}$使得：

11.3.8的(1)—(3)成立，且

(4) 对每一序数对α,γ使$\max\{\alpha,\gamma\}\leqslant\beta$，对每一$x_1<\cdots<x_n\in X$，

$$\mathfrak{B}\models\neg\varphi^\alpha_{\mathsf{d}(\alpha,\gamma)}[t^{\mathfrak{B}}_{n,\gamma}[x_1,\cdots,x_n]].$$

(5) $\mathsf{d}:\langle Y_\beta,R\rangle\to\langle\kappa,\in\rangle$是严格递增的：对所有$\langle\alpha,\gamma\rangle,\langle\alpha',\gamma'\rangle\in Y_\beta$，

$$\langle\alpha,\gamma\rangle R\langle\alpha',\gamma'\rangle\Rightarrow\mathsf{d}(\alpha,\gamma)<\mathsf{d}(\alpha',\gamma').$$

事实上，当$\kappa>\omega$时κ是奇异基数，所以引入条件(5)是为了限制在证明中出现的某些函数集的基数.类似11.3.9我们有：

11.3.13引理 对每一$n<\omega$和$\beta<\kappa$，存在映射$\mathsf{d}:Y_\beta\to\kappa$使得对每一$\zeta<\kappa^+$，序对$\langle\mathsf{d},\zeta\rangle$是$\langle n,\beta\rangle$-良对.

为了从11.3.13推出(iii)，我们只须构造映射$g_n:\kappa\times\kappa\to\kappa$使得序对$\langle g_n\restriction Y_\beta,\xi\rangle$对每一$\beta<\kappa$和$\zeta<\kappa^+$是$\langle n,\beta\rangle$-良对.该构造如下：据11.3.13，对每一$s<\omega$，选择函数$\mathsf{d}_s:Y_{\kappa_s}\to\kappa$使得对每一$\zeta<\kappa^+$，序对$\langle\mathsf{d}_s,\zeta\rangle$是$\langle n,\kappa_s\rangle$-良对.令$\delta_s=\mathsf{d}_s(\kappa_s,\kappa_s)$，则$\delta_s$是$\mathrm{Ran}(\mathsf{d}_s)$的$R$-最大元.令

$$g_0(\alpha,\gamma)=\mathsf{d}_0(\alpha,\gamma),\quad\text{对}\langle\alpha,\gamma\rangle\in Y_{\kappa_0},$$

$$g_n(\alpha,\gamma)=\sum_{j=1}^{s-1}s_j+d_s(\alpha,\gamma),\quad 对\langle\alpha,\gamma\rangle\in Y_{\kappa_s}-Y_{\kappa_{s-1}},\ s>0.$$

易证这样构造的映射 $g_n:\kappa\times\kappa\to\kappa$ 存在且对每一 $\beta<\kappa$ 和 $\zeta<\kappa^+$，序对 $\langle g_n\restriction Y_\beta,\xi\rangle$ 是 $\langle n,\beta\rangle$-良对.

11.3.13的证明：施归纳于 n. 在下面的整个证明中固定 β. 命题(Ⅰ$_n$)—命题(Ⅲ$_n$)类似11.3.9证明中的命题(Ⅰ$_n$)—命题(Ⅲ$_n$).

断定1　命题(Ⅰ$_n$) ⇒ 命题(Ⅱ$_n$).

断定1的证明：令 $\mathrm{I}(Y_\beta,\kappa)$ 指称所有从 $\langle Y_\beta,R\rangle$ 到 $\langle\kappa,\in\rangle$ 中的严格递增映射的集合. 我们首先要证明 $|\mathrm{I}(Y_\beta,\kappa)|\leqslant\kappa$.

因为序对 $\langle\beta,\beta\rangle$ 是 Y_β 的 R-最大元，所以对任意 $f\in\mathrm{I}(Y_\beta,\kappa)$，$\mathrm{Ran}(f)$ 有 $\in$-最大元 $f(\beta,\beta)$. 因为 $\langle\kappa_n:n<\omega\rangle$ 收敛于 κ，所以存在 $m<\omega$ 使得 $\mathrm{Ran}(f)\subseteq\kappa_m$，因此 $\mathrm{I}(Y_\beta,\kappa)\subseteq\bigcup_{m<\omega}(\kappa_m)^{Y_\beta}$. 显然，$|Y_\beta|\leqslant|\beta\times\beta|<\kappa$，所以对某个 $m_0<\omega$，$|Y_\beta|\leqslant\kappa_{m_0}$，从而

$$|\mathrm{I}(Y_\beta,\kappa)|\leqslant\sum_{m<\omega}(\kappa_m)^{|Y_\beta|}\leqslant\sum_{m\leqslant m_0}(\kappa_m)^{\kappa_{m_0}}+\sum_{m>m_0}(\kappa_m)^{\kappa_{m_0}}.$$

但 $(\kappa_m)^{\kappa_{m_0}}\leqslant(2^{\kappa_m})^{\kappa_{m_0}}=2^{\max\{\kappa_m,\kappa_{m_0}\}}\leqslant\kappa_{\max\{m,m_0\}+1}$. 最后一个不等式成立是根据我们关于基数 κ_n 的假设(参见前面的(Ⅰ)和(Ⅳ))，所以

$$|\mathrm{I}(Y_\beta,\kappa)|\leqslant(m_0+1)\cdot\kappa_{m_0+1}+\sum_{m>m_0}\kappa_{m+1}=\kappa.$$

对每一 $\mathrm{d}\in\mathrm{I}(Y_\beta,\kappa)$，令 $Z_{\mathrm{d}}=\{\zeta<\kappa^+:\langle\mathrm{d},\zeta\rangle$ 是 $\langle n,\beta\rangle$-良对$\}$. 因此命题(Ⅰ$_n$)断定：$\kappa^+=\bigcup_{\mathrm{d}\in\mathrm{I}(Y_\beta,\kappa)}Z_{\mathrm{d}}$. 因为 $|\mathrm{I}(Y_\beta,\kappa)|\leqslant\kappa$，所以据 κ^+ 的正则性，存在 $\mathrm{d}_0\in\mathrm{I}(Y_\beta,\kappa)$ 使得 $|Z_{\mathrm{d}_0}|=\kappa^+$，因此 Z_{d_0} 与 κ^+ 共尾.

命题(Ⅱ$_n$) ⇒ 命题(Ⅲ$_n$)的证明如11.3.9证明中的相应部分.

最后我们来证明命题(Ⅰ$_n$)：施归纳于 n，用命题(Ⅲ$_n$)作为证明命题(Ⅰ$_{n+1}$)的归纳假设.

情况一　$n=0$：施超穷归纳于 Y_β 的良序 R 来定义 d.

任给 $\zeta_0<\kappa^+$，令 $\mathfrak{B}$，X 和 $<$ 如11.3.9证明的最后部分所规定. 因为 $\mathfrak{B}$ 省略 $\boldsymbol{S}=\{\Sigma_\alpha:\alpha<\kappa\}$，因此对每一 $\gamma<\kappa$，存在 δ 使得：

$$\mathfrak{B}\models\neg\varphi_\delta^\varepsilon[t_{0,\gamma}^{\mathfrak{B}}].\tag{11.25}$$

因为每一 $\varphi\in\Sigma_\alpha$ 重复出现 κ 次，所以可以选择上述 δ 使得 δ 大于任何序数 $\rho<\kappa$. 令

$$\mathrm{d}(\alpha,\gamma)=\text{最小的 }\delta\begin{bmatrix}\text{使 }\delta>\sup\{\mathrm{d}(\alpha',\gamma'):\langle\alpha',\gamma'\rangle R\langle\alpha,\gamma\rangle\}\\ \text{且(11.25)成立,}\end{bmatrix}$$

则11.3.12的条件(4)和(5)被满足，所以 d 是 $\langle 0,\beta\rangle$-良对.

情况二　归纳部分：固定 $\zeta_0<\kappa^+$，令 $\xi_1=\max\{\zeta_0,\kappa\}+n$，据归纳假设，存在线序集 $\langle Y,<\rangle$ 和结构 $\mathfrak{B}$ 使得11.3.8(1)，(3)和下列(2)′，(4)′成立：

(2)′　$|Y|>\beth_{\xi_1}=\beth_n(\beth_{\max\{\xi_0,\kappa\}})$，

(4)′　对每一 $m\leqslant n$，$y_1<\cdots<y_m\in Y$ 和 $\alpha,\gamma<\kappa$：

$$\mathfrak{B}\models\neg\varphi^{\alpha}_{g_m(\alpha,\gamma)}[t^{\mathfrak{B}}_{m,\gamma}[y_1,\cdots,y_m]].$$

对每一三元组 $\langle\delta,\alpha,\gamma\rangle$ 使得 $\delta<\kappa$ 且 $\langle\alpha,\gamma\rangle\in Y_\beta$，定义 $C^{\delta}_{\alpha,\gamma}$ 如下：

$$\{y_1,\cdots,y_{n+1}\}_<\in C^{\delta}_{\alpha,\gamma}\Leftrightarrow\mathfrak{B}\models\neg\varphi^{\alpha}_{\delta}[t^{\mathfrak{B}}_{n+1,\gamma}[y_1,\cdots,y_{n+1}]],$$

其中 $\{y_1,\cdots,y_{n+1}\}_<$ 表示其中的元素满足 $y_1<\cdots<y_{n+1}$. 令 $\{y_1,\cdots,y_{n+1}\}_<\in[Y]^{n+1}$ 且 $\langle\alpha,\gamma\rangle\in Y_\beta$. 因为 $\mathfrak{B}$ 省略 Σ_α，所以存在 δ 使得 $\{y_1,\cdots,y_{n+1}\}_<\in C^{\delta}_{\alpha,\gamma}$；显然，我们还能任意大地选择这样的 $\delta<\kappa$，因此施归纳于 R，我们能定义严格递增函数 $f:\langle Y_\beta,R\rangle\to\langle\kappa,\in\rangle$（即 $f\in\mathrm{I}(Y_\beta,\kappa)$）使得对每一对 α,γ，$\{y_1,\cdots,y_{n+1}\}_<\in C^{f(\alpha,\gamma)}_{\alpha,\gamma}$. 这样，我们证明了

$$[Y]^{n+1}=\bigcup_{f\in\mathrm{I}(Y_\beta,\kappa)}\Big(\bigcap_{\langle\alpha,\gamma\rangle\in Y_\beta}C^{f(\alpha,\gamma)}_{\alpha,\gamma}\Big).$$

因为 $|\mathrm{I}(Y_\beta,\kappa)|\leqslant\kappa\leqslant\beth_{\max\{\xi_0,\kappa\}}$，所以据 Erdös-Rado-定理，存在 $X\subseteq Y$（使得 $|X|>\beth_{\max\{\xi_0,\kappa\}}\geqslant\beth_{\xi_0}$）和 $\mathrm{d}\in\mathrm{I}(Y_\beta,\kappa)$ 使得

$$[X]^{n+1}\subseteq\bigcap_{\langle\alpha,\gamma\rangle\in Y_\beta}C^{\mathrm{d}(\alpha,\gamma)}_{\alpha,\gamma}.$$

显然，$\mathfrak{B}$ 和 $\langle X,<\upharpoonright X\rangle$ 能使序对 $\langle\mathrm{d},\zeta_0\rangle$ 成为 $\langle n+1,\beta\rangle$-良对.

至此完成对11.3.13的证明，从而完成对11.3.11的证明. □

11.3.14推论(GCH，Helling，[1964])　对每一无穷基数 κ，

$$\mathrm{cf}(\kappa)=\omega \Rightarrow \mathbf{m}_\kappa=\mathbf{h}_\kappa=\beth_{\kappa^+}.$$

证明：据 GCH，κ 是 beth-数. 据11.3.11，$\mathbf{m}_\kappa \leqslant \beth_{\kappa^+}$；据11.3.3，

$$\mathbf{m}_\kappa \geqslant \beth_{\kappa^+}. \square$$

11.3.15 推论（Morley-López-Escobar-Helling）

$$\mathbf{m}_\omega=\mathbf{h}_\omega=\beth_{\omega_1} \quad (\mathrm{h}(\mathscr{L}_{\omega_1\omega})=\beth_{\omega_1}).$$

证明：因为 ω 是共尾度为 ω 的 beth-数，因此据11.3.11，$\mathbf{m}_\omega \leqslant \beth_{\omega_1}$，据11.3.3，$\mathbf{m}_\omega \geqslant \beth_{\omega_1}$. $\square$

说明：（Ⅰ）Morley 在其[1965]证明了11.3.11的弱形式，即 $\kappa=\omega$ 且只考虑一个型而不是一个由诸型构成的可数集. $\mathbf{m}_\omega=\beth_{\omega_1}$ 的证明是由 Morley 和 Chang 完成的. 但在这以前，许多人都注意到 $\mathbf{m}_\omega=\mathbf{h}_\omega$，其中包括 Chang，Helling 和 López-Escobar（参见 Morley 的[1965]，p. 273）.

（Ⅱ）运用极大型来证明11.3.7(1)的思路是 Chang 在其[1968a]提出的（参见 Chang 的[1968a]，p. 50）.

（Ⅲ）11.3.11是 Helling 在其[1964]宣布的，但其证明从未公布. 因为在11.3.14中只需 **LCH**（极限基数假设），因此用强极限基数来代替带有极限指标的 beth-数就可以重述11.3.11.

（Ⅳ）Malitz 在其[1968]（用 **GCH**），J. E. Baumgartner 在其[1974]（不用 **GCH**）如下改善了11.3.15：

$\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的所有*完全句*的集合的 Hanf 数是$\beth_{\omega_1}$

（我们称 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$-句子 σ 是**完全句** $\Leftrightarrow$ 若 $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ 是 σ 的两个模型，则 $\mathfrak{A} \equiv_{\omega_1\omega} \mathfrak{B}$.）而 J. F. Knight 在其[1977]提出一个反例：

存在一 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$-完全句使之有幂为$\aleph_1$的模型但没有更大幂的模型.

练 习

11.3.16 令 $\mathscr{L}$ 是$\leqslant\kappa$个符号的语言，证明11.3.7(2)对 Skolem-语言 $\mathscr{L}^*$ 成立蕴涵它对 $\mathscr{L}$ 也成立.

[提示：若 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathscr{L}$ 的结构且省略 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$-型集 S，则如第8章 §1 所定义的 Skolem-结构 $\mathfrak{A}^*$ 也省略 S.]

第12章 良序的可定义性问题

我们知道所有(非空)良序的类 $\mathscr{W}$(在同构意义上)不能用 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$的句子来刻画，也知道 $\mathscr{W}$ 能用 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega_1}$的一个句子来刻画(见1.2.3),因此在本章,我们主要从以下三个方面来讨论良序的可定义性问题.

(1) 在§1—§2,讨论在有穷量词语言 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$中,良序概念是不可定义的.

在§1,我们证明良序概念不能用 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$-句子刻画,即使当 $\mathfrak{M}\subseteq\mathbf{HC}$ 时,在 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的具有许多良好性质的片段 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 中,依然不能刻画良序概念.在这一节,我们主要用一致性质和模型存在定理来工作.

在§2,我们证明良序概念也不能用 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$-句子来刻画.

(2) 在§3,我们进一步研究,若 $\mathscr{L}=\{<\}$,则在 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$中,我们对良序概念究竟能表达多少.这里的主要结果是 López-Escobar 在其[1968]得到的.他用一种消去量词的方法,确定一类他称为范式句的句子,然后证明就良序而言,其它任一句子等价诸范式句一个析取.

(3) 在§4的第1—2小节,我们在 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$的可容片段 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 中研究可定义良序.此节的主要结果来自 Barwise 的[1975].对可数可容片段,我们证明的工具主要是 Barwise-紧致性定理;对不可数可容片段,我们证明的工具主要是弱完全性定理和 Skolem-函数理论.在第3小节,我们把可定义良序概念概括到一般的无穷语言并把它相对化,由此也得到一些初步的结果.

§1 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$中良序的不可定义性

本节要证明良序概念不能用$\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$-句子来刻画. 即使当$\mathfrak{M}\subseteq$ HC时,在具有良好性质的$\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$-片段中,依然不能刻画良序概念.

12.1.1定理 (1)(Morley,[1965]; López-Escobar,[1966])

令Σ是$\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的可数句子集,$U$,$<$分别是$\mathscr{L}$的一元和二元关系符号,假设对所有$\alpha<\omega_1$,$\Sigma$有模型$\mathfrak{A}=\langle A,U,<,\cdots\rangle$使得$<$线序$U$且$\langle\alpha,<\rangle\subseteq\langle U,<\rangle$,则$\Sigma$有模型$\mathfrak{B}=\langle B,V,<,\cdots\rangle$使得$<$线序$B$且$\langle V,<\rangle$不被良序(即$\langle V,<\rangle$包含有理数集的一个摹本).

(2)(Morley,[1967];Barwise,[1969b]) 令$\mathfrak{M}\subseteq$ HC是可数可容集,Σ是$\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$的句子集使得$\Sigma$是$\mathfrak{M}$上的$\dot{\Sigma}$(注意区别斜体$\Sigma$和正体$\dot{\Sigma}$的含义,下同),假设对所有$\alpha\in\mathbf{ON}\cap\mathfrak{M}$,$\Sigma$有模型$\mathfrak{A}=\langle A,U,<,\cdots\rangle$使得$<$线序$U$且$\langle\alpha,<\rangle\subseteq\langle U,<\rangle$,则$\Sigma$有模型$\mathfrak{B}=\langle B,V,<,\cdots\rangle$使得$<$线序$B$且$\langle V,<\rangle$不被良序.

证明:显然,(2) ⇒ (1),但我们先证(1),因为它容易些.

证(1):令$D=\{d_r: r$是有理数且d_r是个体常元$\}$,$\mathscr{L}'=\mathscr{L}\cup D$,$\mathscr{L}''=\mathscr{L}'\cup C$,其中$C$是可数新个体常元集,令$\mathscr{L}''_{\mathfrak{M}}$是$\mathscr{L}''_{\omega_1\omega}$的可数片段使得$\Sigma\subseteq\mathscr{L}''_{\mathfrak{M}}$,$\mathscr{M}$是$\mathscr{L}$的所有结构$\langle A,U,<,\cdots\rangle$的类使得集合$\mathbf{ON}\cap U=U_1$是可数序数且$<$是$U_1$上通常的线序,令$\mathbf{S}$是所有集合

$$s=s_0\cup\Sigma\mathring{\cup}\{d_q<d_r: q<r\text{ 且 }q,r\text{ 是有理数}\}$$

的集合使得s_0是$\mathscr{L}''_{\mathfrak{M}}$的有穷句子集,只有有穷多个$c\in C$和$d\in D$在$s_0$中出现(例如$s_0$可写为$s_0=s_0(\vec{c}_m,\vec{d}_{r_n})$,其中$\vec{d}_{r_n}$表示$d_{r_1},\cdots d_{r_n}$,且$r_1<\cdots<r_n$)且对所有$\alpha<\omega_1$,存在模型$\mathfrak{A}\in\mathscr{M}$和元素$\vec{b}_n\in U_1$使得$\mathfrak{A}\models\Sigma$,且

$$(\mathfrak{A},\vec{b}_n)\models\exists\vec{x}_m\bigwedge s_0(\vec{x}_m,\vec{d}_{r_n}),$$

其中 $\qquad a\leqslant b_1,\ b_1+a\leqslant b_2,\cdots,\ b_{n-1}+a\leqslant b_n.$

下证 $\mathbf{S}$ 是(ω_1,ω)一致性质(参见4.1.2).在此我们只验证条件(C4)和(C7)(3),因为其它条件显然都成立.

(C4) 令 $\bigvee\Theta\in s\in\mathbf{S}$,则据 $\mathbf{S}$ 的定义,对每一 $\alpha<\omega_1$,存在 $\theta_\alpha\in\Theta$ 使得

$$(\mathfrak{A},\vec{b}_n)\models\exists\vec{x}_m\bigwedge s_0\wedge\theta_\alpha(\vec{x}_m,\vec{d}_{r_n}).$$

因为 Θ 是可数的,故存在 $\theta\in\Theta$ 使得对任意大的 $\alpha<\omega_1,\theta=\theta_\alpha$,因此

$$s\cup\{\theta_\alpha\}\in\mathbf{S}.$$

(C7)(3) 若 $d_r\in D$,则对所有 $s\in\mathbf{S}$,存在 $c\in C$ 使得

$$s\cup\{d_r\equiv c\}\in\mathbf{S}.$$

令 $c\in C$ 不在 s_0中出现,且令 $r_1<\cdots<r_p<r<r_{p+1}<\cdots<r_n$. 为了证明 $s\cup\{d_r\equiv c\}$,我们只须注意:若 $\beta\geqslant\alpha+\alpha,\beta\leqslant b_1,b_1+\beta\leqslant b_2,\cdots,b_{n-1}+\beta\leqslant b_n$,则令 $b=b_p+\alpha$,于是,我们有

$$\alpha\leqslant b_1,\cdots,\ b_p+\alpha\leqslant b,\ b\leqslant b+\alpha,\cdots,\ b_{n-1}+\alpha\leqslant b_n.$$

由此和题设,我们有

$$\Sigma\cup\{d_q<d_r:q<r\}\in\mathbf{S}.$$

据模型存在定理(4.1.5),$\Sigma\cup\{d_q<d_r:q<r\}$有模型.因此 Σ 也有模型 $\mathfrak{B}$ 使得$\langle V,<\rangle$包含有理数集的一个摹本.

证(2):下面的证明是上述证明的精致形式.恰如(1)定义 $\mathbf{S}$ 除了用 $\alpha\in\mathbf{ON}\cap\mathfrak{M}$ 置换 $\alpha<\omega_1$.

下证 $\mathbf{S}$ 是(ω_1,ω)-一致性质.有新的困难的只是(C4)的验证:令 $s\in\mathbf{S},s_0=s_0(\vec{c}_m,\vec{d}_{r_n})$.我们对 $\mathscr{L}'$ 增加下列新个体常元来构造新语言 $\mathscr{L}^{\#}$:$\{e_{p\beta}:p<\omega,\beta\in\mathbf{ON}\cap\mathfrak{M}\}$.对每一序数 $\alpha\in\mathbf{ON}\cap\mathfrak{M}$,令 $\Gamma_{s,\alpha}$是 $\mathscr{L}^{\#}$的下列句子集:

U 由$\leqslant$线序,

$U(d_{r_p})$, $\quad$ 对 $p\leqslant n$,

$U(e_{p\beta})$, $\quad$ 对 $p<n,\beta<\alpha$,

$e_{p\beta}<e_{q\gamma}$, $\quad$ 对 $p,q<n,\beta,\gamma<\alpha$ 使得 $p<q$ 或$(p=q$ 且 $\beta<\gamma)$,

$e_{p\beta}<d_{r_n}$，对 $p<n$ 且 $\beta<\alpha$，

$e_{p0}<d_{r_n}$，对 $p<n$.

显然，若 $\alpha<\beta$，则 $\Gamma_{s,\alpha}\subseteq\Gamma_{s,\beta}$. 令 $\mathscr{M}_{s,\alpha}$ 是所有结构 $(\mathfrak{A},\vec{b}_n)$ 的类使得 $\mathfrak{A}\in\mathscr{M}$，$\vec{b}_n\in U_1$，且 $\alpha\leqslant b_1, b_1+\alpha\leqslant b_2,\cdots,b_{n-1}+\alpha\leqslant b_n$. 考虑 $\mathscr{L}''_{\mathfrak{M}}$ 的任意句子 $\theta(\vec{c}_m,\vec{d}_{r_n})$. 据 **S** 的定义，

$$s\cup\{\theta\}\in\mathbf{S}\Leftrightarrow \text{对所有 } \alpha\in\mathbf{ON}\cap\mathfrak{M}\text{，存在}(\mathfrak{A},\vec{b}_n)\in\mathscr{M}_{s,\alpha}\text{使}$$

$$\mathfrak{A}\models\Sigma,\quad (\mathfrak{A},\vec{b}_n)\models\exists\vec{x}_m\wedge s_0\wedge\theta(\vec{x}_m,\vec{d}_{r_n}).$$

我们还注意到，模型 $(\mathfrak{B},b_1',\cdots,b_n')$ 同构于 $\mathscr{M}_{s,\alpha}$ 中另一模型 $\Leftrightarrow$ 它能膨胀为 $\Gamma_{s,\alpha}$ 的模型.（常元 $e_{0\beta}$，$e_{p\beta}$ 分别对应序数 β 和 $b_p+\beta$.）因此

$$s\cup\{\theta\}\notin\mathbf{S}\Leftrightarrow \text{存在 } \alpha\in\mathbf{ON}\cap\mathfrak{M} \text{ 使 } \Sigma\cup\Gamma_{s,\alpha}\models\neg(\wedge s_0\wedge\theta). \tag{12.1}$$

令 $Q(\alpha,\theta)$ 表示

"α 是序数，$\theta(\vec{c}_m,\vec{d}_{r_n})$ 是 $\mathscr{L}''_{\mathfrak{M}}$-句子且(12.1)成立"，

据可数可容片段的 Barwise-完全性定理和 Barwise-紧致性定理(4.3.11和4.3.12)，关系 $Q(\alpha,\theta)$ 是 $\mathfrak{M}$ 上的 Σ，且

$$\alpha<\beta \text{ 且 } Q(\alpha,\theta)\Rightarrow Q(\beta,\theta).$$

下证(C4)对 s 成立. 假设 $\vee\Theta\in s$，则 $\vee\Theta\in s_0\cup\Sigma$，因此 $\vee\Theta$ 至多含个体常元符号 $\vec{c}_m,\vec{d}_{r_n}$，所以对所有 $\beta\in\mathbf{ON}\cap\mathfrak{M}$，

$$\Sigma\cup\Gamma_{s,\alpha}\not\models\neg(\wedge s_0\wedge\vee\Theta). \tag{12.2}$$

假设对所有 $\theta\in\Theta$，$s\cup\{\theta\}\notin\mathbf{S}$，则

$$\langle\mathfrak{M},\in\rangle\models(\forall\theta\in\Theta)\exists\alpha Q(\alpha,\theta),$$

据 Σ-自返原则，存在传递集 $a\in\mathfrak{M}$ 使得 $\Theta\in a$ 且

$$\langle a,\in\rangle\models(\forall\theta\in\Theta)\exists\alpha Q(\alpha,\theta).$$

令 $\beta=\mathbf{ON}\cap a$，则

$$\langle\mathfrak{M},\in\rangle\models(\forall\theta\in\Theta)\exists\alpha<\beta Q(\alpha,\theta),$$

因此 $$\langle\mathfrak{M},\in\rangle\models(\forall\theta\in\Theta)Q(\beta,\theta).$$

这意味对所有 $\theta\in\Theta$，$\Sigma\cup\Gamma_{s,\alpha}\models\neg(\wedge s_0\wedge\theta)$，所以

$$\Sigma\cup\Gamma_{s,\alpha}\models\neg(\bigwedge s_0\wedge\bigvee\Theta).$$

而这与(12.2)矛盾，因此对某个 $\theta\in\Theta$，$s\cup\{\theta\}\in\mathbf{S}$. 这就证明了(C4)对 s 成立.

至此证明了 $\mathbf{S}$ 是 (ω_1,ω)-一致性质. 因为 $\Sigma\cup\{d_q<d_r;q<r\}\in\mathbf{S}$，所以据模型存在定理，$\Sigma$ 有模型 $\mathfrak{B}$ 使得 $\langle V,<\rangle$ 包含有理数集的一个摹本. □

说明：12.1.1的上述证明是 Keisler 在其[1971]中做出的，它与原来该定理的证明有所不同.

12.1.2推论(López-Escobar，[1966]) 令 σ 是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$-句子使得 σ 的每一模型形如 $\mathfrak{A}=\langle A,<,\cdots\rangle$，其中 $<$ 良序 A. 则存在 $\alpha<\omega_1$ 使得 σ 的每一模型有 $<\alpha$ 的序型(这说明良序概念不能用 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$-句子来表达). □

12.1.3推论 令 Σ 是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 的可数句子集，假设 Σ 有可数模型 $\mathfrak{A}=\langle A,U,<,\cdots\rangle$ 使得 $<$ 线序 U 且 U 不可数，则 Σ 有模型 $\mathfrak{B}=\langle B,V,<,\cdots\rangle$ 使得 $\langle V,<\rangle$ 包含有理数集的一个摹本.

证明：因为任何不可数线序包含 $\langle\omega_1,<\rangle$ 的一个摹本，或者包含 $\langle\omega_1^*,<\rangle$ 的一个摹本，或者包含有理数集的一个摹本. □

12.1.4推论(Makkai，[1969c]) 令 $\mathfrak{A}=\langle A,<,\cdots\rangle$ 是可数线序模型且不包含有理数集的摹本，则存在 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$-句子 σ 使得对所有模型 $\mathfrak{B}$，

$$\mathfrak{B}\models\sigma\Leftrightarrow\mathfrak{B}\cong\mathfrak{A}.$$

证明：据 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 的 Scott-同构定理(1.2.20)，存在 σ 使得对所有可数结构 $\mathfrak{B}$，$\mathfrak{B}\models\sigma\Leftrightarrow\mathfrak{B}\cong\mathfrak{A}$. 若 σ 有不可数模型，则据12.1.3，σ 有可数模型 $\mathfrak{B}$ 使得 $\mathfrak{B}$ 包含有理数集的一摹本，因此 $\mathfrak{B}\not\cong\mathfrak{A}$，所以 σ 没有不可数模型. □

12.1.5推论(Friedman) 令 $\mathfrak{M}\subseteq\mathrm{HC}$ 是可数可容集，Γ 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的句子集使得 Γ 是 $\mathfrak{M}$ 上的 Σ，假设对所有 $\alpha\in\mathrm{ON}\cap\mathfrak{M}$，$\Gamma$ 有递增模型链 $\{\mathfrak{A}_\beta^\alpha;\beta<\alpha\}$，则 Γ 有序型为有理数集序型的模型链.

证明：对每一 $\alpha<\omega_1$，令

$$\mathfrak{A}^{\alpha}=(\bigcup_{\beta<\alpha}\mathfrak{A}_{\beta}^{\alpha},\alpha,<,R),$$

其中 $R(\beta,x)$成立 $\Leftrightarrow x\in A_{\beta}^{\alpha}$. 令 Γ^{*} 是下列句子集：

Γ 对集合$\{x:R(u,x)\}$的相对化， 对所有 $u\in U$，

$<$线序 U，

$\forall x(\forall uv\in U)[u<v\wedge R(u,x)\to R(v,x)]$，

$(\forall uv\in U)[u<v\to\exists x(R(v,x)\wedge\neg R(u,x))]$，

$\forall x(\exists u\in U)R(u,x)$.

据12.1.1，Γ^{*} 有模型 $\mathfrak{B}^{*}=(\bigcup_{v\in V}\mathfrak{B}_{v},V,<,S)$，其中 V 包含有理数集的一个摹本. 易证$\{\mathfrak{B}_{v}:v\in V\}$就是满足本推论的模型链. □

§2 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$中良序的不可定义性

运用第11章的结果，特别是§3给出的 Hanf-数的上界，我们在本节证明，对任何无穷语言 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$，良序不能用 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$的一个量词句来定义. 当然，超出这个范围，良序还是可以刻画的. 例如，我们在1.2.3，1.2.4和本章§3看到的那样.

12.2.1定理(Green，[1975]) 假设 κ 和$2^{>\kappa}$是正则基数($\kappa\neq\omega_1$)，即 κ 是强不可达或是后继基数. 令 σ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$-句子，$U$ 和$<$是 $\mathscr{L}$ 的一元和二元关系符号，且对所有 $\alpha<2^{>\kappa}$，σ 有模型 $\mathfrak{A}=\langle A,U,<,\cdots\rangle$使得$<$是$U$ 的传递线序且$\langle\alpha,<\rangle\subseteq\langle U,<\rangle$，则 σ 有模型 $\mathfrak{B}=\langle B,V,<,\cdots\rangle$使得$<$线序 B 且$\langle V,<\rangle$不被良序.

证明：令 $D=\{d_r:r\in\mathbf{Q}$ 且 d_r 是个体常元$\}$，其中 $\mathbf{Q}$ 是有理数集，令 $\mathscr{M}$ 是 $\mathscr{L}$ 的结构类使得若 $\mathfrak{A}=\langle A,U,<,\cdots\rangle\in\mathscr{M}$，则 $U^{1}=\{\alpha:\alpha\in U$ 是序数$\}$是小于$2^{>\kappa}$的序数且$<$线序 U.

令 $\mathbf{S}$ 是所有集合

$$s=s_0\cup\{d_q<d_r:q<r \text{ 且 } q,r\in\mathbf{Q}\}\cup\{U(d_q):q\in\mathbf{Q}\}$$

的集合使得 s_0是 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}''=\mathscr{L}\cup C\cup D$ 的、基数小于 κ 的句子集，只有

有穷多个 $d\in D$ 在 s_0 中出现且若 $\vec{d}_{r_n}$ 是 s_0 中 D 的所有元素使得 $r_1<\cdots<r_n$，则对所有 $\alpha<2^{>\kappa}$，存在 $\mathfrak{A}\in\mathscr{M}$，$\vec{b}_n\in U^1$ 和 $f\in A^C$ 使得

$$(\mathfrak{A},\vec{b}_n)\models\bigwedge s_0[f],\quad \langle\alpha,<\rangle\subseteq\langle U^1,<\rangle,\quad \mathfrak{A}\models\sigma,\text{且}$$
$$\alpha\leqslant b_1,\ b_1+\alpha\leqslant b_2,\cdots,\ b_{n-1}+\alpha\leqslant b_n.$$

下证 $\mathbf{S}$ 是 $(\kappa,\omega)_\omega$ 一致性质(参见4.2.6). 在此我们只验证条件(C1),(C4)和(C7)(2)—(3),因为其它条件显然成立.

任给 $s=s_0\cup\{d_q<d_r:q<r,q,r\in\mathbf{Q}\}\cup\{U(d_q):q\in\mathbf{Q}\}\in\mathbf{S}$.

(C1) 设 $\{\sigma,\neg\sigma\}\subseteq s$. 因为 $s\in\mathbf{S}\Rightarrow s_0$ 有模型，则 $\{\sigma,\neg\sigma\}\not\subseteq s$. 因此对某些 $r_1<r_2$，$\sigma=d_{r_1}<d_{r_2}$，或对某个 $q\in\mathbf{Q}$，$\sigma=U(d_q)$. 在第一种情况下，$\neg(d_{r_1}<d_{r_2})\in s_0$ 且能找到 $\mathfrak{A}$，b_1，b_2 使 $b_1<b_2$ 且 $(\mathfrak{A},b_1,b_2)\models\neg(d_{r_1}<d_{r_2})$. 在第二种情况下，$\neg U(d_q)\in s_0$ 且能找到 $\mathfrak{A}$，b 使 $b\in U^1$ 且 $(\mathfrak{A},b)\models\neg U(d_q)$. 但这两种情况都产生矛盾.

(C4) 令 $\{\bigvee\Phi_i:i\in I\}\subseteq s_0$，则据 $\mathbf{S}$ 的定义，对每一 $\alpha<2^{>\kappa}$，存在 $\mathfrak{A}_\alpha\in\mathscr{M}$ 和 $b_{1,\alpha},\cdots,b_{n,\alpha}\in U^1$ 和 f_α 使得

$$(\mathfrak{A}_\alpha,\vec{b}_{n,\alpha})\models\bigwedge s_0[f_\alpha],\quad \langle\alpha,<\rangle\subseteq\langle U^1_\alpha,<\rangle,\quad \mathfrak{A}_\alpha\models\sigma,\text{且}$$
$$\alpha\leqslant b_{1,\alpha},\ b_{1,\alpha}+\alpha\leqslant b_{2,\alpha},\cdots,\ b_{n-1,\alpha}+\alpha\leqslant b_{n,\alpha}.$$

因为分配律规则保持有效性，所以对所有 $\alpha<2^{>\kappa}$，存在 $g_\alpha\in\prod_{i\in I}\Phi_i$ 使得，

$$(\mathfrak{A}_\alpha,\vec{b}_{n,\alpha})\models\bigwedge s_0\wedge\bigwedge\{g(i):i\in I\}[f_\alpha].$$

因为 $\left|\prod_{i\in I}\Phi_i\right|<2^{>\kappa}$ 且 $2^{>\kappa}$ 是正则的，所以存在 $g\in\prod_{i\in I}\Phi_i$ 使得对任意大 $\alpha<2^{>\kappa}$，

$$(\mathfrak{A}_\alpha,\vec{b}_{n,\alpha})\models\bigwedge s_0\wedge\bigwedge\{g(i):i\in I\}[f_\alpha].$$

对这样的 g，令 $s_0^1=s_0\cup\{g(i):i\in I\}$ 且假设 $\beta<2^{>\kappa}$. 令 $\alpha(\beta)$ 是最小的 $\alpha\geqslant\beta$ 使上式成立. 令 $\mathfrak{A}^1_\beta=\mathfrak{A}_{\alpha(\beta)}$，$b^1_{m,\beta}=b_{m,\alpha(\beta)}$，且 $f^1_\beta=f_{\alpha(\beta)}$. 则 $\beta\leqslant\alpha(\beta)\leqslant b_{1,\alpha(\beta)}=b^1_{1,\beta},\cdots,b^1_{n-1,\beta}+\beta\leqslant b_{n-1,\alpha(\beta)}+\alpha(\beta)\leqslant b_{n,\alpha(\beta)}=b^1_{n,\beta}$，

且
$$(\mathfrak{A}^1_\beta,\vec{b}^1_{n,\beta})\models\bigwedge s^1_0[f^1_\beta].$$

(C7)(2) 假设 $\{\phi_i(t_i):i\in I\}\cup\{c_i\equiv t_i:i\in I\}\subseteq s$，且只有有穷多

个 $d\in D$ 出现在$\{\psi_i(t_i):i\in I\}$中．令

$$I_1=\{i\in I:\psi_i(t_i)\in s_0\},$$

$$I_2=\{i\in I:\psi_i(t_i)\in\{d_q<d_r:q<r\}\},$$

$$I_3=\{i\in I:\psi_i(t_i)\in\{U(d_q):q\in\mathbf{Q}\}\}.$$

则 $I=I_1\cup I_2\cup I_3$ 且若 $s_0^1=s_0\cup\{\psi_i(t_i/c_i):i\in I_1\cup I_3\}$，则

$$(\mathfrak{A},\vec{b}_n)\models\bigwedge s_0[f]\Rightarrow(\mathfrak{A},\vec{b}_n)\models\bigwedge s_0^1[f].$$

因为只有有穷多个 $d\in D$ 出现在$\{\psi_i(t_i):i\in I\}$中，且对 $i\in I_2$，每一 $\psi_i(t_i)$形如 $d_q<d_r$，所以 I_2是有穷的，因此不妨假设它只有一个元素，比方说，i．但 $\psi_i(t_i)$是 $t_i<d_r$ 或 $d_r<t_i$ 且对某个 $k\in\{1,\cdots,n\}$，t_i 是 d_{r_k}．若 $r\in\{r_1,\cdots,r_n\}$，$(\mathfrak{A},\vec{b}_n)\models\bigwedge s_0[f]$，且 $b_1<\cdots<b_n$，则

$$(\mathfrak{A},\vec{b}_n)\models\psi_i(t_i)[f],$$

因此，$(\mathfrak{A},\vec{b}_n)\models\psi_i(t_i/c_i)[f]$．假设 $r\notin\{r_1,\cdots,r_n\}$，则对某个 $m\in\{0,1,\cdots,n\}$，$r_m<r<r_{m+1}$．因此对所有 $\alpha<2^{>\kappa}$，若$(\mathfrak{A}_\alpha,\vec{b}_{n,\alpha})$和 f_α 对 s_0^1和 α 满足条件，则

$$(\mathfrak{A}_{\alpha+\alpha},\ \vec{b}_{m,\alpha+\alpha},\ b,\ b_{m+1,\alpha+\alpha},\cdots,\ b_{n,\alpha+\alpha})$$

和 $f_{\alpha+\alpha}$对 $s_0^1\cup\{\psi_i(t_i/c_i)\}$和 α 满足条件，其中 b 是 $b_{m,\alpha+\alpha}+\alpha$．所以对每一 $\alpha<2^{>\kappa}$，我们能找到一模型对 α 和

$$s_0^2=s_0^1\cup\{\psi_i(t_i/c_i):i\in I_2\}=s_0\cup\{\psi_i(t_i/c_i):i\in I\}$$

满足条件．

(C7)(3) 假设$\{t_i:i\in I\}$是幂$<\kappa$的、$\mathscr{L}''$相对 C 的基本项集使得只有有穷多个 $d\in D$ 在其中出现．令 $I_1=\{i\in I:t_i\notin D\}$，$I_2=I-I_1$．令$\{c_i:i\in I\}$是$|I|$个互不相同个体常元使得它们没有一个在 s_0 和$\{t_i:i\in I\}$中出现．则

$$(\mathfrak{A},\vec{b}_n)\models\bigwedge s_0[f]\Rightarrow(\mathfrak{A},\vec{b}_n)\models\bigwedge s_0^1[f^1],$$

其中 $s_0^1=s_0\cup\{c_i\equiv t_i:i\in I_1\}$，且

$$f^1=(f-\{\langle c_i,f(c_i)\rangle:i\in I_1\})\cup\{\langle c_i,f(t_i)\rangle:i\in I_1\}.$$

因为对所有 $i\in I_2$，$t_i\in D$，所以 I_2有穷，因此对 $i\in I_2$，我们能一次一

个地找到 c_i 的解释. 若 t_i 在 s_0中出现，比方说 $t_i=d_{r_{k(i)}}$，则对给定的 f，令 $f^2=(f^1-\{\langle c_i,f(c_i)\rangle\})\cup\{\langle c_i,b_{k(i)}\rangle\}$. 假设 t_i 不在 s_0中出现，则对某个 $r\in\{r_1,\cdots,r_n\}$，t_i 是 d_r. 若(C7)(2)的证明中那样，我们能在诸 r_m 中找到一个 r 且用适当的 b 解释 c_i.

这样，我们证明了 $\mathbf{S}$ 是$(\kappa,\omega)_\alpha$-一致性质. 假设 ψ 是表述"$<$是 U 的传递线序"的 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$-句子. 我们断定：

$$\{\sigma,\psi\}\cup\{d_q<d_r:q<r,q,r\in\mathbf{Q}\}\cup\{U(d_q):q\in\mathbf{Q}\}\in\mathbf{S}.$$

假设 $\alpha<2^{>\kappa}$，根据本定理的假设，存在$\{\sigma,\psi\}$的模型 $\mathfrak{A}$ 使得 $\langle\alpha,<\rangle\subseteq\langle U,<\rangle$. 令 $\mathscr{L}^\alpha=\mathscr{L}\cup\{e_\beta:\beta<\alpha\}$，其中$\{e_\beta:\beta<\alpha\}$是新个体常元集. 若 φ_α 是 $\mathscr{L}^\alpha_{2^{>\kappa},\kappa}$的下列句子：

$$\bigwedge\{e_\beta<e_\xi:\beta<\xi<\alpha\}\wedge\bigwedge\{U(e_\beta):\beta<\alpha\}\wedge\sigma\wedge\psi,$$

则 $\mathfrak{A}\models\varphi_\alpha[f*\{\langle e_\beta,\beta\rangle:\beta<\alpha\}]$. 因为$2^{>\kappa}$是正则的，所以 φ_α 有基数$<2^{>\kappa}$的模型 $\mathfrak{A}_\alpha$. 但 U_α中的序数集是一个$<2^{>\kappa}$的序数，所以 $\mathfrak{A}_\alpha\in\mathscr{M}$. 因为 $\mathfrak{A}_\alpha\models\varphi_\alpha$，所以$\langle\alpha,<\rangle\subseteq\langle U^1_\alpha,<\rangle$且 $\mathfrak{A}_\alpha\models\sigma\wedge\psi$. 这样证明上述断定.

据模型存在定理4.2.7，

$$\{\sigma,\psi\}\cup\{d_q<d_r:q<r,q,r\in\mathbf{Q}\}\cup\{U(d_q):q\in\mathbf{Q}\}$$

有模型 $\mathfrak{B}=\langle B,V,<,\cdots\rangle$使得$<$线序 V 且$\langle V,<\rangle$包含有理数集的一个摹本. □

12.2.2 推论 良序概念不能用任何 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$-句子来刻画.

证明：令 φ是 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$的句子使得对每一 $\mathfrak{A}=\langle A,<,\cdots\rangle$，

$$\mathfrak{A}\models\varphi\Leftrightarrow<\text{良序 }A.$$

选择不在 φ 中出现的一元谓词 U. 令 $\sigma=\varphi\wedge\forall xU(x)$，则对某个 λ，σ 是 $\mathscr{L}_{\lambda^+\omega}$-句子. 但对每一 $\alpha<(2^\lambda)^+$，模型$(\mathfrak{A}_\alpha,U_\alpha,<,\cdots)$对 σ 和 $A_\alpha=U_\alpha=\alpha$ 满足12.2.1的假设，因此存在 φ 的模型 $\mathfrak{B}=\langle B,V,<,\cdots\rangle$使得 $B=V$ 且 B 不被良序，矛盾. □

下面包括的结果和证明所使用的技巧是 López-Escobar 在其[1966]得到的；其结果本质上已在12.2.1中表述，但证明方法不

一，值得我们在下面介绍.沿着相同的方向，Karp 在其[1965]用 back and forth-方法得到一个较弱的结果(12.2.5).

令 $\mathscr{W}$ 是所有(非空)良序结构的类，在1.2.4施超穷归纳已定义 $\mathscr{L}=\{<\}$ 的、具有下列性质的公式 $\varphi_\beta^<(v_0)$，其中 $\beta\in\mathbf{ON}$：

(1) 若 $\beta<\kappa$，则 $\varphi_\beta^<(v_0)$ 是有一个自由变元的 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$-公式，

(2) 对每一 $\mathfrak{A}=(A,<,\cdots)$(其中<线序 A)和每一 $a\in A$：

$$\mathfrak{A}\models\varphi_\beta^<(v_0)[a]\Leftrightarrow\{b\in A:b<a\}\text{有序型 }\beta.$$

据1.3.15，我们称 $\mathscr{M}\in\mathrm{PC}_\Delta(\mathscr{L}_{\kappa\omega})\Leftrightarrow$ 存在语言 $\mathscr{L}_1\supseteq\mathscr{L}$ 和 $\Sigma\subseteq\mathrm{Sent}((\mathscr{L}_1)_{\kappa\omega})$ 使得 $\mathscr{M}=\mathrm{Mod}_{\mathscr{L}_1}(\Sigma)\upharpoonright\mathscr{L}$.

12.2.3定理(López-Escobar)　令 $\mathscr{L}=\{<\}$，κ 是基数，则

$$\mathscr{W}\notin\mathrm{PC}_\Delta(\mathscr{L}_{\kappa\omega}).$$

证明：因为每一 $\mathrm{PC}_\Delta(\mathscr{L}_{\kappa\omega})$-类在较大的语言 $\mathscr{L}_{\lambda\omega}$ 中是一个 $\mathrm{PC}(\mathscr{L}_{\lambda\omega})$-类，所以我们只须证 $\mathscr{W}\notin\mathrm{PC}(\mathscr{L}_{\lambda\omega})$. 假设对某个基数 λ，$\mathscr{W}\in\mathrm{PC}(\mathscr{L}_{\lambda\omega})$，则存在 $\mathscr{L}_1\supseteq\{<\}$ 和 $(\mathscr{L}_1)_{\lambda\omega}$-句子 σ 使得 $\mathscr{W}=\mathrm{Mod}_{\mathscr{L}_1}(\sigma)\upharpoonright\{<\}$. 此外，我们还可以假设 λ 是后继序数，$\lambda=\pi^+$，且 $|\mathscr{L}_1|\leqslant\pi$.

通过增加下列新符号把 $\mathscr{L}_1$ 扩张到 $\mathscr{L}_2$：

二元关系 $R_1,\cdots,R_5$，　三元关系 R_6，

一元关系 R_7，　　　　个体常元 $c_0,\cdots,c_6$.

我们的目的是要定义 $(\mathscr{L}_2)_{\lambda\omega}$ 的句子 θ 使得：

(Ⅰ)　存在 $\sigma\wedge\theta$ 的基数为 $\beth_\kappa$ 的模型，其中 $\kappa=2^{2^{2^\pi}}$，

(Ⅱ)　$\mathfrak{A}\in\mathrm{Mod}(\sigma\wedge\theta)\Rightarrow|A|<\beth_{\kappa^+}$.

显然，这与前一章§3的下列结果矛盾：

$$\mathrm{h}((\mathscr{L}_2)_{\lambda\omega})=\mathrm{h}_\pi\leqslant\beth_{(2^\pi)^+}<\beth_\kappa.$$

(Ⅰ)的证明：在构造 θ 之前，我们来描述一下适于(Ⅰ)的模型. 令 $\delta=\beth_\kappa+1$，$\kappa=2^{2^{2^\pi}}$. 因为 $\langle\delta,\in\upharpoonright\delta\rangle\in\mathscr{W}$，所以据假设，存在 $\mathfrak{B}\in\mathrm{Mod}_{\mathscr{L}_1}(\sigma)$ 使得 $\mathfrak{B}\upharpoonright\{<\}=\langle\delta,\in\upharpoonright\delta\rangle$，即 $B=\delta$，$<^{\mathfrak{B}}=\in\upharpoonright\delta$.

如下把 $\mathfrak{B}$ 扩张到 $\mathscr{L}_2$的结构 $\mathfrak{D}$：

$\mathfrak{D}\restriction\mathscr{L}_1=\mathfrak{B}$,

$c_0^{\mathfrak{D}}=0$, $c_1^{\mathfrak{D}}=\omega$, $c_2^{\mathfrak{D}}=\pi$, $c_3^{\mathfrak{D}}=2^{\pi}$,

$c_4^{\mathfrak{D}}=2^{2^{\pi}}$, $c_5^{\mathfrak{D}}=2^{2^{2^{\pi}}}=\kappa$, $c_6^{\mathfrak{D}}=\beth_\kappa$,

$R_1^{\mathfrak{D}}=\{\langle\alpha,\alpha+1\rangle;\alpha\in\beth_\kappa\}$,

$R_5^{\mathfrak{D}}=\{\langle\alpha,\beth_\alpha\rangle:\alpha\leqslant\kappa\}$,

$R_7^{\mathfrak{D}}=\{\alpha:0<\alpha\leqslant\beth_\kappa$且 α 是极限序数$\}$.

据 $c_i^{\mathfrak{D}}$ 的定义，对 $i=2,3,4$，存在双射 $g_i:c_{i+1}^{\mathfrak{D}}\to\mathscr{P}(c_i^{\mathfrak{D}})$，所以定义

$$R_i^{\mathfrak{D}}=\{\langle\alpha,\zeta\rangle;\alpha<c_i^{\mathfrak{D}}\text{ 且 }\zeta\in g_i(\alpha)\},\quad\text{对 } i=2,3,4.$$

对每一 $\alpha<\kappa$，令 $f_\alpha:\beth_{\alpha+1}\to\mathscr{P}(\beth_\alpha)$是双射，则定义

$$R_6^{\mathfrak{D}}=\{\langle\beth_{\alpha+1},\gamma,\zeta\rangle:\alpha<\kappa,\gamma\in\beth_{\alpha+1}\text{且 }\zeta\in f_\alpha(\gamma)\}.$$

易证$(\mathscr{L}_2)_{1\omega}$的下列句子在 $\mathfrak{D}$ 中成立：

(1) $\forall xy[R_1(x,y)\leftrightarrow x<y\wedge\neg\exists z(x<z\wedge z<y)]$,

(2) $\forall x[R_7(x)\leftrightarrow c_0<x\wedge\forall y(y<x\to\exists z(y<z\wedge z<x))]$,

(3) $\varphi_0^<(c_0)$,

(4) $\varphi_\omega^<(c_1)$,

(5) $\varphi_\pi^<(c_2)$,

(6)—(8) $\forall xy[x<c_{i+1}\wedge y<c_{i+1}\to[\forall z(R_i(x,z)\leftrightarrow R_i(y,z))$
$\to x\equiv y]]$, 其中 $i=2,3,4$,

(9)—(11) $\forall xy(R_i(x,y)\to y<c_i)$, 其中 $i=2,3,4$,

(12) $\forall wxy[x<w\wedge y<w$
$\to[\forall z(R_6(w,x,z)\leftrightarrow R_6(w,y,z))\to x\equiv y]]$,

(13) $\forall xyz[R_5(x,y)\wedge R_5(x,z)\to y\equiv z]$,

(14) $\forall x[x<c_5\vee x\equiv c_5\leftrightarrow\exists yR_5(x,y)]$,

(15) $R_5(c_0,c_1)\wedge R_5(c_5,c_6)$,

(16) $\forall uvwx[R_1(u,v)\wedge R_5(u,w)\wedge R_5(v,x)$
$\to\forall yz(R_6(x,y,z)\to z<w)]$,

(17) $\forall vw[R_7(v)\wedge R_5(v,w)$

$$\rightarrow\forall x[x<w\rightarrow\exists yz(y<v\wedge R_5(y,z)\wedge x<z)]],$$

(18) $\forall x(x<c_6\vee x\equiv c_6)$.

因此，若 θ 是(1)—(8)的合取，则 $\mathfrak{D}\in\mathrm{Mod}(\sigma\wedge\theta)$ 且 $|D|=\beth_\kappa$，所以(Ⅰ)得证.

(Ⅱ)的证明：令 $\mathfrak{D}\in\mathrm{Mod}(\sigma\wedge\theta)$，据 σ，关系 $<^{\mathfrak{A}}$ 良序 A，所以存在序数 ρ 使得 $\langle A,<^{\mathfrak{A}}\rangle$ 同构 $\langle\rho,\in\upharpoonright\rho\rangle$，因此不妨假设 $A=\rho=\{\xi:\xi<\rho\}$ 且 $<^{\mathfrak{A}}=\in\upharpoonright\rho$，这样每一 $c_i^{\mathfrak{A}}$ 是我们用 ξ_i(其中 $i=0,\cdots,6$)来指称的、小于 ρ 的序数. 据句子(3)—(5)，$\xi_0=0,\xi_1=\omega,\xi_2=\pi$. 从(18)，我们得 $\rho=\xi_6+1$. 对 $i=2,3,4$，令

$$f_i=\{\langle\alpha,X\rangle:\alpha\in\xi_{i+1}\text{且 }X=\{\zeta:\langle\alpha,\zeta\rangle\in R_i^{\mathfrak{A}}\}\},$$

用(6)—(11)的适当例子，我们得出每一 f_i 是单射使得 $f_i:\xi_{i+1}\rightarrow\mathscr{P}(\xi_i)$，其中 $i=2,3,4$，因此 $|\xi_3|\leqslant 2^\pi$，$|\xi_4|\leqslant 2^{2^\pi}$ 且 $|\xi_5|\leqslant 2^{2^{2^\pi}}=\kappa$，因此 $\xi_5<\kappa^+$. 从(1)和(2)，

$$\langle\alpha,\delta\rangle\in R_1^{\mathfrak{A}}\Leftrightarrow\alpha+1=\delta,\quad\alpha\in R_7^{\mathfrak{A}}\Leftrightarrow\alpha>0\text{是极限序数}.$$

对 $\alpha<\rho$，令

$$g_\alpha=\{\langle\gamma,X\rangle:\gamma<\alpha\text{ 且 }X=\{\zeta:\langle\alpha,\gamma,\zeta\rangle\in R_6^{\mathfrak{A}}\}\},$$

从(12)得知

$$g_\alpha\text{是定义域为 }\alpha\text{ 的单射}.\tag{12.3}$$

从(13)—(15)得知，$R_5^{\mathfrak{A}}$ 是定义域等于 ξ_5+1 的映射使得 $R_5^{\mathfrak{A}}(0)=\omega$，$R_5^{\mathfrak{A}}(\xi_5)=\xi_6$. 用(16)，(17)和(12.3)，且施归纳于 α，有

$$|R_5^{\mathfrak{A}}(\alpha)|\leqslant\beth_\alpha,\quad\text{对所有 }\alpha\leqslant\xi_5,\tag{12.4}$$

因此据 $\xi_5<\kappa^+$，$R_5^{\mathfrak{A}}(\xi_5)=\xi_6$ 和(12.4)，有

$$|A|=|\rho|=|\xi_6|=|R_5^{\mathfrak{A}}(\xi_5)|\leqslant\beth_{\xi_5}<\beth_{\kappa^+}.\ \square$$

令 $\mathscr{M}$ 是结构类，下面我们用 $\mathscr{M}^\varphi$ 指称类 $\{\mathfrak{A}\upharpoonright\varphi^{\mathfrak{A}}:\mathfrak{A}\in\mathscr{M}\}$. 我们称 $\mathscr{M}$ 是**相对广义拟基本类**，记作 $\mathscr{M}\in\mathrm{RPC}_\Delta(\mathscr{L}_{\kappa\lambda})$，$\Leftrightarrow$ 存在 $\mathscr{N}\in\mathrm{PC}_\Delta(\mathscr{L}_{\kappa\lambda})$ 和 $\mathscr{N}$ 的语言的公式 φ 使得 $\mathscr{M}=\mathscr{N}^\varphi\upharpoonright\mathscr{L}$.

下证12.2.3的一种精致形式.

12.2.4定理 令 $\mathscr{L}=\{<\}$,κ 是基数,则

$$\mathscr{W}\notin \mathrm{RPC}_{\Delta}(\mathscr{L}_{\kappa\omega}).$$

证明:如前一定理的证明,我们在此只须证 RPC 的情况.假设要证结果不成立,则对某个 λ,$\mathscr{W}\in \mathrm{RPC}(\mathscr{L}_{\lambda\omega})$,因此存在 $\mathscr{L}_1\supseteq\{<\}$,公式 $\varphi\in \mathrm{Form}_1((\mathscr{L}_1)_{\lambda\omega})$和句子 $\sigma\in \mathrm{Sent}((\mathscr{L}_1)_{\lambda\omega})$使得 $\mathscr{W}=(\mathrm{Mod}_{\mathscr{L}_1}(\sigma))^{\varphi}\upharpoonright\{<\}$;换句话说:

(1) 对每一序数 $\rho>0$,存在 $\mathfrak{B}\in \mathrm{Mod}_{\mathscr{L}_1}(\sigma)$使

$$B\supseteq\rho,\quad \varphi^{\mathfrak{B}}=\rho,\quad <^{\mathfrak{B}}=\in\upharpoonright\rho.$$

(2) 若 $\mathfrak{A}\in \mathrm{Mod}_{\mathscr{L}_1}(\sigma)$,则存在序数 $\rho>0$使

$$\langle\varphi^{\mathfrak{A}},<^{\mathfrak{A}}\rangle\cong\langle\rho,\in\upharpoonright\rho\rangle.$$

如前一定理证明,设 $\lambda=\pi^{+}$且 $|\mathscr{L}_1|<\lambda$.令 $\mathscr{L}_2$如前规定,令 θ^{φ} 是$(\mathscr{L}_2)_{\lambda\omega}$-句子使之据 φ 相对化 θ 的量词从 θ 得到的句子,令

$$\theta_1=\theta^{\varphi}\wedge\bigwedge_{i=0}^{6}\varphi(c_i).$$

据12.2.3的(Ⅰ)和上述(1),有

(1)′ 存在序数 δ 使 $|\delta|=\beth_{\kappa}$(其中 $\kappa=2^{2^{\pi}}$),和 $\mathscr{L}_2$-结构 $\mathfrak{A}_0$使

$$\mathfrak{A}_0\in \mathrm{Mod}_{\mathscr{L}_2}(\sigma\wedge\theta_1),\quad \varphi^{\mathfrak{A}_0}=\delta,\quad <^{\mathfrak{A}_0}=\in\upharpoonright\delta.$$

用12.2.3的(Ⅱ)和(2)可得

(2)′ 若 $\mathfrak{A}\in \mathrm{Mod}_{\mathscr{L}_2}(\sigma\wedge\theta_1)$,则存在序数 $\rho>0$使

$$\langle\varphi^{\mathfrak{A}},<^{\mathfrak{A}}\rangle\cong\langle\rho,\in\upharpoonright\rho\rangle,\quad |\rho|<\beth_{\kappa^{+}}.$$

令 F 是新二元关系符号,$\mathscr{L}_3=\mathscr{L}_1\cup\{F\}$,$\psi$ 是述说"F 是从个体域到 φ 的解释上的双射"的句子,即:

$$\begin{aligned}\psi=&\forall xy[F(x,y)\to\varphi(y)]\wedge\forall y[\varphi(y)\to\exists xF(x,y)]\\&\wedge\forall x\exists yF(x,y)\wedge\forall xyz[F(x,y)\wedge F(x,z)\to y\equiv z]\\&\wedge\forall xyz[F(x,z)\wedge F(y,z)\to x\equiv y].\end{aligned}$$

令 $\psi_1=\sigma\wedge\theta_1\wedge\psi$.假设 $\mathfrak{B}\in \mathrm{Mod}_{\mathscr{L}_3}(\psi_1)$,从 ψ 可得$|\varphi^{\mathfrak{B}}|=|B|$,据 $\sigma\wedge\theta_1$和(2)′,有$|B|<\beth_{\kappa^{+}}$.因此我们证明了:

(Ⅱ)$'$ $\mathfrak{B}\in \mathrm{Mod}_{\mathscr{L}_3}(\psi_1) \Rightarrow |B|<\beth_{\kappa^+}$.

为了与 $\mathrm{h}((\mathscr{L}_3)_{\infty\omega})<\beth_\kappa$的事实矛盾，只须证：

(Ⅰ)$'$ ψ_1有幂为$\beth_\kappa$的$(\mathscr{L}_3)_{\infty\omega}$-模型.(因为若"$\psi_1$有幂$\beth_\kappa$的模型$\Rightarrow \psi_1$有任意大幂的模型"，则 $\mathrm{h}((\mathscr{L}_3)_{\infty\omega})$至少是$\beth_\kappa$，矛盾. 若 ψ_1有幂$\beth_\kappa$的模型但没有任意大幂的模型，也与 $\mathrm{h}((\mathscr{L}_3)_{\infty\omega})<\beth_\kappa$矛盾.)

(Ⅰ)$'$的证明：对(1)$'$的结构 $\mathfrak{A}_0$运用向下-LS-定理(11.1.2)，因为

$$\max\{|\delta|,|\mathscr{L}_3|\}\leqslant \max\{\beth_\kappa,\lambda\}=\beth_\kappa, \text{且}$$

$$\mathrm{cf}(2^\pi)>\pi,\quad \mathrm{cf}(\kappa)>\pi,$$

所以对每一基数 $\tau\leqslant\pi$，$\beth_\kappa^\tau=\beth_\kappa$，因此$\beth_\kappa^{<\lambda}=\beth_\kappa$. 因为 λ 是正则的，所以据11.1.2，存在 $\mathfrak{A}_1\prec_\lambda\mathfrak{A}_0$，$|A_1|=\beth_\kappa$，使得 $\delta\subseteq A_1$，因此 $\mathfrak{A}_1\in \mathrm{Mod}_{\mathscr{L}_2}(\sigma\wedge\theta_1)$，据$\prec_\lambda$和(1)$'$，有 $\delta\subseteq\varphi^{\mathfrak{A}_1}\subseteq\varphi^{\mathfrak{A}_0}=\delta$，因此

$$|\varphi^{\mathfrak{A}_1}|=|\delta|=\beth_\kappa=|\mathfrak{A}_1|.$$

令 $\mathfrak{A}$ 是如下定义的 $\mathscr{L}_3$-结构：

$\mathfrak{A}\upharpoonright\mathscr{L}_2=\mathfrak{A}_1$，　$F^{\mathfrak{A}}$ 是从 A_1到 $\varphi^{\mathfrak{A}_1}$上的任意双射.

显然，$\mathfrak{A}$ 是(Ⅰ)$'$中要求的 ψ_1的模型.□

12.2.5推论　对每一基数 κ，存在序数 $\delta>0$和线序但非良序的结构$\langle A,<\rangle$使得$\langle\delta,\in\upharpoonright\delta\rangle\equiv_{\kappa\omega}\langle A,<\rangle$.

证明：设结论不成立，则存在基数 κ_0使得对所有序数 $\delta>0$和结构$\langle A,<\rangle$：

$$\langle\delta,\in\upharpoonright\delta\rangle\equiv_{\kappa_0\omega}\langle A,<\rangle \Rightarrow A \text{ 被}<\text{良序}.$$

这直接蕴涵

$$\bigcup\{\mathrm{Mod}(\mathrm{Th}_{\kappa_0\omega}(\langle\delta,\in\upharpoonright\delta\rangle)):\delta\in\mathbf{ON},\delta>0\}\subseteq\mathscr{W}.$$

因为 $\mathscr{W}$ 的每一元素同构形如$\langle\delta,\in\upharpoonright\delta\rangle$的某个结构，其中 $\delta\in\mathbf{ON}$，$\delta>0$，所以逆包含也成立，因此

$$\bigcup\{\mathrm{Mod}(\mathrm{Th}_{\kappa_0\omega}(\langle\delta,\in\upharpoonright\delta\rangle)):\delta\in\mathbf{ON},\delta>0\}=\mathscr{W}. \tag{12.5}$$

令 $\tau>|\mathrm{Sent}(\mathscr{L}_{\kappa_0\omega})|$，其中 $\mathscr{L}=\{<\}$，则

$$\bigwedge \mathrm{Th}_{\kappa_0\omega}(\langle\delta,\in\upharpoonright\delta\rangle)\in \mathrm{Sent}(\mathscr{L}_{\tau\omega}),$$

因此若 $\lambda>|\mathrm{Sent}(\mathscr{L}_{\tau\omega})|$，则

$$\sigma=\bigvee\{\bigwedge \mathrm{Th}_{\kappa_0\omega}(\langle\delta,\in\upharpoonright\delta\rangle):\delta\in\mathbf{ON},\delta>0\}$$

是 $\mathscr{L}_{\lambda\omega}$-句子. 易证(12.5)左边等于 $\mathrm{Mod}(\sigma)$，因此 $\mathscr{W}=\mathrm{Mod}(\sigma)$，所以对某个基数 λ，$\mathscr{W}\in\mathbf{EC}(\mathscr{L}_{\lambda\omega})$，而这与12.2.3矛盾. □

说明：Karp 在其[1965]独立地证明了11.2.5的一精致形式. 根据这一结果，她证明了对任意 κ，$\mathscr{W}$ 不是 $\mathbf{EC}_\Delta(\mathscr{L}_{\kappa\omega})$-类. 为了证明 Karp 的结果，我们还需要下列记法：

12.2.6记法 任给两个线序结构 $\langle A,<\rangle$ 和 $\langle B,\prec\rangle$，我们用 $\langle A,<\rangle\otimes\langle B,\prec\rangle$ 指称关系结构 $\langle A\times B,\lhd\rangle$，其中 $\lhd$ 定义如下：对 $a_1,a_2\in A$，$b_1,b_2\in B$，

$$\langle a_1,b_1\rangle\lhd\langle a_2,b_2\rangle \Leftrightarrow b_1\prec b_2 \text{或}(b_1=b_2 \text{且 } a_1<a_2).$$

这样，Karp 的结果可以用下列定理来表述：

12.2.7定理(Karp，[1965]) 令 δ 是序数使得 $\delta=\sup\{\omega^\alpha:\alpha<\delta\}$，$|\delta|=\kappa$，$\langle A,<\rangle$是有首元 a_0(first element)的线序结构，则

$$\langle\delta,\in\upharpoonright\delta\rangle\equiv_{\infty\omega}\langle\delta,\in\upharpoonright\delta\rangle\otimes\langle A,<\rangle. \tag{12.6}$$

特别地，任给基数 κ，(12.6)对每一基数 $\delta\geqslant\kappa$ 成立.

证明：这里我们要用 back and forth-方法(关于这种方法的详细研究请见下册第14—15章)来工作. 对 $\xi<\delta$，我们称形如

$$[\omega^\alpha\cdot\xi,\ \omega^\alpha\cdot(\xi+1))$$

的左闭区间为 **δ 的 ω^α-区间**，我们称形如

$$[\langle\omega^\alpha\cdot\xi,a\rangle,\langle\omega^\alpha\cdot(\xi+1),a\rangle)$$

的左闭区间为$\langle\delta,\in\upharpoonright\delta\rangle\otimes\langle A,<\rangle$**的 ω^α-区间**，其中 $a\in A$. 对 $\alpha\leqslant\delta$，令

$\mathbf{I}_\alpha=\{f:f$ 是从 δ 的诸 ω^α-区间的一个并到$\langle\delta,\in\upharpoonright\delta\rangle\otimes\langle A,<\rangle$ 的诸 ω^α-区间的一个并的保序单射使得 $f([0,\omega^\alpha))=[\langle 0,a_0\rangle,\langle\omega^\alpha,a_0\rangle)$ 且 f 的定义域是 δ 的一个包含0的有穷子集$\}$.

因为对每一 $\alpha<\delta$，把0映射到$\langle 0,a_0\rangle$的函数在每一 $\mathbf{I}_\alpha$ 中，所以对每一 $\alpha<\delta$，$\mathbf{I}_\alpha\neq\varnothing$. 对 $\beta\leqslant\alpha$，每一 ω^α-区间是诸 ω^β-区间的并，因此 $\mathbf{I}_\alpha\subseteq\mathbf{I}_\beta$. 据14.2.3，我们只需证明下列条件成立：

(1)"forth"部分：若 $\alpha+1\leqslant\delta$，则任给 $\xi<\delta$ 和 $f\in\mathbf{I}_{\alpha+1}$，存在 $g\in\mathbf{I}_\alpha$ 使得 $f\subseteq g$ 且 $\xi\in\mathrm{Dom}(g)$.

(2)"back"部分：若 $\alpha+1\leqslant\delta$，则任给 $\langle\xi,a\rangle\in\langle\delta,\in\upharpoonright\delta\rangle\otimes\langle A,<\rangle$和 $f\in\mathbf{I}_{\alpha+1}$，存在 $g\in\mathbf{I}_\alpha$ 使得 $f\subseteq g$ 且$\langle\xi,a\rangle\in\mathrm{Ran}(g)$.

在此我们只验证(2)成立，因为据对称性，(1)的验证也类似.

假设 $\alpha+1\leqslant\delta$，$\langle\xi,a\rangle\in\langle\delta,\in\upharpoonright\delta\rangle\otimes\langle A,<\rangle$和 $f\in\mathbf{I}_{\alpha+1}$，则 f 是从 δ 的 $\omega^{\alpha+1}$-区间的并到$\langle\delta,\in\upharpoonright\delta\rangle\otimes\langle A,<\rangle$的 $\omega^{\alpha+1}$-区间的并的保序单射且定义域有穷. 以递增线序的形式把包含 $\mathrm{Dom}(f)$的元素的那些 $\omega^{\alpha+1}$-区间排列如下：

$$\begin{array}{lccccccl} & J_0, & \cdots, & J_k, & \cdots, & J_n, & & J_0=[0,\ \omega^{\alpha+1}), \\ f & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & J_0', & \cdots, & J_k', & \cdots, & J_n', & & J_0'=[\langle 0,a_0\rangle,\langle\omega^{\alpha+1},a_0\rangle) \end{array} \tag{12.7}$$

若$\langle\xi,a\rangle$已在其中一个 J_k' 中，则我们把(12.7)的箭头所指的映射自然地延续下去，不难把 f 扩张为 $g\in\mathbf{I}_{\alpha+1}$使得$\langle\xi,a\rangle\in\mathrm{Ran}(g)$. 下面假设$\langle\xi,a\rangle$不在任何 J_k' 中. 令 J_m' 是$\langle\xi,a\rangle$左边最右的区间. 有两种情况需要考虑：

情况一　$m=n$ 或 J_{m+1}不与 J_m 相邻：通过扩张(12.7)中的映射使之把 J_m 右边的 $\omega^{\alpha+1}$-区间映射到包含$\langle\xi,a\rangle$的 $\omega^{\alpha+1}$-区间.

情况二　J_{m+1}与 J_m 相邻：在这种情况下，f 不能扩张为 $\mathbf{I}_{\alpha+1}$中的函数使得$\langle\xi,a\rangle$在这个函数的值域中，但它能扩张为 $\mathbf{I}_\alpha$ 中的一个函数，所以还是满足条件(2). 因为 $\omega^{\alpha+1}$-区间 J_m 是 ω 个 ω^α-区间的并，而在这 ω 个 ω^α-区间中只有有穷多个区间包含 $\mathrm{Dom}(f)$的元素，我们把它们记作 $J_{m,1},\cdots,J_{m,p}$. 令 $J_{m,p+1}$是 $J_{m,p}$右边第一个 ω^α-区间，J' 是$\langle\delta,\in\upharpoonright\delta\rangle\otimes\langle A,<\rangle$的、包含$\langle\xi,a\rangle$的 ω^α-区间，则 J' 在

J'_m的右边且在J'_{m+1}的左边. 令映射g在J_k(其中$k\neq m$)和$J_{m,1},\cdots,J_{m,p}$上与(12.7)的映射f相同, 且把$J_{m,p+1}$映射到J', 则g是ω^α-区间的并上的保序单射且把$[0,\omega^\alpha)$映射到$[\langle 0,a_0\rangle,\langle\omega^\alpha,a_0\rangle)$上使得$\langle\xi,a\rangle\in\mathrm{Ran}(g)$. 这就证明了$f$能扩张为函数$g\in\mathbf{I}_\alpha$使得

$$\langle\xi,a\rangle\in\mathrm{Ran}(g).\ \square$$

12.2.8推论 不存在包含<的$\mathscr{L}_{\kappa\omega}$-句子使得它能表达"<良序$A$"的条件.

证明: 假设存在这样的公式φ, 则φ有某个序数β作为φ的量词秩, 即$\mathrm{qr}(\varphi)=\beta$. 选择$\delta\geqslant\beta$使得$\delta=\bigcup_{\alpha<\delta}\omega^\alpha$. 这样的$\delta$显然是存在的. 例如, 任何大于$\beta\cup\omega$的基数就足够了. 令$\mathfrak{B}$是线序但非良序的结构, 则$\varphi$在$\langle\delta,\in\restriction\delta\rangle$中真但在$\langle\delta,\in\restriction\delta\rangle\otimes\mathfrak{B}$中假, 而这与上述定理矛盾. $\square$

12.2.5还有一个有趣的运用, 即用下列模型论结果来表述$\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的内插定理:

12.2.9定理 令$\mathscr{M},\mathscr{N}\in\mathrm{PC}(\mathscr{L}_{\omega_1\omega})$使得$\mathscr{M}\cap\mathscr{N}=\varnothing$, 则存在$\mathscr{K}\in\mathrm{EC}(\mathscr{L}_{\omega_1\omega})$使得$\mathscr{M}\subseteq\mathscr{K}$且$\mathscr{K}\cap\mathscr{N}=\varnothing$. $\square$

证明留给读者作为练习.

下面我们说明这个结果不能扩张到$\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的$\mathrm{PC}_\Delta$-类上:

12.2.10例 令$\mathscr{M}$是所有与$\langle\omega_1,\in\restriction\omega_1\rangle$同构的结构的类, $\mathscr{N}$是所有线序(全序)但非良序的类$\mathscr{T}-\mathscr{W}$. 显然, $\mathscr{M}\cap\mathscr{N}=\varnothing$. 据1.3.34(3), $\mathscr{N}\in\mathrm{PC}(\mathscr{L}_{\omega\omega})$, $\mathscr{M}\in\mathrm{PC}_\Delta(\mathscr{L}_{\omega_1\omega})$, 其中$\mathscr{L}=\{<\}$. 事实上, $\mathscr{M}$是语言$\{c_n:n<\omega\}\cup\{<,F\}$(其中$F$是三元关系符号)的下列句子集的模型相对$\mathscr{L}=\{<\}$的所有归约模型的类:

(1) "<是线序",

(2) $\exists x\varphi_\alpha^<(x)$, 对$\alpha<\omega_1$,

(3) $\neg(c_n\equiv c_m)$, 对$n,m<\omega,n\neq m$,

(4) "对每一x, $F(x,\cdot,\cdot)$是从$\{c_n:n<\omega\}$到x的<-前趋集上的映射"(即x的<-前趋集至多可枚举);

$\forall xyz[F(x,y,z)\wedge F(x,y,v)\rightarrow z\equiv v]$,

$\forall xyz[F(x,y,z)\rightarrow(\bigvee_{n<\omega} y\equiv c_n)\wedge z<x]$,

$\forall xz[z<x\rightarrow\exists yF(x,y,z)]$.

假设存在类 $\mathscr{K}\supseteq\mathscr{M}$ 使得 $\mathscr{K}$ 在 $\equiv_{\omega_1\omega}$ 下封闭且 $\mathscr{K}\cap\mathscr{N}=\varnothing$，则 $\langle\omega_1,\in\restriction\omega_1\rangle\in\mathscr{K}$. 据12.2.5，存在结构 $\langle A,<\rangle$ 使得 $\langle A,<\rangle$ 不是良序且 $\langle\omega_1,\in\restriction\omega_1\rangle\equiv_{\omega_1\omega}\langle A,<\rangle$. 据假设，$\langle A,<\rangle\in\mathscr{K}$，因为 $\langle A,<\rangle$ 是线序，所以 $\langle A,<\rangle\in\mathscr{N}$，因此 $\langle A,<\rangle\in\mathscr{K}\cap\mathscr{N}$，与 $\mathscr{K}\cap\mathscr{N}=\varnothing$ 矛盾. □

这样，我们证明了，在 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 中存在 PC_Δ-类 $\mathscr{M}$，$\mathscr{N}$ 使得不存在 $\mathscr{K}$ 在 $\equiv_{\omega_1\omega}$ 下封闭，$\mathscr{M}\subseteq\mathscr{K}$ 且 $\mathscr{N}\cap\mathscr{K}=\varnothing$. 特别地，没有这样的 $\mathscr{K}$ 能是 $EC_\Delta(\mathscr{L}_{\omega_1\omega})$-类.

关于良序概念在上述领域的进一步研究请参见 Calais 的[1972]，Feferman 的[1972]和 R. Fraîssé 的[1974].

练　习

12.2.11　证明定理12.2.9.

§3　良序与有穷量词的其它关系

前两节的内容已告诉我们，对任何有穷量词语言 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$，良序概念(即所有非空良序的类 $\mathscr{W}$)不能用 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$ 的句子来刻画. 本节我们则要进一步研究，若 $\mathscr{L}=\{<\}$，则在 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$ 中我们究竟给对良序概念表达多少. 这节的结果是 López-Escobar 在其[1968]中得到的. 他采用消去量词的方法(这种方法本质上是对 Ehrenfeucht 在其[1961]和 Mostowski-Tarski 在其[1949]使用的方法的结合和推广)，在一定条件下，$\mathscr{L}_{\infty\omega}$ 的某类句子(他称为**范式句**)使得就良序概念而言，$\mathscr{L}_{\infty\omega}$ 的其它任一句子等价诸范式句的一个析取.

本节固定 $\mathscr{L}=\{<\}$，令 **RC** 是所有无穷正则基数的类. 因为每

一良序结构$\langle A,<\rangle$（其中$<$良序 A）在同构意义上都能用$\bigcup\{\mathscr{L}_{\kappa\omega}:\kappa\in\mathbf{RC}\}$的一句子来刻画，所以表述

“线序的每一非空可定义子集有首元”

的$\bigcup\{\mathscr{L}_{\kappa\omega}:\kappa\in\mathbf{RC}\}$-句子集 Σ 就有性质：$\mathrm{Mod}(\Sigma)=\mathscr{W}$. 正象我们将要看到的那样，$\Sigma$ 是否成功地刻画 $\mathscr{W}$ 很大程度上依赖下列事实：Σ 中句子的量词秩(qr)是无界的. 令

$$\mathrm{Q}_\kappa=\{\varphi:\varphi\in\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\kappa\omega})\text{且 }\mathrm{qr}(\varphi)<\kappa\}.$$

（参见1.3.13及其后面的说明.）本节的主要结果之一就是要证明，就良序概念而言，Q_κ 不比 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$表达更多的东西（参见12.3.25）. 但是，即使 Q_κ 不强于 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$（就良序概念而言，一般说，$\mathrm{Q}_\kappa$ 比 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$强多了），以 Q_κ 作为起点也具有某些优点，其中最重要的一点就是，分配律对 Q_κ 成立，即若 φ 是 Q_κ 的公式使得它是诸合取的一个析取（或诸析取的一个合取），则 φ 逻辑等价 Q_κ 的一公式 φ' 使得 φ' 是诸析取的一个合取（或诸合取的一个析取）.

为了方便，本节我们用 $\mathscr{W}\models\varphi$表示对所有 $\mathfrak{A}\in\mathscr{W}$，$\mathfrak{A}\models\varphi$.

下面我们规定几个与良序概念相关的句子类和模型类：

$$\mathrm{T}_\kappa=\{\sigma:\sigma\in\mathrm{Sent}(\mathscr{L}_{\kappa\omega})\text{且 }\mathscr{W}\models\sigma\},$$

$$\mathrm{T}_\kappa^{\mathrm{Q}}=\{\sigma:\sigma\in\mathrm{Q}_\kappa\text{ 的句子且 }\mathscr{W}\models\sigma\},$$

$$\mathscr{W}_\kappa=\mathrm{Mod}(\mathrm{T}_\kappa),$$

$$\mathscr{W}_\kappa^{\mathrm{Q}}=\mathrm{Mod}(\mathrm{T}_\kappa^{\mathrm{Q}}).$$

显然，$\mathscr{W}\subseteq\mathscr{W}_\kappa^{\mathrm{Q}}\subseteq\mathscr{W}_\kappa$. 在后面的12.2.26(1)中，我们将证明：

$$\mathscr{W}_\kappa^{\mathrm{Q}}=\mathscr{W}_\kappa\neq\mathscr{W}.$$

就象在 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$中那样，我们也将考虑，每一非空可定义子集有首元的线序的类. 为此我们令 D_κ（或 $\mathrm{D}_\kappa^{\mathrm{Q}}$）是 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$（或 Q_κ）中所有具有下列形式的句子的集合：

$$\forall v_0v_1[v_0<v_1\vee v_0\equiv v_1\vee v_1<v_0]$$

$$\wedge\forall x_0\cdots x_{n-1}[\exists x_n\varphi\rightarrow\exists x_n(\varphi\wedge\forall z(\varphi\|x_n/z\|\rightarrow z\equiv x_n\vee x_n<z))],$$

其中 φ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$-公式使得 $\mathrm{Fv}(\varphi)\subseteq\{x_i:i\leqslant n\}$，$z\notin\mathrm{Fv}(\varphi)$，且$\varphi\|x_n/z\|$

是形如$\exists x_n(x_n\equiv z\wedge\varphi)$的公式. 令

$$\mathscr{M}_\kappa=\mathrm{Mod}(\mathrm{D}_\kappa),\quad \mathscr{M}_\kappa^{\mathrm{Q}}=\mathrm{Mod}(\mathrm{D}_\kappa^{\mathrm{Q}}).$$

据良序概念的性质,立得下列包含关系:

$$\mathscr{W}\subseteq\mathscr{W}_\kappa^{\mathrm{Q}}\subseteq\mathscr{M}_\kappa^{\mathrm{Q}}\subseteq\mathscr{M}_\kappa,\quad \mathscr{W}\subseteq\mathscr{W}_\kappa\subseteq\mathscr{M}_\kappa.$$

在12.3.26,我们最终将证明:

$$\mathscr{W}_\kappa=\mathscr{M}_\kappa=\mathscr{M}_\kappa^{\mathrm{Q}}=\mathscr{W}_\kappa^{\mathrm{Q}}.$$

下面我们定义 López-Escobar 的所谓范式句. 为此我们需要给出 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$的某些公式,它们与线序中的极限点(或导出点(derived point))概念密切相关.

本节固定用 α,β,η 表示序数,其中 η 表示非零极限序数.

设 $\alpha,\beta,\eta<\kappa$,则易见下列定义的公式是 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$-公式:

12.3.1定义

(1) $\mathrm{Lim}_\alpha(v_0)$(读作 v_0是 **α-极限点**)是下列递归定义的公式:

① $\mathrm{Lim}_0(v_0)=v_0\equiv v_0$,

② $\mathrm{Lim}_{\beta+1}(v_0)=\mathrm{Lim}_\beta(v_0)\wedge\exists v_1(v_1<v_0\wedge\mathrm{Lim}_\beta\|v_0/v_1\|)$
$$\wedge\forall v_1[v_1<v_0\wedge\mathrm{Lim}_\beta\|v_0/v_1\|\rightarrow\exists v_2(v_1<v_2\wedge v_2<v_0\wedge\mathrm{Lim}_\beta\|v_0/v_2\|)],$$

③ $\mathrm{Lim}_\eta(v_0)=\bigwedge\{\mathrm{Lim}_\beta(v_0):\beta<\eta\}$.

(2) $\mathrm{Las}_\alpha(v_0)$(读作 v_0是 **α-末极限点**)是下列公式:

$$\mathrm{Lim}_\alpha(v_0)\wedge\neg\exists v_1(v_0<v_1\wedge\mathrm{Lim}_\alpha\|v_0/v_1\|).$$

(3) End_α^{-1}(读作**没有 α-极限点**)是下列公式:

$$\neg\exists v_0\mathrm{Lim}_\alpha(v_0).$$

(4) End_α^0(读作 **α-极限点无界**)是下列句子:

$$\exists v_0\mathrm{Lim}_\alpha(v_0)\wedge\forall v_0[\mathrm{Lim}_\alpha(v_0)\rightarrow\exists v_1(v_0<v_1\wedge\mathrm{Lim}_\alpha\|v_0/v_1\|)].$$

(5) $\mathrm{End}_\alpha^{n+1}$(读作 **$\alpha$-终端数为 $n+1$**,其中 $n<\omega$)是下列句子:

$$\exists^{n+1}v_0\mathrm{Lim}_\alpha(v_0)\vee\exists v_0[\mathrm{Las}_{\alpha+1}(v_0)\wedge\exists^n v_1(v_0<v_1\wedge\mathrm{Lim}_\alpha\|v_0/v_1\|)].$$

其中$\exists^n x\varphi$是表述“恰好有 n 个 x 使得 φ 成立”的公式.

12.3.2定义 (1) Den_0^{∞}是$\mathscr{L}_{\omega\omega}$的任意句子使得对任意结构$\mathfrak{A}=\langle A,<\rangle$，$\mathfrak{A}\models\mathrm{Den}_0^{\infty}\Leftrightarrow$

$\mathfrak{A}\cong\langle\omega,\in\upharpoonright\omega\rangle$或对某个$a\in A$，$\langle\omega,\in\upharpoonright\omega\rangle$同构于由集合$\{b:b<a\}$确定的$\mathfrak{A}$的子结构.（换句话说，$\langle\omega,\in\upharpoonright\omega\rangle$同构于$\mathfrak{A}$或$\mathfrak{A}$的一$<$-初始节.）

(2) $\mathrm{Den}_\alpha^{\infty}=(\mathrm{Den}_0^{\infty})^{\mathrm{Lim}_\alpha\|v_0/x\|}$，

其中$(\mathrm{Den}_0^{\infty})^{\mathrm{Lim}_\alpha\|v_0/x\|}$是用

$$\forall x(\mathrm{Lim}_\alpha\|v_0/x\|\to\psi),\quad \exists x(\mathrm{Lim}_\alpha\|v_0/x\|\wedge\psi)$$

分别置换Den_0^{∞}中形如$\forall x\psi$和$\exists x\psi$的子公式得到的相对化公式.

(3) $\mathrm{Den}_\alpha^{n+1}$（读作**$\alpha$-导出数为$n+1$**，$n<\omega$）是句子：

$$\exists^{n+1}v_0\mathrm{Lim}_\alpha(v_0).$$

此外，为了方便，我们还令$\mathrm{Den}_\alpha^0=\mathrm{End}_\alpha^{-1}$.

任给线序结构$\mathfrak{A}=\langle A,<\rangle$，令

$\mathrm{Lm}_\alpha(\mathfrak{A})=\{b\in A:\mathfrak{A}\models\mathrm{Lim}_\alpha[b]\}$，

$\mathrm{Ls}_\alpha(\mathfrak{A})$是唯一的元素$b\in A$使得$\mathfrak{A}\models\mathrm{Las}_\alpha[b]$，若存在这样的元素；否则$\mathrm{Ls}_\alpha(\mathfrak{A})$无定义，

$\mathrm{Ed}_\alpha(\mathfrak{A})$是唯一的$s\in\{-1\}\cup\omega$使得$\mathfrak{A}\models\mathrm{End}_\alpha^s$，若存在这样唯一的$s$；否则$\mathrm{Ed}_\alpha(\mathfrak{A})$无定义，

$\mathrm{Dn}_\alpha(\mathfrak{A})$是唯一的$s\in\omega\cup\{\infty\}$使得$\mathfrak{A}\models\mathrm{Den}_\alpha^s$，若存在这样唯一的$s$；否则$\mathrm{Dn}_\alpha(\mathfrak{A})$无定义.

若δ是序数，我们在下面不致混淆之处用δ表示$\langle\delta,\in\upharpoonright\delta\rangle$.

据上述定义易得下列引理：

12.3.3引理 若δ,α,γ是序数，则

(1) $\mathrm{Dn}_\alpha(\delta)=0\Leftrightarrow\delta\leqslant\omega^\alpha$.

(2) $\mathrm{Dn}_\alpha(\delta)=0$且对所有$\beta<\alpha$，$\mathrm{Ed}_\beta(\delta)=0\Leftrightarrow\delta=\omega^\alpha$.

(3) $\mathrm{Dn}_\alpha(\delta)=n+1\Leftrightarrow$对某个$\beta$，$0<\beta<\omega^\alpha$，

$$\delta=\omega^\alpha\cdot(n+1)+\beta.$$

(4) $\mathrm{Dn}_\alpha(\delta)=\infty\Leftrightarrow\omega^{\alpha+1}\leqslant\delta$.

(5) $\mathrm{Ed}_\alpha(\delta)=0 \Leftrightarrow$ 对所有 $\beta\leqslant\alpha, \mathrm{Ed}_\beta(\delta)=0$.

(6) $\mathrm{Ed}_\alpha(\delta)=0 \Rightarrow \mathrm{Dn}_\alpha(\delta)=\infty$.

(7) 若 $\delta=\omega^\alpha\cdot\eta_0+\eta_1$，$\gamma=\omega^\alpha\cdot\eta_2+\eta_1$，其中 $\eta_0,\eta_2>0$且 $\eta_1<\omega^\alpha$，则对所有 $\beta<\alpha$，

$$\mathrm{Dn}_\beta(\delta)=\mathrm{Dn}_\beta(\gamma),\quad \mathrm{Ed}_\beta(\delta)=\mathrm{Ed}_\beta(\gamma).$$

(8) 对 $\delta,\gamma<\omega^\alpha$ 和所有 $\beta<\alpha, \mathrm{Ed}_\beta(\delta)=\mathrm{Ed}_\beta(\gamma) \Rightarrow \delta=\gamma$.

(9) 对 $\mathrm{Dn}_\alpha(\delta)=\mathrm{Dn}_\alpha(\gamma)\neq\infty$和所有 $\beta\leqslant\alpha$，

$$\mathrm{Ed}_\beta(\delta)=\mathrm{Ed}_\beta(\gamma) \Rightarrow \delta=\gamma. \square$$

12.3.4定义 令 f 和 g 是函数使得 $f\in(\omega\cup\{\infty\})^\alpha, g\in(\omega\cup\{-1\})^\alpha$，称$\langle f,g\rangle$是 **$\alpha$-一致序对** $\Leftrightarrow$ 对某个非零序数 δ，

$$\langle\delta,\in\restriction\delta\rangle\models\bigwedge_{\beta<\alpha}[\mathrm{Den}_\beta^{f(\beta)}\wedge\mathrm{End}_\beta^{g(\beta)}]. \tag{12.8}$$

以后我们把(12.8)中“$\models$”右边的句子记作 $\mathrm{Cp}(\langle f,g\rangle)$.

12.3.5定义 令 $\alpha<\kappa$，则**范式句集** NS_α 是下列 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$-句子集：

$$\mathrm{NS}_\alpha=\{\mathrm{Cp}(x)\text{：对某个 }\beta<\alpha,\ x\text{ 是 }\beta\text{-一致序对}\}.$$

为了确定$|\mathrm{NS}_\alpha|$，我们还需下列引理：

12.3.6引理

对每一序数 δ，存在序数 $\gamma<\omega^{\alpha+1}$使得对所有$\beta<\alpha$，

$$\mathrm{Dn}_\beta(\delta)=\mathrm{Dn}_\beta(\gamma),\quad \mathrm{Ed}_\beta(\delta)=\mathrm{Ed}_\beta(\gamma).$$

证明：据12.3.3. $\square$

本节以后固定 $\kappa>\omega$ 是正则基数.

12.3.7引理 (1) $\alpha<\kappa \Rightarrow |\mathrm{NS}_\alpha|<\kappa$.

(2) $\alpha<\kappa$ 且 $\Sigma\subseteq\mathrm{NS}_\alpha \Rightarrow \bigvee\Sigma\in\mathrm{Sent}(\mathscr{L}_{\kappa\omega})$.

证明：据 $\alpha<\kappa \Rightarrow \omega^\alpha<\kappa$ 和12.3.6. $\square$

我们知道，对每一序数 $\alpha<\kappa$，存在 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$-句子 Ord_α 使得对每一结构 $\mathfrak{A}=\langle A,<\rangle$，

$$\mathfrak{A}\models\mathrm{Ord}_\alpha \Leftrightarrow \mathfrak{A}\cong\langle\alpha,\in\restriction\alpha\rangle.$$

假设 $\mathfrak{A}=\langle A,<\rangle\in\mathscr{M}_\kappa$，用 Ord_α，我们能证明，若$|A|<\kappa$，则 $\mathfrak{A}$ 是良序结构；若$|A|\geqslant\kappa$，则 α 同构于 $\mathfrak{A}$ 或同构于 $\mathfrak{A}$ 的一个初始节.

这不仅对 $\mathfrak{A}$ 成立，也对 $\mathfrak{A}$ 的每一区间 $\mathfrak{B}$（参见12.3.8(2)）成立.

12.3.8定义 (1) 若 $\mathfrak{A}=\langle A,<\rangle, a, a_1\in A$，则

① $[*,\infty)^{\mathfrak{A}}=A$,

② $[*,a)^{\mathfrak{A}}=\{b\in A: b<a\}$,

③ $[a,a_1)^{\mathfrak{A}}=\{b\in A: b=a$ 或 $(a<b$ 且 $b<a_1)\}$,

④ $[a,\infty)^{\mathfrak{A}}=\{b\in A: b=a$ 或 $a<b\}$,

⑤ $[x,y)^{\mathfrak{A}}=$ 由集合 $[x,y)^{\mathfrak{A}}$ 确定的 $\mathfrak{A}$ 的子结构，

若 $[x,y)^{\mathfrak{A}}\neq\varnothing$ 且 $\{x,y\}\subseteq A\cup\{*,\infty\}$.

(2) $\mathfrak{A}$ 的区间集 Int 是下列集合：

$$\{[x,y)^{\mathfrak{A}}: \{x,y\}\subseteq A\cup\{*,\infty\}\}.$$

12.3.9引理 令 $\mathfrak{A}\in\mathscr{M}_\kappa$，则

(1) $\mathrm{Int}(\mathfrak{A})\subseteq\mathscr{M}_\kappa$.

(2) 若 $|A|<\kappa$，则 $\mathfrak{A}$ 是良序结构.

(3) 若 $|A|>\kappa$，则 $\mathfrak{A}\cong\alpha$ 或 $\mathfrak{A}$ 包含同构于 α 的初始节.

证明：(1) 令 $\mathfrak{A}\in\mathscr{M}_\kappa$ 且 $\mathfrak{B}\in\mathrm{Int}(\mathfrak{A})$. 为了证明 $\mathfrak{B}\in\mathscr{M}_\kappa$，我们必须证明 $\mathfrak{B}$ 的每一非空可定义子集有首元. 因为 $\mathfrak{B}\in\mathrm{Int}(\mathfrak{A})$，所以 $\mathfrak{B}$ 的可定义子集就是 $\mathfrak{A}$ 的可定义子集，因此 $\mathfrak{B}\in\mathscr{M}_\kappa$.

(2)和(3)本质上已由12.3.8前面的说明证明. □

12.3.10引理 若 $\mathfrak{A}\in\mathscr{W}_\kappa$，则对每一 $\alpha<\kappa$，存在序数 δ 使得对每一 $\beta<\alpha$，δ 和 $\mathfrak{A}$ 恰好满足相同的、形如 End^k_β 和 Den^i_β 的句子.

证明：据12.3.6，$\sigma=\bigvee\mathrm{NS}_\alpha\in\mathrm{T}_\kappa$，所以

$$\mathfrak{A}\in\mathscr{W}_\kappa\Rightarrow\mathfrak{A}\models\sigma,$$

因此对某个 $\theta\in\mathrm{NS}_\alpha$，$\mathfrak{A}\models\theta$. 据12.3.4和12.3.5，存在一个满足本引理结论的序数 δ. □

说明：12.3.9和12.3.10提到的性质是我们以后消去量词时使用的主要工具.

12.3.11定义 $\mathscr{N}_\kappa$ 是所有有首元的线序结构 $\mathfrak{A}$ 的类使得对每一 $\mathfrak{B}\in\mathrm{Int}(\mathfrak{A})$，下列条件得到满足：

(1) 若$|B|<\kappa$,则$\mathfrak{B}$是良序结构,

(2) 若$|B|\geqslant\kappa$,则$\kappa\cong\mathfrak{B}$或κ同构于$\mathfrak{B}$的一初始节

(后面我们将用$\alpha\leqslant\mathfrak{B}$来表示(2)),

(3) 对每一$\alpha<\kappa$,存在序数δ使得对每一$\beta<\alpha$,δ和$\mathfrak{B}$满足相同的、形如End_β^k和Den_β^i的句子.

12.3.12定义

若$\mathfrak{A}=\langle A,<\rangle$,$\mathfrak{B}=\langle B,\prec\rangle$,$\vec{x}\in A^n$,$\vec{y}\in B^m$,且$n,m<\omega$,则

(1) $(\mathfrak{A},\vec{x})\equiv_0(\mathfrak{B},\vec{y})\Leftrightarrow n=m$且$\{\langle x_i,y_i\rangle:i<n\}$是从$\mathfrak{A}\upharpoonright\{x_i:i<n\}$到$\mathfrak{B}$中的同构.

(2) $(\mathfrak{A},\vec{x})\equiv_{\beta+1}(\mathfrak{B},\vec{y})\Leftrightarrow$对所有$a\in A$,存在$b\in B$使得$(\mathfrak{A},\vec{x}\,\hat{}\,\langle a\rangle)\equiv_\beta(\mathfrak{B},\vec{y}\,\hat{}\,\langle b\rangle)$且对所有$b\in B$,存在$a\in A$使得

$$(\mathfrak{A},\vec{x}\,\hat{}\,\langle a\rangle)\equiv_\beta(\mathfrak{B},\vec{y}\,\hat{}\,\langle b\rangle).$$

(3) 若$0<\eta=\bigcup\eta$,则

$(\mathfrak{A},\vec{x})\equiv_\eta(\mathfrak{B},\vec{y})\Leftrightarrow$对所有$\beta<\eta$,$(\mathfrak{A},\vec{x})\equiv_\beta(\mathfrak{B},\vec{y})$.

(4) $\mathfrak{A}\equiv_\alpha\mathfrak{B}\Leftrightarrow(\mathfrak{A},\varnothing)\equiv_\alpha(\mathfrak{B},\varnothing)$.

据第14章的14.2.4,我们有下列结果:

12.3.13推论 若$\alpha<\kappa$,$\mathfrak{A}=\langle A,<\rangle$,$\mathfrak{B}=\langle B,\prec\rangle$,$\vec{x}\in A^n$且$\vec{y}\in B^m$,则下列命题等价:

(1) $(\mathfrak{A},\vec{x})\equiv_\alpha(\mathfrak{B},\vec{y})$.

(2) 对每一$\varphi\in\mathrm{Q}_\kappa$使得$\mathrm{Fv}(\varphi)\subseteq\{v_i:i<n\}$且$\mathrm{qr}(\varphi)\leqslant\alpha$,

$$(\mathfrak{A},\vec{x})\models\varphi\Leftrightarrow(\mathfrak{B},\vec{y})\models\varphi.$$

据上述推论,若$\mathfrak{A}\equiv_\kappa\mathfrak{B}$,则$\mathfrak{A}$和$\mathfrak{B}$是$\mathrm{Q}_\kappa$(从而是$\mathscr{L}_{\infty\omega}$)-初等等价的.不难给出一个例子说明:

存在两$\mathscr{L}_{\infty\omega}$-初等等价的结构使得它们不是$\mathrm{Q}_\kappa$-初等等价的.

但是,我们将证明,相对$\mathscr{N}_\kappa$中的元素,Q_κ-初等等价和$\mathscr{L}_{\infty\omega}$-初等等价这两个概念重合.

12.3.14引理 若$\mathfrak{A}\in\mathscr{N}_\kappa$,则$\mathrm{Int}(\mathfrak{A})\subseteq\mathscr{N}_\kappa$且

(1) 若$\mathrm{Dn}_\alpha(\mathfrak{A})=0$且$\alpha<\kappa$,则对某个$\delta\leqslant\omega^\alpha$,$\mathfrak{A}\cong\delta$.

(2) 若$\mathrm{Dn}_\alpha(\mathfrak{A})=n+1$且$\alpha<\kappa$,则对某个$\delta\leqslant\omega^\alpha$,

$$\mathfrak{A}\cong\omega^{\alpha}\cdot(n+1)+\delta.$$

(3) 若 $\mathrm{Dn}_{\alpha}(\mathfrak{A})=\infty$ 且 $\alpha<\kappa$，则 $\omega^{\alpha+1}\leqslant\mathfrak{A}$.

证明：若 $\mathfrak{A}\in\mathscr{N}_{\kappa}$，则对 $\mathfrak{A}$ 的每一区间 $\mathfrak{B}$，$\alpha\leqslant\mathfrak{B}$ 或 $\mathfrak{B}$ 是良序结构，据12.3.3，就有本引理.□

12.3.15引理 若 $\mathfrak{A},\mathfrak{B}\in\mathscr{N}_{\kappa}$，$\alpha<\kappa$，$\mathrm{Dn}_{\alpha}(\mathfrak{A})=\mathrm{Dn}_{\alpha}(\mathfrak{B})\neq\infty$ 且对每一 $\beta\leqslant\alpha$，$\mathrm{Ed}_{\beta}(\mathfrak{A})=\mathrm{Ed}_{\beta}(\mathfrak{B})$，则 $\mathfrak{A}\cong\mathfrak{B}$.

证明：据12.3.3(9)和12.3.14.□

12.3.16引理

若 $\mathfrak{A}=\langle A,<\rangle\in\mathscr{N}_{\kappa}$，$\mathfrak{B}=\langle B,\prec\rangle\in\mathrm{Int}(\mathfrak{A})$ 且 $\alpha<\kappa$，则

(1) 若 $b\in\mathrm{Lm}_{\alpha}(\mathfrak{A})$，$b\in B$ 且对某个 $a\in B$，$a<b$，则

$$b\in\mathrm{Lm}_{\alpha}(\mathfrak{B}).$$

(2) 若 $\mathrm{Ed}_{\alpha}(\mathfrak{B})=0$，则对所有 $b\in B$ 和所有 $\beta\leqslant\alpha$，

$$\mathrm{Ed}_{\beta}([b,\infty)^{\mathfrak{B}})=0.$$

(3) 若 $\mathrm{Lm}_{\alpha+1}(\mathfrak{B})=\varnothing$ 且 $\mathrm{Ed}_{\alpha}(\mathfrak{B})=n+1$，则

$$\mathrm{Dn}_{\alpha}(\mathfrak{B})=n+1.$$

(4) 若 $\mathrm{Ls}_{\alpha+1}(\mathfrak{B})=b\in B$，$c\in B$ 且 $c<b$，则对所有 $\beta\leqslant\alpha$，

$$\mathrm{Ed}_{\beta}(\mathfrak{B})=\mathrm{Ed}_{\beta}([c,\infty)^{\mathfrak{B}}).$$

(5) 若 $\{b,a\}\subseteq\mathrm{Lm}_{\alpha}(\mathfrak{A})$，$b<c$ 且不存在 $a\in\mathrm{Lm}_{\alpha}(\mathfrak{B})$ 使得 $b<a<c$，则

$$[b,c)^{\mathfrak{B}}\cong\omega^{\alpha}.$$

证明：(1) $\mathscr{N}_{\kappa}$ 中所有元素都是线序结构，所以(1)显然成立.

(2) 假设 $\mathrm{Ed}_{\alpha}(\mathfrak{B})=0$，则据 $\mathrm{End}_{\alpha}^{0}$ 的定义和上述(1)，立得 $\mathrm{Ed}_{\alpha}([b,\infty)^{\mathfrak{B}})=0$. 据12.3.11(3)，对所有 $\beta\leqslant\alpha$，

$$\mathrm{Ed}_{\beta}([b,\infty)^{\mathfrak{B}})=0.$$

(3)是12.3.1(1)，(5)和12.3.2(3)的直接推论.

(4) 设 $b=\mathrm{Ls}_{\alpha+1}(\mathfrak{B})\in B$，则 b 是 $\alpha+1$-极限点，也是 $\mathfrak{B}$ 中的 $\alpha+1$-末极限点. $\mathrm{Ed}_{\alpha}(\mathfrak{B})=0$的情况由上述(2)来保证. 另一方面，因为 b 是 α-极限点，所以 $\mathrm{Ed}_{\alpha}(\mathfrak{B})\neq-1$. 据上述(1)，$\mathrm{Ed}_{\alpha}([c,\infty)^{\mathfrak{B}})\neq-1$. 因此据 $\mathrm{End}_{\alpha}^{\alpha+1}$ 的定义，有 $\mathrm{Ed}_{\beta}(\mathfrak{B})=\mathrm{Ed}_{\beta}([c,\infty)^{\mathfrak{B}})$.

(5) 据 $\mathscr{N}_\kappa$ 的定义11.3.11的(1)和(2)，$[b,c)^{\mathfrak{B}}$ 是良序结构，据序数的性质，直接可得$[b,c)^{\mathfrak{B}}\cong\omega^\alpha$. □

12.3.17引理 若 $\mathfrak{A}=\langle A,<\rangle,\mathfrak{B}=\langle B,\prec\rangle\in\mathscr{N}_\kappa,\alpha<\kappa,a=\mathrm{Ls}_{\alpha+1}(\mathfrak{A})\in A,b=\mathrm{Ls}_{\alpha+1}(\mathfrak{B})\in B$，且对所有 $\beta\leqslant\alpha+1,\mathrm{Ed}_\beta(\mathfrak{A})=\mathrm{Ed}_\beta(\mathfrak{B})$，则$[a,\infty)^{\mathfrak{A}}\cong[b,\infty)^{\mathfrak{B}}$.

证明：因为 $a=\mathrm{Ls}_{\alpha+1}(\mathfrak{A}),b=\mathrm{Ls}_{\alpha+1}(\mathfrak{B})$，所以 $\mathrm{Dn}_{\alpha+1}([a,\infty)^{\mathfrak{A}})=\mathrm{Dn}_{\alpha+1}([b,\infty)^{\mathfrak{B}})=0$. 对某些序数 $\delta_1,\delta_2\leqslant\omega^{\alpha+2}$，我们有

$$[a,\infty)^{\mathfrak{A}}\cong\delta_1,\quad [b,\infty)^{\mathfrak{B}}\cong\delta_2.$$

令 $\omega^{\gamma_0}\cdot n_0+\cdots+\omega^{\gamma_k}\cdot n_k$ 和 $\omega^{\tau_0}\cdot m_0+\cdots+\omega^{\tau_s}\cdot m_s$ 分别是 δ_1 和 δ_2 的Cantor-范式，因为对所有 $\beta\leqslant\alpha+1,\mathrm{Ed}_\beta(\mathfrak{A})=\mathrm{Ed}_\beta(\mathfrak{B})$，所以有

$$k=s\ \text{且对所有}\ i\leqslant k,\ \gamma_i=\tau_i,\ m_i=n_i,$$

因此有

$$\delta_1=\delta_2. \square$$

12.3.18定义 若 $\mathfrak{A}=\langle A,<\rangle,\mathfrak{B}=\langle B,\prec\rangle$，则

(1) $\mathfrak{A}\doteq_\alpha\mathfrak{B}\Leftrightarrow$ 对所有 $\beta\leqslant\alpha$，$\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 恰好满足相同的、形如 End_β^j 和 Den_β^k 的句子.

(2) 若 $\vec{x}\in A^n,\vec{y}\in B^n$ 且对所有 $i<n-1,x_i<x_{i+1},y_i\prec y_{i+1}$，则 $(\mathfrak{A},\vec{x})\doteq_\alpha(\mathfrak{B},\vec{y})\Leftrightarrow$

① $[*,x_0)^{\mathfrak{A}}\doteq_\alpha[*,y_0)^{\mathfrak{B}}$,

② $[x_{n-1},\infty)^{\mathfrak{A}}\doteq_\alpha[y_{n-1},\infty)^{\mathfrak{B}}$,

③ 对所有 $i<n-1,[x_i,x_{i+1})^{\mathfrak{A}}\doteq_\alpha[y_i,y_{i+1})^{\mathfrak{B}}$.

迄今我们得到的所有结果都是下列定理的预备性引理：

12.3.19定理 若 $\mathfrak{A}=\langle A,<\rangle,\mathfrak{B}=\langle B,\prec\rangle\in\mathscr{N}_\kappa,\alpha<\kappa$，且 $\mathfrak{A}\doteq_{\alpha+1}\mathfrak{B}$，则对所有 $a\in A$，存在 $b\in B$ 使得

$$[*,a)^{\mathfrak{A}}\doteq_\alpha[*,b)^{\mathfrak{B}},\quad [a,\infty)^{\mathfrak{A}}\doteq_\alpha[b,\infty)^{\mathfrak{B}}.$$

证明：分情况考虑：

情况1 对某个 $\beta\leqslant\alpha+1,\mathrm{Dn}_\beta(\mathfrak{A})\neq\infty$：

据12.3.15，易证本定理在情况1的条件下成立. 因此下面只须证本定理在下列条件1下成立：

条件1　$\mathrm{Dn}_{\alpha+1}(\mathfrak{A})=\infty$.

据12.3.14，有

$$\omega^{\alpha+2}\leqslant\mathfrak{A},\quad \omega^{\alpha+2}\leqslant\mathfrak{B}. \tag{12.9}$$

情况2　$\mathrm{Ed}_{\alpha+1}(\mathfrak{B})=-1$：

据条件1，这种情况不会出现，因为若 $\mathrm{Ed}_{\alpha+1}(\mathfrak{B})=-1$，则 $\mathfrak{B}\models\mathrm{End}_{\alpha+1}^{-1}$. 据 $\mathfrak{A}\doteq_{\alpha+1}\mathfrak{B}$，则 $\mathfrak{A}\models\mathrm{End}_{\alpha+1}^{-1}$，即 $\mathfrak{A}\models\mathrm{Den}_{\alpha+1}^{0}$，所以$\mathrm{Dn}_{\alpha+1}(\mathfrak{A})=0$，与条件1矛盾.

情况3　$\mathrm{Ed}_{\alpha+1}(\mathfrak{A})=0$：

据12.3.6和12.3.11(3)，令 $\delta<\omega^{\alpha+2}$是序数使得$[*,a)^{\mathfrak{A}}\doteq_{\alpha}\delta$. 选择 $b\in B$ 使得$[*,b)^{\mathfrak{B}}\cong\delta$.（**注意**：据(12.9)，这样的元素存在.）据12.3.16，就完成本定理在情况3的证明.

情况4　$\mathrm{Ed}_{\alpha+1}(\mathfrak{A})=n+1$，且 $\mathrm{Lm}_{\alpha+2}(\mathfrak{A})=\varnothing$：

据条件1，这种情况不会出现.

情况5　$\mathrm{Ed}_{\alpha+1}(\mathfrak{A})=n+1$，且 $\mathrm{Lm}_{\alpha+2}(\mathfrak{B})=\varnothing$：

据条件1，这种情况也不会出现.

据情况1—5，我们进一步考虑下列条件：

条件2　$\mathrm{Ed}_{\alpha+1}(\mathfrak{A})=n+1$，且

$$\mathrm{Ls}_{\alpha+2}(\mathfrak{A})=a_0\in A,\quad \mathrm{Ls}_{\alpha+2}(\mathfrak{B})=b_0\in B.$$

情况6　$a_0<a$ 或 $a_0=a$：

考虑$[a_0,\infty)^{\mathfrak{A}}$ 和$[b_0,\infty)^{\mathfrak{B}}$，据12.3.17，有

$$[a_0,\infty)^{\mathfrak{A}}\cong[b_0,\infty)^{\mathfrak{B}}.$$

在同构映射下，选择对应 a 的元素 b.

据情况6，我们再进一步考虑下列条件：

条件3　$a<a_0$.

据上述诸条件和12.3.16(4)，我们有

$$\beta\leqslant\alpha+1\Rightarrow\mathrm{Ed}_\beta(\mathfrak{A})=\mathrm{Ed}_\beta([a,\infty)^{\mathfrak{A}})=\mathrm{Ed}_\beta(\mathfrak{B}). \tag{12.10}$$

情况7　对某个 $\beta\leqslant\alpha+1$，$\mathrm{Dn}_\beta([*,a)^{\mathfrak{A}})\neq\infty$：

令 δ 是最小的 β 使得 $\mathrm{Dn}_\beta([*,a)^{\mathfrak{A}})=m\neq\infty$，据12.3.14，对

某个 $\delta<\omega^{\delta}$，$[*,a)^{\mathfrak{A}}\cong\omega^{\delta}\cdot m+\gamma$. 据(12.9)，$\omega^{\alpha+2}\leqslant[a,\infty)^{\mathfrak{A}}$，因此对所有 $\beta\leqslant\alpha$，$\mathrm{Dn}_{\beta}([a,\infty)^{\mathfrak{A}})=\infty$. 若我们选择 $b\in B$ 使得

$$[*,b)^{\mathfrak{B}}\cong\omega^{\delta}\cdot m+\gamma<\omega^{\alpha+2},$$

则 $$\beta\leqslant\alpha\Rightarrow\mathrm{Dn}_{\beta}([b,\infty)^{\mathfrak{B}})=\infty.$$

据(12.10)，就完成本定理在情况7下的证明.

对剩下的情况，我们补充新的条件：

条件4 $\mathrm{Dn}_{\alpha+1}([*,a)^{\mathfrak{A}})=\infty$.

从上述诸条件，我们有

$\omega^{\alpha+2}\leqslant[*,a)^{\mathfrak{A}}$，且对所有 $\beta\leqslant\alpha$，$\mathrm{Dn}_{\beta}([*,a)^{\mathfrak{A}})=\infty$.

情况8 $\mathrm{Dn}_{\alpha}([a,\infty)^{\mathfrak{A}})=n$：

据条件3，这种情况不会出现.

情况9 $\mathrm{Dn}_{\alpha}([a,\infty)^{\mathfrak{A}})=\infty$：

令 $\delta<\omega^{\alpha+2}$使得 $\delta\doteq_{\alpha+1}[*,a)^{\mathfrak{A}}$. 不妨选择 $b\in B$ 使得$[*,b)^{\mathfrak{A}}\cong\delta$. 据(12.9)，$b$ 必然在 b_0前面(即 $b<b_0$)，因此据12.3.16(4)，对所有 $\beta\leqslant\alpha$，

$$\mathrm{Ed}_{\beta}([b,\infty)^{\mathfrak{B}})=\mathrm{Ed}_{\beta}(\mathfrak{B})=\mathrm{Ed}_{\beta}(\mathfrak{A})=\mathrm{Ed}_{\beta}([a,\infty)^{\mathfrak{A}}),$$

$$\mathrm{Dn}_{\beta}([b,\infty)^{\mathfrak{B}})=\infty.$$

至此完成对本定理的全部证明. □

12.3.20引理 若 $\mathfrak{A},\mathfrak{B}\in\mathscr{N}_{\kappa}$，$\eta$ 是非零极限序数且 $\mathfrak{A}\doteq_{\eta}\mathfrak{B}$，则对所有 $\alpha<\eta$，$\mathfrak{A}\doteq_{\alpha}\mathfrak{B}$.

证明：直接从12.3.18推得. □

现在我们得到预期的第一个结果：

12.3.21定理 若 $\mathfrak{A}=\langle A,<\rangle$，$\mathfrak{B}=\langle B,<\rangle\in\mathscr{N}_{\kappa}$，$\alpha<\kappa$，$\vec{x}\in A^{n}$，$\vec{y}\in B^{n}$ 且$(\mathfrak{A},\vec{x})\doteq_{\alpha}(\mathfrak{B},\vec{y})$，则

$$(\mathfrak{A},\vec{x})\equiv_{\alpha}(\mathfrak{B},\vec{y}).$$

证明：本证明的主要困难已在证明12.3.20和12.3.19时完成，剩下的只是对 α 施简单的归纳证明，因此我们在此省略，请见Ehrenfeucht的[1961]. □

12.3.22推论 若$\mathfrak{A},\mathfrak{B}\in\mathscr{N}_\kappa$，则下列命题等价：

(1) $\mathfrak{A}$ 与 $\mathfrak{B}$ 是 Q_κ-初等等价的.

(2) $\mathfrak{A}\equiv_{\kappa\omega}\mathfrak{B}$.

(3) 对所有 $\alpha<\kappa$，

$$\mathrm{Dn}_\alpha(\mathfrak{A})=\mathrm{Dn}_\alpha(\mathfrak{B}),\quad \mathrm{Ed}_\alpha(\mathfrak{A})=\mathrm{Ed}_\alpha(\mathfrak{B}).$$

证明：因为$\mathscr{L}_{\kappa\omega}$的每一句子在"$\kappa>\omega$ 是正则基数"的假设下是 Q_κ 的句子，所以(1) ⇒ (2). 因为Den^i_α 和 End^k_α 都是$\mathscr{L}_{\kappa\omega}$的句子，所以(2) ⇒ (3). 而据12.3.21和12.3.13，易得(3) ⇒ (1). □

12.3.23推论 (1) 若$\beta\geqslant\kappa$，且γ是序型为$\beta+\beta\cdot\omega^*$的线序结构，则β和γ是Q_κ-初等等价的.

(2) $\mathscr{W}\neq\mathscr{W}_\kappa^{Q}$.

证明：(1) 显然对所有 $\alpha<\kappa$，

$$\mathrm{Dn}_\alpha(\beta)=\infty=\mathrm{Dn}_\alpha(\gamma),\quad \mathrm{Ed}_\alpha(\beta)=\mathrm{Ed}_\alpha(\gamma).$$

因为γ还满足11.3.11的(1)和(2)，所以$\gamma\in\mathscr{N}_\kappa$，因此据12.3.22，$\beta$和$\gamma$是$Q_\kappa$-初等等价的.

(2)是(1)的直接推论，因为γ不是良序结构. □

下列定理是对12.3.23(1)的改善，也是12.2.5的一个变种，首先由 Karp 在其[1965]得到.

12.3.24定理 令γ是序数使得对所有$\alpha<\gamma$，$\omega^\alpha<\gamma$，对每一序数$\beta\geqslant\gamma$，令$\mathfrak{A}$是任意序型为$\beta+\beta\cdot\omega^*$的线序结构，则对$\bigcup\{\mathscr{L}_{\kappa\omega}:\kappa\in\mathbf{RC}\}$中每一句子$\sigma$使得$\mathrm{qr}(\sigma)<\gamma$，

$$\langle\beta,\in\restriction\beta\rangle\models\sigma\Leftrightarrow\mathfrak{A}\models\sigma.\ \square$$

12.3.25定理 对Q_κ的每一句子σ，存在集合$\Sigma\subseteq\mathrm{NS}_\kappa$使得$\bigvee\Sigma$是$\mathscr{L}_{\kappa\omega}$的句子且$\mathscr{N}_\kappa\models\sigma\leftrightarrow\bigvee\Sigma$.

证明：假设σ是Q_κ的句子使得$\mathrm{qr}(\sigma)=\alpha<\kappa$，我们令$\mathscr{H}=\{\mathfrak{A}:\mathfrak{A}\in\mathscr{N}_\kappa$ 且 $\mathfrak{A}\models\sigma\}$，$\Sigma=\{\theta:\theta\in\mathrm{NS}_{\alpha+1}$且对某个$\mathfrak{B}\in\mathscr{H}$，$\mathfrak{B}\models\theta\}$. 据12.3.7，有$|\Sigma|<\kappa$且$\bigvee\Sigma$是$\mathscr{L}_{\kappa\omega}$的句子，因此下面只须证：

$$\mathfrak{A}\in\mathscr{N}_\kappa\Rightarrow(\mathfrak{A}\models\sigma\Leftrightarrow\mathfrak{A}\models\bigvee\Sigma).$$

假设 $\mathfrak{A}\in\mathscr{N}_\kappa$，若 $\mathfrak{A}\models\sigma$，则 $\mathfrak{A}\in\mathscr{H}$，据12.3.11(3)，$\mathfrak{A}\models\bigvee\Sigma$. 反之，设 $\mathfrak{A}\models\bigvee\Sigma$. 则对某个 $\psi\in\Sigma\subseteq NS_{\alpha+1}$，$\mathfrak{A}\models\psi$. 据12.3.5和12.3.18，对某个 $\mathfrak{B}\in\mathscr{H}\subseteq\mathscr{N}_\kappa$，$\mathfrak{A}\doteq_\alpha\mathfrak{B}$. 因为 $\mathfrak{B}\in\mathscr{H}$，所以 $\mathfrak{B}\models\sigma$，又因为 $qr(\sigma)=\alpha<\kappa$，所以据12.3.21和12.3.12，$\mathfrak{A}\models\sigma$. □

12.3.26定理 (1) $\mathscr{W}\neq\mathscr{W}_\kappa^Q=\mathscr{W}_\kappa=\mathscr{N}_\kappa$.

(2) $\mathscr{N}_\kappa=\mathscr{M}_\kappa$.

(3) $\mathscr{M}_\kappa=\mathscr{M}_\kappa^Q$.

(4) $\mathscr{W}\neq\mathscr{M}_\kappa^Q$.

证明：(1) 据12.3.12，$\mathscr{W}\neq\mathscr{W}_\kappa^Q$. 据有关定义和12.3.9和12.3.10，有 $\mathscr{W}_\kappa^Q\subseteq\mathscr{W}_\kappa\subseteq\mathscr{N}_\kappa$. 因此下面只须证：

$$\mathfrak{A}\in\mathscr{N}_\kappa\Rightarrow\mathfrak{A}\in\mathscr{W}_\kappa^Q.$$

假设 $\mathfrak{A}\in\mathscr{N}_\kappa$，$\sigma$ 是 Q_κ 的句子，$\mathscr{W}\models\sigma$ 且 $qr(\sigma)=\alpha<\kappa$，下证 $\mathfrak{A}\models\sigma$. 因为 $\mathfrak{A}\in\mathscr{N}_\kappa$ 且 $\alpha<\kappa$，所以据11.3.11(3)和12.3.18，存在序数 δ 使得

$$\mathfrak{A}\doteq_\alpha\delta. \tag{12.11}$$

因为 $qr(\sigma)=\alpha$，所以据(12.11)，12.3.21和12.3.13，有

$$\mathfrak{A}\models\sigma\Leftrightarrow\delta\models\sigma.$$

因为 $\mathscr{W}\models\sigma$ 且 $\delta\in\mathscr{W}$，所以 $\delta\models\sigma$. 因此 $\mathfrak{A}\models\sigma$.

(2) 因为 $\mathscr{N}_\kappa=\mathscr{W}_\kappa\subseteq\mathscr{M}_\kappa$，所以只须证 $\mathscr{M}_\kappa\subseteq\mathscr{N}_\kappa$. 据12.3.9，只须证，对所有 $\mathfrak{A}\in\mathscr{M}_\kappa$ 和所有 $\alpha<\kappa$，$\mathfrak{A}\models\bigvee NS_\alpha$. 这样，证明 $\mathscr{N}_\kappa\supseteq\mathscr{M}_\kappa$ 的问题就化归为证明：

在所有的良序结构中真的 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$-句子是 D_κ 的语义后承.

而对此的证明是例行公事，所以我们把它留给读者去补充.

(3) 因为 $\mathscr{M}_\kappa\supseteq\mathscr{M}_\kappa^Q\supseteq\mathscr{W}_\kappa^Q=\mathscr{N}_\kappa$，但据(2)，$\mathscr{M}_\kappa=\mathscr{N}_\kappa$，所以

$$\mathscr{M}_\kappa=\mathscr{M}_\kappa^Q.$$

(4) 这样我们最终证明了：

$$\mathscr{W}\neq\mathscr{W}_\kappa^Q=\mathscr{W}_\kappa=\mathscr{N}_\kappa=\mathscr{M}_\kappa=\mathscr{M}_\kappa^Q. \square$$

练　习

12.3.27　证明引理12.3.3.

12.3.28　补充定理12.3.26(2)的证明的细节.

§4　可定义的良序

从前面§1—2的结果，我们已知 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$不能刻画良序概念. 但是，如果我们把良序概念相对化，比方说，考虑一定序型的所有良序结构，则用适当的有穷量词语言还是可以刻画这样的良序概念的. 例如，$\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$就能刻画所有的可数良序结构. 1.2.4说明 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$也能刻画所有序型小于某个序数的良序结构. 下面的12.4.1也说明了这一点.

人们经过更深入的研究发现，紧致性（包括 Barwise-紧致性）与良序的可刻画性之间有很密切的关系. 例如，普通（可数）紧致性蕴涵无穷良序结构的类是不可刻画的. 但另一方面，$\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$不是可数紧致的，但它能刻画所有可数良序结构的类.

本节的第1—2小节，我们主要在 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$的可容片段 $\mathscr{L}_{\mathfrak{A}}$ 中研究可定义良序，因为在这样的场合，我们有 Barwise-紧致性定理和其它强有力的成果. 在第3小节，我们还要考虑一般的无穷语言的相对可定义良序.

一、可数可容片段中的可定义良序

12.4.1例　施归纳于 α 定义 $\theta_\alpha(x)$如下：

$$\theta_0(x)=\forall y\neg(y<x),$$

$$\theta_\alpha(x)=\forall y[y<x\leftrightarrow\bigvee_{\beta<\alpha}\theta_\beta(y/x)].$$

令 $\mathfrak{A}=\langle A,<\rangle$是线序结构，施归纳易证，若 $\mathfrak{A}\vDash\theta_\alpha[\bar{x}]$，则$\{\bar{y}\in A:\bar{y}<\bar{x}\}$被良序且有序型 α，因此

$$\mathfrak{A} \models \forall x \bigvee_{\beta<\alpha} \theta_\beta(x) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \text{ 被良序且有序型} \leqslant \alpha.$$

所以，若令 $\sigma_\alpha = \forall x \bigvee_{\beta<\alpha} \theta_\beta(x) \wedge \bigwedge_{\beta<\alpha} \exists x \theta_\beta(x)$，则

$$\mathfrak{A} \models \sigma_\alpha \Leftrightarrow \mathfrak{A} \text{ 有恰好为 } \alpha \text{ 的序型}. \square$$

因为12.4.1中的公式是通过施归纳于 α 来定义的，所以该定义在 KPU 中可以表述为一个 Σ-递归定义. 因此，若 α 在可容集 $\mathfrak{M}$ 中，只要符号 $<$ 在 $\mathscr{L}$ 和 $\mathfrak{M}$ 中，则 $\theta_\alpha(x), \sigma_\alpha \in \mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$.

在下面的定义中，我们用适当的术语揭示(Barwise-)紧致性和良序的可刻画性之间的确切关系.

12.4.2定义 令 $\mathscr{L} \supseteq \{<\}$，$\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$ 的可容片段，

(1) 称包含 $<$ 的 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$-句子 $\sigma(<)$ **制约**(pin down)**序数** $\alpha \Leftrightarrow$

① $\mathfrak{A} \models \sigma \Rightarrow <^{\mathfrak{A}}$ 是 field$(<^{\mathfrak{A}})$上的良序，且

② σ 有模型 $\mathfrak{B}$ 使得 $<^{\mathfrak{B}}$ 的序型为 α.

(2) 称 α 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$-**可达序数** $\Leftrightarrow$ 存在制约 α 的 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$-句子 σ.

(3) 称包含 $<$ 的 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$-理论 $T(<)$ **制约序数** $\alpha \Leftrightarrow \bigwedge T$ 制约 α.

12.4.1说明可容集 $\mathfrak{M}$ 中每一序数都能由 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的一个句子制约；事实上

$$(\text{“}<\text{是线序”}) \wedge \sigma_\alpha$$

只有序型为 α 的模型. 对可数可容片段，正如下面的定理证明的那样，没有别的序数能被制约.

注意：若 $\theta(\prec)$ 制约 α，则可以如下定义制约所有 $\leqslant\alpha$ 的序数的句子 $\psi(\prec, <, F)$：

$$\psi(\prec, <, F) = \theta(\prec) \wedge \text{“}F \text{ 是从} < \text{到} \prec \text{中的保序映射”}.$$

因此我们总能用制约 ON 的一个初始节的句子来工作. 在下面12.4.4的证明中，我们就用到这一点.

12.4.3定义 称 $\mathfrak{B}$ 是 $\mathfrak{A}$ **的良建部分**，记作 WF$(\mathfrak{A})$，$\Leftrightarrow \mathfrak{B}$ 是最大的良建结构使得 $\mathfrak{B} \subseteq_{\text{end}} \mathfrak{A}$.

12.4.4定理(Barwise, [1969]) 令 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$ 的可数可容片段，$\sigma(\prec)$是制约序数的句子，则在可容集 $\mathfrak{M}$ 中存在序数 α 使得由

σ 制约的每一序数小于 α.

证明:假设相反,则对每一 $\alpha\in\mathfrak{M}$,$\sigma(\prec)$有模型 $\mathfrak{B}$ 使得$\prec^{\mathfrak{B}}$有序型 α. 下证 $\sigma(\prec)$有模型 $\mathfrak{B}$ 使得$\prec^{\mathfrak{B}}$不被良序. 分情况考虑:

情况1　$o(\mathfrak{M})=\omega$:若 $\mathfrak{M}=\mathbf{HF}_{\mathfrak{M}}$,则 $\sigma(\prec)$是有穷句,据普通紧致性定理就能证明本定理. 但即使 $\mathfrak{M}\neq\mathbf{HF}_{\mathfrak{M}}$,证明也能通过:令$<,c_1,c_2,\cdots$,是 $\mathfrak{M}$ 的纯部中的新符号,$T=\{c_{n+1}<c_n:n<\omega\}$. 令

$$\theta=\sigma(\prec)\wedge\text{“}F\text{ 是从}<\text{到}\prec\text{中的保序映射”}.$$

只须证 $T\cup\{\theta\}$有模型. 因为 T 是诸纯集的集合且 $o(\mathfrak{M})=\omega$,据4.3.14,只须证 θ 与 T 的每一有穷子集有模型,而这是显然的.

情况2　$o(\mathfrak{M})>\omega$:对情况2的证明的基本思想与情况1相同. 令 $a_0=\mathrm{TC}(\sigma)$,不妨假设 $\mathfrak{M}$ 是最小的可容集使得 a_0是它的元素. 给 $\mathscr{L}$ 增加下列新符号:

二元关系符号$\in$,　一元关系符号 U,S,B,

函数符号 F,　个体常元 c,　个体常元集$\{\bar{x}:x\in\mathfrak{M}\}$.

(其中 U,S,B 分别表示始元、集合和 B 的元素.)

令理论 T 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的下列句子集:

(0) “U,S,B 不相交且它们的并是整个个体域”,

(1) σ^B,即 $\sigma(\prec)$对 B 的相对化公式,

(2) 用 $U,S,\in$ 表述的 **KPU**,

(3) $\mathfrak{M}$ 的图象,

(4) $\forall x[x\in\bar{a}\to\bigvee\{x\equiv\bar{b}:b\in a\}]$,　对每一 $a\in\mathfrak{M}$,

(5) “$\bar{\beta}\in c\wedge c$ 是序数”,　对每一 $\beta<o(\mathfrak{M})$,

(6) $\forall x[x\leqslant c\to\bigvee\{\neg\theta^{L(a_0,x)}:\theta\in\mathbf{KPU}\}]$,

(7) “F 把 c 的$\in$-前趋集射入$\prec$: $x\in y\Rightarrow F(x)\prec F(y)$”.

显然,T 是 $\mathfrak{M}$ 上的 Σ_1(事实上是 Δ_0)-理论,所以我们能用 Barwise-紧致性定理. 假设 $T_0\subseteq T$,$T_0\in\mathfrak{M}$,则 T_0将有形如$(\mathfrak{M},\beta,\mathfrak{B},f)$的模型,其中 $\beta\in\mathfrak{M}$,f 是对 F 的解释,它把 β 中的序数映射入$\prec^{\mathfrak{B}}$,且 $\mathfrak{B}\models\sigma$. 据 Barwise-紧致性定理,令$(\mathfrak{N},c,\mathfrak{B},f)$是 T 的模型. 据(1),$\mathfrak{B}\models\sigma$,据(2)—(5),$\mathfrak{M}\subseteq_{\mathrm{end}}\mathfrak{N}$,但据(6),$c^{\mathfrak{N}}$ 不在 $\mathfrak{N}$ 的良

建部分中.因此据(7),$<^{\mathfrak{B}}$ 不是良序.□

注意:12.4.4是对 López-Escobar 的[1966]和 Morley 的[1965]的结果的提炼.也可参见 Barwise-Kunen 的[1971].

12.4.5推论 令 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$的可数可容片段,$T$ 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的制约序数的 Σ_1-理论,则存在 $\alpha<o(\mathfrak{M})$使得每一被 T 制约的序数小于 α.

证明:假设结论不成立,则据12.4.3,对每一 $T_0\subseteq T$,其中 $T_0\in\mathfrak{M}$,$T_0\cup\{c_{n+1}<c_n:n<\omega\}$有模型,因此据 Barwise-紧致性定理,$T\cup\{c_{n+1}<c_n:n<\omega\}$也有模型.□

说明:我们可以用12.4.5来证明 Fridman 关于集合论 $T\supseteq$**KP** 模型的一个一般形式.

注意:若<是线序,则据12.4.3,WF(<)是<的最大的良序初始节.所以我们可以不致混乱地把 WF(<)等同于一个序数.下面的定理是对 Friedman 在其[1973]的一个结果的概括.

12.4.6定理(Barwise,[1975]) 令语言 $\mathscr{L}$ 包含<,$\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$的可数可容片段,$\alpha=o(\mathfrak{M})$,$T$ 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的 Σ_1-理论使得

(1) $T\models$"<是线序",

(2) 对每一 $\beta<\alpha$,T 有模型 $\mathfrak{A}$ 使得

$$\mathrm{WF}(<^{\mathfrak{A}})\geqslant\beta.$$

则 T 有模型 $\mathfrak{B}$ 使得 $\mathrm{WF}(<^{\mathfrak{B}})=\alpha$.

证明:据 Barwise-紧致性定理,$T\cup\{\exists x\theta_\beta(x):\beta<\alpha\}$有模型,其中 θ_β 如12.4.1所规定,所以不妨假设$\{\exists x\theta_\beta(x):\beta<\alpha\}$实际在 T 中.这就确保 T 的任何模型 $\mathfrak{A}$ 有 $\mathrm{WF}(<^{\mathfrak{A}})\geqslant\alpha$.据12.4.5,$T$ 也有模型 $\mathfrak{A}$ 使得$<^{\mathfrak{A}}$ 不被良序.令 T_1是理论 $T\cup\{d_{n+1}<d_n:n<\omega\}$,其中$\{d_n:n<\omega\}$是新个体常元集.显然,$T_1$有模型.令 $\mathscr{L}'=\mathscr{L}\cup\{d_n:n<\omega\}$,$\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}'$ 是相应的可容片段,Φ 是该语言的公式集使得其中至多有有穷多个 d_n 出现.因此 T_1是 Φ 的一理论.我们要用关于 Φ 的省略型定理来找 T_1和下列句子的模型$(\mathfrak{A}_1,\vec{d}_n,\cdots)$:

$$\forall v[\text{“}v\notin \mathrm{Field}(<)\text{”}\vee \bigvee_{\beta<\alpha}\theta_\beta(v)\vee \bigvee_{m<\omega}(d_m<v)],$$

其中“$v\notin \mathrm{Field}(<)$”表示$\forall x[\neg(v<x)\wedge\neg(x<v)]$. 这样的 $\mathfrak{A}_1$必有 $\mathrm{WF}(<^{\mathfrak{A}_1})=\alpha$. 假设不存在这样的模型,因为$T_1$有模型,所以根据关于 Φ 的省略型定理(4.3.19),存在 $\phi(v,\vec{d}_n)\in\Phi$ 使得 $T_1\cup\{\exists v\phi(v,\vec{d}_n)\}$有模型且下列句子都是$T_1$的定理:

① $\forall v[\phi(v,\vec{d}_n)\to v\in \mathrm{Field}(<)]$,

② $\forall v[\phi(v,\vec{d}_n)\to\neg\theta_\beta(v)]$,

③ $\forall v[\phi(v,\vec{d}_n)\to v\leqslant d_m]$, 对所有 $m<\omega$.

注意:据③,$T\cup\{\exists v[\phi(v,\vec{d}_n)\wedge v<d_n<\cdots<d_1]\}$有模型. 令 c 是新个体常元符号,$T_2=T\cup\{\phi(c,\vec{d}_n)\wedge c<d_n<\cdots<d_1\}$,因为$T\subsetneq T_1$,所以$T_2$有模型. 下证

对 T_2的每一模型 $\mathfrak{A}$, $c^{\mathfrak{A}}$ 的$<^{\mathfrak{A}}$-前趋集被良序. (12.12)

假设(12.12)不成立,则存在小于 $c^{\mathfrak{A}}$ 的元素的一个递降序列,把该序列的元素写作 $d_{n+1}>\cdots$,就有

$$d_1>\cdots>d_n>c^{\mathfrak{A}}>d_{n+1}>\cdots>\cdots$$

使得$(\mathfrak{A},\vec{d}_n,\cdots)\models T_1$. 显然,$c^{\mathfrak{A}}$ 使得③在 $\mathfrak{A}$ 中不成立,矛盾,因此(12.12)成立.

据(12.12)和12.4.5,我们有

存在 $\gamma<\alpha$ 使得 $T_2\models\bigvee\{\theta_\beta(c):\beta<\gamma\}$.

(因为我们可以考虑关于$<$的理论 $T_3=T_2\cup\{\text{“}<=<\restriction(c\text{ 的前趋集})\text{”}\}$,且运用12.4.5于 T_3.)据 T_2的构造,我们有

$$T\models\phi(c,\vec{d}_n)\wedge c<d_n<\cdots<d_1\to\bigvee\{\theta_\beta(c):\beta<\gamma\},$$

因此,$T_1\models\phi(c,\vec{d}_n)\to\bigvee\{\theta_\beta(c):\beta<\gamma\}$,而这与②矛盾. □

12.4.7反例 令 $\mathfrak{M}$ 是可容集,

(1) 若 $\mathfrak{M}$ 是自我定义的,则存在 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的一个 Σ_1-理论 $T(<)$ 使得 $T(<)$制约的序数大于 $\mathfrak{M}$ 中的序数.

(2) 若 $\mathfrak{M}$ 是强自我定义的,则存在 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的一个句子 $\sigma(<)$使得 $\sigma(<)$制约的序数大于 $\mathfrak{M}$ 中的序数.

证明：在此只证(1)，因为(2)的证明也类似. 令 T_0是自我定义 $\mathfrak{M}$ 的理论，$T=T_0\cup\{$“$<=\in\upharpoonright \mathbf{ON}$”$\}$，则 T 的每一模型 $\mathfrak{A}$ 有$<^{\mathfrak{A}}$ 使得$<^{\mathfrak{A}}$ 的序型为 $o(\mathfrak{M})$. □

这样，自我定义的可容集证明，前面的定理不能概括到一般情况. 例如，当 $\mathfrak{M}=\mathbf{H}(\aleph_1)$时，这些定理不成立.

二、任意可容片段的可定义良序

本小节我们考虑任意(不可数)可容片段的情况.

12.4.8定理 令 $T(<)$是 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$的句子集，若 T 制约序数，则存在 ξ 使得由 T 制约的所有序数都小于 ξ.

证明：不妨假设 T 有模型，否则令 $\xi=0$即可得证. 据12.4.3前的说明，我们还可以假设若 T 制约 α 且 $\beta<\alpha$，则 T 制约 β. 最后据8.1.13，假设 $T\subseteq\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$，其中 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是 Skolem-片段，且 $T_{\text{Skolem}}\subseteq T$. 下令 $C=\{c_n:0<n<\omega\}$是新个体常元集，$\mathbf{S}_n$ 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}(\vec{c}_n)$(当 $n=0$，$\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}(\vec{c}_n)=\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$)的所有超有效性质 D 的集合使得

$$T\subseteq\mathsf{D}，\text{且 } c_2<c_1,\cdots,c_n<c_{n-1}\in\mathsf{D}. \tag{12.13}$$

(对 $n=0,1$，$\mathbf{S}_n$ 的句子中没有 c_i 出现.)因为 T 有模型 $\mathfrak{A}$，所以由 $\mathfrak{A}$ 给定的超有效性质 $\mathsf{D}_{\mathfrak{A}}\in\mathbf{S}_0$，所以 $\mathbf{S}_0\neq\varnothing$. 令 $\mathbf{S}=\bigcup\{\mathbf{S}_n:0\leqslant n<\omega\}$，且定义 $\mathbf{S}$ 上的序关系$\prec$如下：

$$\mathsf{D}_1\prec\mathsf{D}\Leftrightarrow\begin{cases}\mathsf{D}\subseteq\mathsf{D}_1\text{且使得 }\mathsf{D}_1\in\mathbf{S}_n\text{ 的(唯一的)}n\text{ 大于}\\ \text{使得 }\mathsf{D}\in\mathbf{S}_m\text{ 的(唯一的)}m.\end{cases}$$

(**注意**：对 $\mathsf{D}\in\mathbf{S}$，只要看使得 $c_n\equiv c_n\in\mathsf{D}$ 的最大的 n，我们就能说出哪个 n 有性质“$\mathsf{D}\in\mathbf{S}_n$”.)下证：

$$\langle\mathbf{S},\prec\rangle\text{是良建的}. \tag{12.14}$$

设$\cdots\prec\mathsf{D}_2\prec\mathsf{D}_1\prec\mathsf{D}_0$. 令 $\mathsf{D}_\infty=\bigcup\{\mathsf{D}_n:n<\omega\}$. 据链并引理(8.1.20)，$\mathsf{D}_\infty$是超有效性质，因此据弱完全性定理(8.1.17)，存在 D_∞的模型$(\mathfrak{A},a_1,a_2,\cdots)$，其中 a_n 解释 c_n. 据(12.13)，$\mathfrak{A}\models T$，且对所有 $n<\omega$，$a_{n+1}<a_n$，这与 T 制约序数的假设矛盾，因此(12.14)得证.

用(12.14)易得 T 制约的所有序数的上界：据(12.14)，每一 $\mathsf{D}\in\mathbf{S}$ 有下列序数秩 Rank(D)，

$$\mathrm{Rank}(\mathsf{D})=\sup\{\mathrm{Rank}(\mathsf{D}_1)+1:\ \mathsf{D}_1\in\mathbf{S},\mathsf{D}_1\prec\mathsf{D}\},$$

且 $\langle\mathbf{S},\prec\rangle$ 有秩 $\xi=\sup\{\mathrm{Rank}(\mathsf{D})+1:\ \mathsf{D}\in\mathbf{S}\}$. 下证：

若 $\mathsf{D}\in\mathbf{S}_n$ 且 $(\mathfrak{A},\vec{a}_n)\models\mathsf{D}$，则当 $n>0$ 时 a_n 的 $<^{\mathfrak{A}}$-前趋集有序型 $\leqslant\mathrm{Rank}(\mathsf{D})$；若 $n=0$，则 $<^{\mathfrak{A}}$ 有序型 $\leqslant\mathrm{Rank}(\mathsf{D})$. (12.15)

证明施归纳于 Rank(D)：设 $\mathsf{D}\in\mathbf{S}_n$，$\alpha=\mathrm{Rank}(\mathsf{D})$，$(\mathfrak{A},\vec{a}_n)\models\mathsf{D}$ 且 a_n 的前趋集有序型 $>\alpha$.（$n=0$ 的情况的证明本质上相同.）令 a_{n+1} 是 $<^{\mathfrak{A}}$ 的、由 $<^{\mathfrak{A}}$ 排序的域(field)的第 α 个元素，D_1 是由 $\mathfrak{A}_1=(\mathfrak{A},\vec{a}_{n+1})$ 给定的超有效性质，则 $\mathsf{D}_1\in\mathbf{S}_{n+1}$，且 $\mathsf{D}\subseteq\mathsf{D}_1$，所以 $\mathsf{D}_1\prec\mathsf{D}$，从而 $\mathrm{Rank}(\mathsf{D}_1)<\alpha$. 但 $\mathfrak{A}_1$ 是 D_1 的模型使得 a_{n+1} 的前趋集的序型 $\alpha>\mathrm{Rank}(\mathsf{D}_1)$，这与归纳假设矛盾，所以(12.15)成立.

因为 T 的每一模型 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathsf{D}_{\mathfrak{A}}\in\mathbf{S}_0$ 的模型，且 $\mathrm{Rank}(\mathsf{D}_{\mathfrak{A}})<\xi$，所以据(12.15)，我们有

T 的每一模型 $\mathfrak{A}$ 有 $<^{\mathfrak{A}}$ 使得 $<^{\mathfrak{A}}$ 的序型小于 ξ.

这就证明了本定理. □

说明：12.4.8是 López-Escobar 在其[1966]中得到的，但他的证明是用 Hanf-数的方法，我们这里给出的证明是采用 Barwise-Kunen 在其[1971]中的证明.

没有12.4.8，我们就不能确保下面定义有意义.

12.4.9定义 令 $\mathfrak{M}$ 是可容集，

(1) 定义 $\mathbf{g}(\mathfrak{M})$ 是不能被某个可容片段 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 中某个句子 $\sigma(<)$ 制约的最小序数，

(2) 定义 $\mathbf{g}_{\Sigma}(\mathfrak{M})$ 是不能被某个可容片段 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 中某个 Σ_1-理论制约的最小序数.

12.4.10定理 令 $\mathfrak{M}$ 是可容集，

(1) $\mathbf{g}(\mathfrak{M})$ 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的诸单句制约的序数的上确界，

$\mathbf{g}_{\Sigma}(\mathfrak{M})$ 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的诸 Σ_1-理论制约的序数的上确界.

(2) $\mathbf{g}_\Sigma(\mathfrak{M}) \geqslant \mathbf{g}(\mathfrak{M}) \geqslant \mathrm{o}(\mathfrak{M})$.

(3) 若 $\mathfrak{M}$ 是可数的，则 $\mathbf{g}_\Sigma(\mathfrak{M}) = \mathbf{g}(\mathfrak{M}) = \mathrm{o}(\mathfrak{M})$.

(4) 若 $\mathfrak{M}$ 是 Σ_1-紧致的，则 $\mathbf{g}_\Sigma(\mathfrak{M}) = \mathbf{g}(\mathfrak{M})$.

证明：(1)—(2)据定义12.4.9易得.

(3) 令 $\sigma(<)$是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的句子使得对每一 $\alpha < \mathrm{o}(\mathfrak{M})$，$\sigma$ 有模型 $\mathfrak{A}$ 使得$<^{\mathfrak{A}}$ 有序型 α. 据12.4.4的证明，σ 有模型 $\mathfrak{B}$ 使得$<^{\mathfrak{B}}$ 不是良序. 因此 $\mathbf{g}(\mathfrak{M}) = \mathrm{o}(\mathfrak{M})$. 类似地可证，$\mathbf{g}_\Sigma(\mathfrak{M}) = \mathrm{o}(\mathfrak{M})$.

(4) 假设 $\mathfrak{M}$ 是 Σ_1-紧致的但 $\mathbf{g}_\Sigma(\mathfrak{M}) > \mathbf{g}(\mathfrak{M})$. 令 $T(<)$是制约某个 $\beta \geqslant \mathbf{g}(\mathfrak{M})$的 Σ_1-理论，$\{c_n : n < \omega\}$是新个体常元集，$T_1 = T \cup \{c_{n+1} < c_n : n < \omega\}$. 因为 $\beta \geqslant \mathbf{g}(\mathfrak{M})$，所以 T 的每一属于 $\mathfrak{M}$ 的子集有一个不是良建的模型，因此 T_1的每一属于 $\mathfrak{M}$ 的子集有模型. 据 Σ_1-紧致性定理，T_1有模型，矛盾. 因此 $\mathbf{g}_\Sigma(\mathfrak{M}) \leqslant \mathbf{g}(\mathfrak{M})$. 据(2)，有

$$\mathbf{g}_\Sigma(\mathfrak{M}) = \mathbf{g}(\mathfrak{M}). \square$$

12.4.11例 (1) 令 $\mathfrak{M} = \mathbf{H}(\omega_1)$，则

$$\mathbf{g}_\Sigma(\mathfrak{M}) > \mathbf{g}(\mathfrak{M}) = \mathrm{o}(\mathfrak{M}).$$

(2) 令 $\mathfrak{M} = \mathbf{HYP}(\mathbf{H}(\omega_1))$，则

$$\mathbf{g}_\Sigma(\mathfrak{M}) = \mathbf{g}(\mathfrak{M}) > \mathrm{o}(\mathfrak{M}).$$

12.4.12 truncation-引理 令 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}} = (\mathfrak{A}; M, E, \cdots)$和 $\mathfrak{N}_{\mathfrak{A}} = (\mathfrak{A}; N, \in, \cdots)$是结构使得 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}} \models$ **KPU** 且 $\mathfrak{N}_{\mathfrak{A}} \subseteq_{\mathrm{end}} \mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$，其中 $(\mathfrak{A}; N, \in) = \mathrm{WF}(\mathfrak{A}; M, E)$. 则 $\mathfrak{N}_{\mathfrak{A}}$ 是 $\mathfrak{A}$ 的可容集.

证明：只须证0.6.8的假设条件满足，因为 **KPU—基础公理**在 $\mathfrak{N}_{\mathfrak{A}}$ 中真. 但 $\mathfrak{N}_{\mathfrak{A}}$ 是良建的，所以它也满足基础公理.

据 $\mathfrak{N}_{\mathfrak{A}} \in \{\mathfrak{N}_{\mathfrak{A}} : \mathfrak{N}_{\mathfrak{A}}$ 是良建的且 $\mathfrak{N}_{\mathfrak{A}} \subseteq_{\mathrm{end}} \mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}\}$的极大性，我们有

$$a \in M \text{ 且 } a_E \subseteq N \Rightarrow a \in N. \quad (12.16)$$

因为 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}} \models \alpha = \sup\{\mathrm{Rank}(x) + 1 : x \in a\}$，所以施归纳于 a，据(12.16)，有

$$a \in N \text{ 且 } \mathfrak{M}_{\mathfrak{A}} \models \mathrm{Rank}(a) = \alpha \Rightarrow \alpha \in N. \quad (12.17)$$

所以施归纳于 α，据(12.16)，有

$$\alpha \in N \text{ 且 } \mathfrak{M}_{\mathfrak{A}} \models \mathrm{Rank}(a)=\alpha \Rightarrow a \in N. \tag{12.18}$$

因此若 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}} \models \mathrm{Rank}(a)=\alpha$，则 $a \in B \Leftrightarrow \alpha \in B$. 据(12.16)，

对 $\mathfrak{N}_{\mathfrak{A}}$ 中诸序数，$\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 中不存在它们的上确界.

现在据0.6.8，易证本引理. □

12.4.13定理(Barwise-Kunen,[1971]) 假设 $\mathfrak{M}$ 是可容集，F:$\mathbf{ON}^n \to \mathbf{ON}$是 n 元函数使得 F 在 **KPU** 中是 Σ_1-可定义的，

(1) $\alpha_1,\cdots,\alpha_n<\mathbf{g}_\Sigma(\mathfrak{M}) \Rightarrow F(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)<\mathbf{g}_\Sigma(\mathfrak{M})$.

(2) $\alpha_1,\cdots,\alpha_n<\mathbf{g}(\mathfrak{M}) \Rightarrow F(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)<\mathbf{g}(\mathfrak{M})$.

证明：(1) 我们证明 $n=2$时的情况. 对 $n\neq 2$也类似可证. 令 F:$\mathbf{ON}\times\mathbf{ON}\to\mathbf{ON}$在 **KPU** 中是 Σ_1-可定义的，因此在更强的 **KP** 中可以由下列 Σ_1-公式 $\varphi(x_1,x_2,y)$来定义：

① $\mathbf{KP}\vdash\forall x_1x_2\exists!y\varphi(x_1,x_2,y)$，

② 对所有 α_1,α_2，$\mathbf{V}\models\varphi(\alpha_1,\alpha_2,F(\alpha_1,\alpha_2))$.

假设 $\alpha_1,\alpha_2<\mathbf{g}_\Sigma(\mathfrak{M})$且 $\beta=F(\alpha_1,\alpha_2)$. 下证 $\beta<\mathbf{g}_\Sigma(\mathfrak{M})$. 我们令 $T_1(<_1,R_1)$，$T_2(<_2,R_2)$分别是制约 α_1和 α_2的 Σ_1-理论(T_1和 T_2包含其它关系符号的证明也类似). 我们要定义一个制约 β 的 Σ_1-理论 $T(<)$. 但首先让我们揭示一下预期的 $T(<)$的模型 $\mathfrak{A}$ 使得 $<^{\mathfrak{A}}$ 有序型 β. 令 κ 是正则基数，$\alpha_1,\alpha_2<\kappa$，从而使 $\beta<\kappa$. 令

$$\mathfrak{A}_1=\langle A_1,<_1,R_1\rangle\models T_1\text{，且}<_1\text{有序型 }\alpha_1,$$

$$\mathfrak{A}_2=\langle A_2,<_2,R_2\rangle\models T_2\text{，且}<_2\text{有序型 }\alpha_2.$$

据向下-LS-定理(8.1.25)和同构模型满足相同句子的事实，可设

$$\alpha_i\subseteq A_i\subseteq\kappa,\quad <_i=\in\upharpoonright\alpha_i,\quad i=1,2.$$

现令

$$\mathfrak{A}=\langle\mathbf{H}(\beta),\in,<,A_1,<_1,R_1,A_2,<_2,R_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta\rangle,$$

其中$<=\in\upharpoonright\beta$，且 α_1,α_2,β 被当作元素而不是子集. 显然，$\mathfrak{A}$ 是下列句子集的模型，其中 U_i 解释为 A_i，c_i 解释为 α_i，d 解释为 β：

$$\{\psi^{(U_1)}:\text{对所有 }\psi\in T_1\}\cup\{\psi^{(U_2)}:\text{对所有 }\psi\in T_2\}$$

$$\cup\mathbf{KP}\cup\{“<_1=\in\upharpoonright c_1”,“<_2=\in\upharpoonright c_2”,“<=\in\upharpoonright d”\}$$

$\bigcup\{$"c_1,c_2,d 是序数"$,\varphi(c_1,c_2,d)\}$.

若我们把上述句子集称为 $T=T(<)$，则 $\mathfrak{A}$ 是 T 的模型使得 $<^{\mathfrak{A}}$ 有序型 β. 我们需要证明 T 的每一模型 $\mathfrak{A}$ 有良序的 $<^{\mathfrak{A}}$. 令

$$\mathfrak{A}=\langle A,E,<,U_1,<_1,R_1,U_2,<_2,R_2,a_1,a_1,d\rangle$$

是 T 的任意模型. 据 truncation-引理，不妨把 $\langle A,E\rangle$ 的良建部分等同可容集 $\langle N,\in\rangle$. 因为对 $i=1,2$，$\langle U_i,<_i,R_i\rangle\models T_i$，且 $<_i$ 被良序，所以 a_1,a_2 是实序数且 $a_1,a_2\in N$，据条件①，

$$\langle N,\in\rangle\models\exists!y\varphi(a_1,a_2,y).$$

据条件②和 Σ-公式的保持性，

$$\langle N,\in\rangle\models\varphi(a_1,a_2,F(a_1,a_2)).$$

因为 $\langle N,\in\rangle\subseteq_{\text{end}}\langle A,E\rangle$，所以据保持性(0. 6. 6)，

$$\langle A,E\rangle\models\varphi(a_1,a_2,F(a_1,a_2))$$

使得 $b=F(a_1,a_2)$. 因为 $b=F(a_1,a_2)\in N$ 且 $<=\in\restriction b$，所以 $<$ 是实良序，这就证明了本定理的(1).

当 $o(\mathfrak{M})>\omega$，(2)的证明同(1)的证明完全一样，因为我们可以构造 $\bigwedge$**KP** 并把 T 中其余的句子构造成一个单句. 若 $o(\mathfrak{M})=\omega$，则我们须用单句 $\sigma=\bigwedge$(**ZF－幂集公理**)来置换 **KP**(因为 κ 是正则的，所以 σ 在 $\mathbf{H}(\kappa)$ 中真)，这足以确保 σ 的任何模型的标准部分是可容集. 我们把这个证明留给读者. □

在本小节，我们实际只需要12. 4. 13的下列推论：

12. 4. 14推论　令 $\mathfrak{M}$ 是可容集，则 $\mathbf{g}_\Sigma(\mathfrak{M})$ 和 $\mathbf{g}(\mathfrak{M})$ 在序数的后继运算、加法、乘法和指数运算下封闭.

证明：可以证明上述运算在 **KP** 中是 Σ_1-可定义的. □

下面定理的结论似乎很明显，但仍需要证明.

12. 4. 15定理　令 $\mathfrak{M}$ 是可容集，

(1) 若 T 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的、制约序数的 Σ_1-理论，则存在 $\xi<\mathbf{g}_\Sigma(\mathfrak{M})$ 使得 T 制约的每一序数小于 ξ.

(2) 若 σ 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的、制约序数的句子，则存在 $\xi<\mathbf{g}(\mathfrak{M})$ 使得 σ 制约的每一序数小于 ξ.

证明：在此我们只证(2)，把(1)的证明留给读者. 不妨假设句子 $\sigma(<)$ 制约的序数构成 ON 的一个初始节 $\{\beta:\beta<\xi\}=\xi$. 下证存在某个其它的句子 $\theta(\prec)$ 使得 θ 制约 ξ. 如12. 4. 13证明中那样，在构造 θ 以前，我们先描述预期的 $\mathfrak{A}\models\theta$ 使得 $\prec^{\mathfrak{A}}$ 有序型 ξ. 为了简单，设 $\mathrm{Sm}(\sigma)$ 只有 $<$ 和二元关系符号 R. 对每一 $\beta<\xi$，令

$$\mathfrak{A}_\beta=\langle A_\beta,<_\beta,R_\beta\rangle,\quad \mathfrak{A}_\beta\models\sigma,\quad <_\beta \text{ 有序型 } \beta.$$

因为同构的结构满足相同的句子，所以我们能调整一下 $\mathfrak{A}_\beta$ 使得 $\beta\subseteq\mathfrak{A}_\beta$，$<_\beta=\in\upharpoonright\beta$. 定义

$$\mathfrak{A}=\langle A,U,\prec,B,S_1,S_2\rangle,$$

其中
$$A=\bigcup\{A_\beta:\beta<\xi\},$$
$$U=\xi\subseteq A,$$
$$\beta\prec\gamma\Leftrightarrow\beta\in\gamma\in\xi,$$
$$B(\beta,x)\Leftrightarrow\beta<\xi \text{ 且 } x\in A_\beta,$$
$$S_1(\beta,y,z)\Leftrightarrow\beta<\xi \text{ 且 } y<_\beta z,$$
$$S_2(\beta,y,z)\Leftrightarrow\beta<\xi \text{ 且 } R_\beta(y,z).$$

因此 $\mathfrak{A}$ 是结构，其中 $\prec^{\mathfrak{A}}$ 有序型 ξ.

下面我们来构造句子 $\theta(\prec)$. 首先令 $\psi(x,B,S_1,S_2)$ 是通过对 $\sigma(<,R)$ 进行下列置换得到的句子：用 $S_1(x,y,z)$ 置换 $y<z$，用 $S_2(x,y,z)$ 置换 $R(y,z)$，再用 $\forall y(B(x,y)\to\cdots)$ 置换 $\forall y(\cdots)$，用 $\exists y(B(x,y)\wedge\cdots)$ 置换 $\exists y(\cdots)$. **注意**：在置换时要避免个体变元可能产生的混乱. 令 $\theta(\prec)$ 是下列句子的合取：

① $\forall x[U(x)\to\psi(x,B,S_1,S_2)]$，

② "U 被 $\prec$ 线序"，

③ $\forall x[U(x)\to\forall xy(y\prec z\prec x\leftrightarrow S_1(x,y,z)]$.

因为①断定每一 $\mathfrak{A}_\beta$ 是 ψ 的模型，所以①—③在 $\mathfrak{A}$ 中成立，因此 $\mathfrak{A}$ 是 θ 的模型. 最后证 θ 的任何其它模型

$$\mathfrak{A}=\langle A,U,\prec,B,S_1,S_2\rangle$$

有被良序的 $\prec$. 为此要证：对任意 $x\in U$，x 的 $\prec$-前趋集被良序. 令

$$\mathfrak{A}_x=\langle A_x,<_x,R_x\rangle,$$

其中　　$A_x=\{y:B(x,y)\}$，

$y<_x z\Leftrightarrow S_1(x,y,z)$，

$R_x(y,z)\Leftrightarrow S_2(x,y,z)$.

据句子①，$\mathfrak{A}_x\models\sigma$，所以$<_x$是良序，且$<_x$在$x$的$\prec$-前趋集上与$\prec$相同，因此$\prec$被良序.

综上所述，我们证明了θ制约序数ξ. □

注意：据10.3.3，存在Σ_1-紧致的可容集$\mathfrak{M}$使得

$$g_\Sigma(\mathfrak{M})>o(\mathfrak{M}).$$

三、一般无穷语言的相对可定义良序

在本小节，固定语言$\mathscr{L}=\{<,\cdots\}$，其中$\mathscr{L}$不包含函数符号，且用$\mathscr{L}_*$表示相对$\mathscr{L}$的无穷语言. 例如，$\mathscr{L}_*$可以是$\mathscr{L}_{\omega\omega}$（在此我们把$\mathscr{L}_{\omega\omega}$看作是无穷语言的特例），$\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$，$\mathscr{L}_{\kappa\omega}$，$\mathscr{L}_{\infty\omega}$，$\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$等等.

下面我们考虑$\mathscr{L}_*$的相对可定义良序. 本小节的结果与1—2小节所得结果是一致的，实际上也是对后者的概括.

12.4.16定义　令Σ是$\mathscr{L}_*$的句子集. 我们称**Σ（相对$<$）制约序数α**$\Leftrightarrow$下列条件满足：

(1) 对Σ的所有模型$\mathfrak{A}$，$<^{\mathfrak{A}}$是field($<^{\mathfrak{A}}$)上的良序，

(2) Σ有模型$\mathfrak{A}$使得$<^{\mathfrak{A}}$是序型为α的良序.

上述定义是12.4.2的直接概括. 下面我们用$\mathscr{W}(\mathscr{L}_*,\kappa)$指称$\mathscr{L}_*$的一个幂$\leqslant\kappa$的句子集制约的所有序数的上确界，且称$\mathscr{W}(\mathscr{L}_*)=\mathscr{W}(\mathscr{L}_*,1)$是$\mathscr{L}_*$的**良序数**，称$\mathscr{W}(\mathscr{L}_*,\kappa)$是**相对（$\kappa$的）良序数**；若不存在制约任意大序数的句子（即任给一个任意大的序数α，不存在制约α的句子），则称$\mathscr{L}_*$是**有界语言**.

说明：显然，$\mathscr{W}(\mathscr{L}_*)\geqslant\omega$. 假设$\alpha\geqslant\omega$，若$\Sigma$相对$<$制约$\alpha$，则

$\Sigma\cup\{$"$\prec$是$<$的一个初始节"$\}$相对$\prec$制约任意$\beta\geqslant\alpha$；

$\Sigma\cup\{$"$\prec=<$使得最小元在末端"$\}$相对$\prec$制约$\beta+1$.

因此$\mathscr{W}(\mathscr{L}_*,\kappa)=\infty$或$\mathscr{W}(\mathscr{L}_*,\kappa)$是极限序数，而且

序数 α 被 $\mathscr{L}_*$ 的一幂 $\leqslant\kappa$ 的句子集制约 $\Leftrightarrow \alpha<\mathscr{W}(\mathscr{L}_*,\kappa)$.
类似论证可得，$\mathscr{W}(\mathscr{L}_*,\kappa)$ 在序数加法、乘法和指数运算下封闭.

下面的定理是对相对良序数 $\mathscr{W}(\mathscr{L}_*,\kappa)$ 的刻画：

12.4.17定理 假设 $\kappa\geqslant 1$，$\mathscr{W}(\mathscr{L}_*,\kappa)<\infty$，则 $\mathscr{W}(\mathscr{L}_*,\kappa)$ 是最小的序数 α 使得对 $\mathscr{L}_*$ 的所有幂 $\leqslant\kappa$ 的句子集 Σ，若对任意大的 $\beta<\alpha$，Σ 有模型 $\mathfrak{A}$ 使得 $<^{\mathfrak{A}}$ 是序型为 β 的良序，则 Σ 有模型 $\mathfrak{B}$ 使得 $<^{\mathfrak{B}}$ 不被良序.

证明：假设 $\mathscr{W}(\mathscr{L}_*,\kappa)<\infty$，且对 $\mathscr{L}_*$ 的所有幂 $\leqslant\kappa$ 的句子集 Σ，对任意大的 $\beta<\alpha$，Σ 有模型 $\mathfrak{A}$ 使得 $<^{\mathfrak{A}}$ 是序型为 β 的良序. 据本定理前面的说明，易见 $\mathscr{W}(\mathscr{L}_*,\kappa)\leqslant\alpha$. 为了证明 $\mathscr{W}(\mathscr{L}_*,\kappa)\geqslant\alpha$，只须证：

若对任意大 $\beta<\mathscr{W}(\mathscr{L}_*,\kappa)$，$\Sigma(<)$ 是幂 $\leqslant\kappa$ 的 $\mathscr{L}_*$-句子集且有模型 $\mathfrak{A}$ 且 $<^{\mathfrak{A}}$ 是序型为 β 的良序，则 Σ 相对 $<$ 不能制约序数.

增加新二元关系符号 R，$\prec$ 和 F 给 $\mathscr{L}$（**注意**：$\mathscr{L}$ 中没有函数符号），且令 Ξ 是下列句子集：其中 $Z=\{z:R(x,z)\}$，

(1) “$\prec$是线序”$\wedge\forall x\in \mathrm{field}(\prec)\exists zR(x,z)$，

(2) $\forall x\in\mathrm{field}(\prec)\sigma^{Z}$， 对 $\sigma\in\Sigma$，

(3) $\forall y\in\mathrm{field}(\prec)\exists x[y\prec x\wedge$“$\lambda zF(x,z)$ 是下列同构
$\langle\mathrm{field}(<\upharpoonright Z),\prec\upharpoonright Z\rangle\cong\langle Z,<\upharpoonright Z\rangle$”$]$.

显见 Ξ 制约 $\mathscr{W}(\mathscr{L}_*,\kappa)$ 且 $|\Xi|\leqslant\kappa$，矛盾. □

12.4.18推论 (1) $\mathscr{W}(\mathscr{L}_{\omega\omega},\kappa)=\omega$， 对所有 $\kappa\geqslant 1$.

(2) 若 $\mathfrak{M}$ 是可容集，则 $\mathscr{W}(\mathscr{L}_{\mathfrak{M}})\geqslant \mathrm{o}(\mathfrak{M})$；
若 $\mathfrak{M}$ 是可数可容集，则 $\mathscr{W}(\mathscr{L}_{\mathfrak{M}})=\mathrm{o}(\mathfrak{M})$.

(3) $\mathscr{W}(\mathscr{L}_{\omega_1\omega},\kappa)=\omega_1$.

(4) $\mathscr{W}(\mathscr{L}_{\infty\omega},\kappa)=\infty$；另一方面，$\mathscr{L}_{\infty\omega}$ 是有界语言.

(5) $\mathscr{L}_{\omega_1\omega_1}$ 不是有界语言.

证明：(1)的证明显然.

(2)的证明据12.4.11(2)和(3).

(3) 因为可数序数 $\alpha\neq 0$ 被下列 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 的句子制约：

$$\text{“}<\text{是线序”}\wedge\forall x\bigvee_{\beta<\alpha}\theta_\beta(x).$$

其中 $\theta_\beta(x)$如12.4.1所规定. 所以我们有 $\mathscr{W}(\mathscr{L}_{\omega_1\omega})\geqslant\omega_1$. 类似定理12.4.4的论证,我们有

$$\mathscr{W}(\mathscr{L}_{\omega_1\omega})\leqslant\omega_1.$$

(4) 把(3)的论证扩张到任意序数 α.

(5) 见1.2.3. □

12.4.19定理 $\mathscr{L}_*$是$\aleph_0$-紧致的 $\Leftrightarrow\mathscr{W}(\mathscr{L}_*,\aleph_0)=\omega$.

证明: “$\Rightarrow$”显然成立. “$\Leftarrow$”: 假设 $\mathscr{L}_*$ 不是$\aleph_0$-紧致的,且 $\Sigma=\{\sigma_n:n<\omega\}$是 $\mathscr{L}_*$ 的可数句子集使得 Σ 的每一有穷子集有模型但 Σ 自身没有模型. 增加新关系符号 R 和$<$给 $\mathscr{L}$(**注意**: $\mathscr{L}$ 中没有函数符号). 令 Ξ 是下列句子集:

(1) “$<$是线序”,

(2) $\forall x\in\text{field}(<)\exists zR(x,z)$,

(3) $\forall x\in\text{field}(<)[|\{y:y\leqslant x\}|\geqslant n\rightarrow\sigma_n^{\{z:R(x,z)\}}]$, 对 $n<\omega$.

显然,Ξ 制约 ω,所以 $\mathscr{W}(\mathscr{L}_*,\aleph_0)\neq\omega$. □

练 习

12.4.20 令 $\mathfrak{M}$ 是Σ_1-紧致可容集,$o(\mathfrak{M})=\omega$,证明:

$$\mathbf{g}(\mathfrak{M})=\omega.$$

12.4.21 令 $\mathfrak{M}$ 是Σ_1-紧致可容集,$o(\mathfrak{M})=\alpha>\omega$使得对某个 $x\in\mathfrak{M}$,$\alpha=$最小的 β 使得 $\mathbf{L}(x,\beta)$是可容集. 证明:

$$\mathbf{g}_\Sigma(\mathfrak{M})=o(\mathfrak{M}).$$

12.4.22 称句子$\sigma(<)$(或理论$T(<)$)**恰好制约序数** $\alpha\Leftrightarrow\sigma$(或 T)有模型且σ(或 T)的每一模型 $\mathfrak{A}$ 有序型恰好为 α 的$<^{\mathfrak{A}}$.

(1) 证明若 $\mathfrak{M}$ 是自我定义的(或强自我定义的),则存在 $\mathscr{L}_\mathfrak{M}$ 的、恰好制约 $o(\mathfrak{M})$的 Σ_1-理论(或句子).

(2) 令 $\mathfrak{M}$ 是可解可容集,T 是 $\mathscr{L}_\mathfrak{M}$ 的、恰好制约 $o(\mathfrak{M})$的 Σ_1-理论. 证明 $\mathfrak{M}$ 是自我定义的.

第13章　Löwenheim-Skolem-定理（下）

本章继续第11章的工作，讨论无穷语言的向上-LS-定理. 由于本章得到的结果大多数与第12章的良序可定义性问题密切相关，所以我们把这部分内容放在第12章后面.

我们知道，在 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$中，我们是用 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$-紧致性定理得到向上-LS-定理，但对无穷语言，由于它们绝大多数丧失了对 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$-紧致性定理的直接概括，所以大多只能用不可辨元性质来代替紧致性质，用伸缩扩张定理（例如8.2.5）来获得 Hanf-数的上界，当然，在这个过程中还经常利用划分演算的结果.

本章 §1讨论片段 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的向上-LS-定理，其中第1小节讨论 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的可数片段的向上-LS-定理. 第2小节讨论在 $\mathfrak{M}\subseteq\mathbf{HC}=\mathbf{H}(\omega_1)$的情况下，$\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的可容片段的 Hanf-数. 在此小节我们还得到 LS-定理的另一种形式：双基数定理. 第3小节我们讨论 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$的可容片段的向上-LS-定理及其双基数形式. 此小节的结果是把前两小节相应的结果从单个句子的情况概括到 Σ_1-理论的情况，使 LS-定理更具概括性.

§2研究 $\mathscr{L}_{\omega\lambda}$（其中 $\lambda>\omega$）的 Hanf-数. 在这个方面的研究还是初步的，研究的比较充分的是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega_1}$的 Hanf-数. 本节考虑问题往往超出 **ZFC**，通过增加其它公理使问题变得更有意思.

§3是对 §1和 §2的某些结果在某些方面的概括. 主要讨论 $\mathscr{L}_{\infty\infty}$的某些句子，主要是 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$和 $\mathscr{L}_{\infty\lambda}$（其中 $\lambda>\omega$）的某些全称句相对一阶理论的 Hanf-数. 本节还讨论相对一类模型的 Hanf-数的上下界限，甚至确定的值，然后讨论由此得到的结果的一些特例，

证明在一些极限的情况下，能归约为原来的 Hanf-数，但在一般情况下不然.

§1　片段 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的向上-LS-定理与双基数定理

本节分3小节讨论各种片段 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的向上-LS-定理. 第1小节讨论 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 的可数片段的向上-LS-定理，从而从另一个角度证明了 $h(\mathscr{L}_{\omega_1\omega})=\beth_{\omega_1}$（见11. 3. 15）. 第2小节讨论在 $\mathfrak{M}\subseteq\mathbf{HC}$ 是可容集情况下的 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的向上-LS-定理和另一种形式的双基数定理. 第3小节讨论在 $\mathfrak{M}$ 是任意可容集情况下的 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$ 的可容片段 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的向上-LS-定理和双基数定理.

一、$\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 的可数片段 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的向上-LS-定理

在下面定理的证明中，我们要用 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$-模型存在定理、不可辨元（用它们的性质来代替各种紧致性质）、Skolem-函数、伸缩扩张定理(stretching theorem)和划分演算的 Erdös-Rado-定理，因此尽管这个定理所得到的结果在很大程度上已包括在第11章§3中，但它的证明方法还是很有意思. 此定理的特例是 Morley 在其[1965]证明的，一般情况是 López-Escobar 在其[1966]证明的.

13. 1. 1 向上-LS-定理　令 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 的可数片段，T 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的句子集，假设对所有 $\alpha<\omega_1$，T 有幂为 $\beth_\alpha$ 的模型，则

(1) T 有模型 $\mathfrak{A}$ 使得 $\mathfrak{A}$ 有无穷 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$-不可辨元集；且

(2) T 有所有无穷幂的模型.

证明：我们先来证明(1) ⇒ (2). 假设(1)对所有可数片段 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 和所有 T 成立，构造 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的 Skolem-片段 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}^*$，且令 $T^*=T\cup T_{\mathrm{Skolem}}$. 显然，$\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}^*$ 仍是可数片段且 T^* 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}^*$ 的句子集. 据8. 1. 5，

T 的每一模型有一膨胀使得该膨胀是 T^* 的模型，因此据题设和 T 与 T^* 的关系，对所有 $\alpha<\omega_1$，T^* 有幂为$\beth_\alpha$的模型. 这样，据(1)，T^* 有模型 $\mathfrak{A}^*$ 使得 $\mathfrak{A}^*$ 有无穷不可辨元集$\langle X,<\rangle$. 令 λ 是任意无穷基数，$\langle Y,<\rangle$是幂为 λ 的线序集，据伸缩变换定理8.2.5(2)，T^* 有模型 $\mathfrak{B}^*\equiv_{\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}^*}\mathfrak{A}^*$ 使得$\langle Y,<\rangle$是 $\mathfrak{B}^*$ 的不可辨元集. 于是，$\mathfrak{B}^*$ 有幂 λ. 显见 $\mathfrak{B}^*\restriction\mathscr{L}=\mathfrak{B}$ 就是 T 的、幂为 λ 的模型. 这样，我们证明了(1) ⇒ (2).

下证(1)：(**注意**：对(2)的证明是通过把(1)运用于 Skolem-片段 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}^*$ 得到的，而对(1)的证明只需考虑任意 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 和 T，因为 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}^*$ 和 T^* 作为特例已包括其中，因此我们在证明(1)时不必特为提到 Skolem-函数.)令 $\mathscr{L}'=\mathscr{L}\cup D\cup C$，其中 C 和 $D=\{d_i:i<\omega\}$是两个可数新个体常元集，$\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}'$ 是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}'$的最小可数片段使得 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}\subseteq\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}'$，$T_1$是所有下列形式的句子的集合：

$$\neg(d_i\equiv d_j),\quad \theta(d_{i_1},\cdots,d_{i_p})\leftrightarrow\theta(d_{j_1},\cdots,d_{j_p}),$$

其中 $\theta(v_1,\cdots,v_p)\in\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$，且

$$1\leqslant i_1<\cdots<i_p<\omega,\quad 1\leqslant j_1<\cdots<j_p<\omega,\quad i\neq j.$$

显见若 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathscr{L}$ 的模型且 $a_1,a_2,a_3,\cdots\in A$ 且$(\mathfrak{A},a_1,a_2,a_3,\cdots)\models T_1$，则 $\mathfrak{A}$ 有无穷 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$-不可辨元集$\langle X,<\rangle$，其中 $X=\{a_1,a_2,a_3,\cdots\}$ 且 $a_i<a_j\Leftrightarrow i<j$. 因此要证(1)，只须证 $T\cup T_1$有模型. 据扩张的模型存在定理(4.1.6)，只须构造(ω_1,ω)-一致性质 $\mathbf{S}$ 使得 $\mathbf{S}\neq\varnothing$且

$$\text{对所有 }\sigma\in T\cup T_1\text{ 和 }s\in\mathbf{S},s\cup\{\sigma\}\in\mathbf{S}.\tag{13.1}$$

令 $\mathbf{S}$ 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}'$ 的所有有穷句子集 s 的集合使得

① 只有有穷多个 $c\in C$ 和 $d\in D$ 在 s 中出现；

② 对所有 $\alpha<\omega_1$，存在 T 的模型 $\mathfrak{A}$ 和线序集$\langle X,<\rangle$使得 $X\subseteq A$，$|X|=\beth_\alpha$，且对 X 中所有严格递增 n 元组 $a_1<\cdots<a_n$，

$$(\mathfrak{A},\vec{a}_n)\models\exists\vec{u}_m\bigwedge s(\vec{u}_m,\vec{d}_n).\tag{13.2}$$

据①，s 可以写作 $s=s(\vec{c}_m,\vec{d}_n)$. 不言而喻，(13.2)的 s 中的个体常

元 $\vec{c}_m$ 是被新个体变元 $\vec{u}_m \in \mathfrak{M}$ 置换. 元素 $\vec{a}_n$ 是对个体常元 $\vec{d}_n$ 的解释. 我们首先来证明:

$$\mathbf{S} \neq \varnothing. \tag{13.3}$$

考虑逻辑真的句子 $\exists x(x \equiv x)$, 因为对每一 $\alpha < \omega_1$, T 有幂为 $\beth_\alpha$ 的模型 $\mathfrak{A}$ 且 $\exists x(x \equiv x)$ 不包含个体常元, 所以条件①和②对 $s = \{\exists x(x \equiv x)\}$ 成立, 因此 $\{\exists x(x \equiv x)\} \in \mathbf{S}$. 下证:

$$\mathbf{S}\text{ 是}(\omega_1, \omega)\text{-一致性质}. \tag{13.4}$$

验证 $\mathbf{S}$ 是 (ω_1, ω)-一致性质的条件(C1)—(C3), (C5)—(C7)是例行公事(我们把这部分验证留给读者), 只有下列条件(C4)的验证值得在此一提:

$$\text{若} \bigvee \Theta \in s \in \mathbf{S}, \text{则对某个 } \theta \in \Theta, s \cup \{\theta\} \in \mathbf{S}. \tag{13.5}$$

对所有 $\theta \in \Theta$, 不妨把 θ 写作 $\theta = \theta(\vec{c}_m, \vec{d}_n)$. 令 $\alpha < \omega_1$; 则 $\alpha + n < \omega_1$. 据条件②, 我们可以选择 T 的模型 $\mathfrak{A}_\alpha$ 和线序集 $\langle X_\alpha, < \rangle$, $|X_\alpha| = \beth_{\alpha+n}$, $X_\alpha \subseteq A_\alpha$, 使得所有 $a_1 < \cdots < a_n \in X_\alpha$,

$$\mathfrak{A}_\alpha \models \exists \vec{u}_m \bigwedge s(\vec{u}_m, \vec{d}_n). \tag{13.6}$$

因为 $\bigvee \Theta \in s$, 所以(13.6)可写作

$$\mathfrak{A}_\alpha \models \exists \vec{u}_m (\bigwedge s \wedge \bigvee \Theta)(\vec{u}_m, \vec{d}_n).$$

即

$$\mathfrak{A}_\alpha \models \exists \vec{u}_m \bigvee_{\theta \in \Theta} (\bigwedge s \wedge \Theta)(\vec{u}_m, \vec{d}_n).$$

因此对所有 $a_1 < \cdots < a_n \in X_\alpha$, 易得

$$\mathfrak{A}_\alpha \models \bigvee_{\theta \in \Theta} \exists \vec{u}_m (\bigwedge s \wedge \Theta)(\vec{u}_m, \vec{d}_n).$$

这样, 我们可以选择函数 $f: [X_\alpha]^n \to \Theta$ 使得若 $a_1 < \cdots < a_n \in X_\alpha$, 且 $f(\vec{a}_n) = \theta$, 则 $\mathfrak{A}_\alpha \models \exists \vec{u}_m (\bigwedge s \wedge \theta)(\vec{u}_m, \vec{d}_n)$. 据 Erdös-Rado-定理, 有

$$\beth_{n-1}(\beth_\alpha)^+ \to (\beth_\alpha^+)^n_{\beth_\alpha}.$$

因为 $\beth_{\alpha+n} = \beth_n(\beth_\alpha) \geqslant \beth_{n-1}(\beth_\alpha)^+$, 所以 $\beth_{\alpha+n} \to (\beth_\alpha)^n_\omega$. 因为 $|\Theta| \leqslant \omega$, 所以存在集合 $Y_\alpha \subseteq X_\alpha$(其中 $|Y_\alpha| = \beth_\alpha$)和 $\theta_\alpha \in \Theta$ 使得对所有 $a_1 < \cdots < a_n \in Y_\alpha$, $f(\vec{a}_n) = \theta_\alpha$. 因为 Θ 是可数集, 所以存在 $\theta_1 \in \Theta$ 使得对任意大 $\alpha < \omega_1$, $\theta_1 = \theta_\alpha$. 这意味对任意大 $\alpha < \omega_1$, 集合 $s \cup \{\theta_1\}$ 有性质②.

因此对所有 $\alpha<\omega_1$，$s\cup\{\theta_1\}$满足性质②，所以 $s\cup\{\theta_1\}\in\mathbf{S}$. 这就证明了(13.5)，从而也得到了(13.4).

现在剩下只须证 **S** 满足(13.1). 令 $\sigma\in T\cup T_1$，$s\in\mathbf{S}$. 若 $\sigma\in T$，则①和②对 $s\cup\{\sigma\}$显然成立，所以 $s\cup\{\sigma\}\in\mathbf{S}$. 同样，若 σ 形如 $\neg(d_i\equiv d_j)\in T_1$，则①和②对 $s\cup\{\neg(d_i\equiv d_j)\}$也成立，所以

$$s\cup\{\neg(d_i\equiv d_j)\}\in\mathbf{S}.$$

最后假设 $\sigma=\theta(d_{i_1},\cdots,d_{i_p})\leftrightarrow\theta(d_{j_1},\cdots,d_{j_p})\in T_1$. 在这种情况下，我们必须再用一次 Erdös-Rado-定理. 令 $\alpha<\omega_1$，据②，存在 T 的模型 $\mathfrak{A}$ 和线序集$\langle X,<\rangle$使得$|X|=\beth_{\alpha+p}$，$X\subseteq A$ 且对所有 $a_1<\cdots<a_n\in X$，

$$(\mathfrak{A},\vec{a}_n)\models\exists\vec{u}_m\wedge s(\vec{u}_m,\vec{d}_n).$$

定义函数 $g:[X]^p\to 2$使得 $g(\vec{a}_p)=1\Leftrightarrow\mathfrak{A}\models\theta[\vec{a}_p]$. 据划分关系

$$\beth_{p-1}(\beth_\alpha)^+\to(\beth_\alpha^+)^p_{\beth_\alpha},$$

我们有$\beth_{\alpha+p}\to(\beth_\alpha)^p_2$，因此我们可以选择集合 $Y\subseteq X$ 使得$|Y|=\beth_\alpha$且 $g\upharpoonright[Y]^p$ 是常值函数，所以对所有 $a_1<\cdots<a_p,b_1<\cdots<b_p\in Y$，有

$$\mathfrak{A}\models\theta[\vec{a}_p]\Leftrightarrow\mathfrak{A}\models\theta[\vec{b}_p].$$

令 $q=\max\{n,i_p,j_p\}$，则对任意 $a_1<\cdots<a_q\in Y$，

$$(\mathfrak{A},\vec{a}_q)\models\exists\vec{u}_m\wedge s(\vec{u}_m,\vec{d}_n)\wedge[\theta(d_{i_1},\cdots,d_{i_p})\leftrightarrow\theta(d_{j_1},\cdots,d_{j_p})].$$

因此 $s\cup\{\sigma\}$满足②且属于 **S**. 这就证明了(13.1). □

13.1.2推论 $\mathrm{h}(\mathscr{L}_{\omega_1\omega})=\beth_{\omega_1}$.

证明：据11.2.4，$\mathrm{h}(\mathscr{L}_{\omega_1\omega})\geqslant\beth_{\omega_1}$. 令 σ 是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的句子且有幂$\geqslant\beth_{\omega_1}$的模型，则存在可数片段 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 使得 $\sigma\in\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$. 据向下-LS-定理，对每一 $\alpha<\omega_1$，σ 有幂为$\beth_\alpha$的模型. 据13.1.1，σ 有任意大幂的模型，所以 $\mathrm{h}(\mathscr{L}_{\omega_1\omega})\leqslant\beth_{\omega_1}$. □

二、$\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的可容片段 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的向上-LS-定理

13.1.3定理(Morley，[1967]；Barwise，[1969]) 令 $\mathfrak{M}\subseteq\mathbf{HC}$

$=\mathbf{H}(\omega_1)$是可容集使得 $\mathfrak{M}\neq\mathbf{R}(\omega)=\{x:|\mathrm{rank}(x)|<\omega\}$，则 Hanf-数 $\mathrm{h}(\mathscr{L}_{\mathfrak{M}})=\beth_{o(\mathfrak{M})}$. 事实上，若 σ 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$-句子且对所有 $\alpha<o(\mathfrak{M})$，σ 有幂为$\beth_\alpha$ 的模型，则 σ 有任意大幂的模型.

证明：$\mathrm{h}(\mathscr{L}_{\mathfrak{M}})\geqslant\beth_{o(\mathfrak{M})}$的证明是对11.2.4的证明精细化. 为此需要假设 $\omega\in\mathfrak{M}$ 且 $\mathscr{L}$ 有足够的关系、函数或个体常元符号以便把11.2.4贯彻下去. 我们把"$\geqslant$"的证明留给读者.

下证"$\leqslant$"：为此只须证本定理的最后一个命题，因为它蕴涵 $\mathrm{h}(\mathscr{L}_{\mathfrak{M}})\leqslant\beth_{o(\mathfrak{M})}$. 假设 σ 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的句子且对所有 $\alpha<o(\mathfrak{M})$. σ 有幂为$\beth_\alpha$的模型. 则存在可数片段 $\mathscr{L}_{\mathfrak{N}}\in\mathfrak{M}$ 使得 $\sigma\in\mathscr{L}_{\mathfrak{N}}$. 令 $\mathscr{L}_{\mathfrak{N}}^*$ 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{N}}$ 的 Skolem-语言，则 $\mathscr{L}_{\mathfrak{N}}$ 的 Skolem-理论 T_{Skolem}是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{N}}^*$ 的句子集. 增加两个无穷个体常元集 C 和 $D=\{d_i:i<\omega\}$给 $\mathscr{L}_{\mathfrak{N}}^*$. 令 $\mathscr{L}_{\mathfrak{N}}'$ 是包含 $\mathscr{L}_{\mathfrak{N}}^*$ 和 C,D 的最小可数片段. 令 T_1是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{N}}'$ 的所有下列形式的句子的集合：

$$\neg(d_i\equiv d_j),\quad 1\leqslant i<j<\omega,$$

$$\theta(d_{i_1},\cdots,d_{i_p})\leftrightarrow\theta(d_{j_1},\cdots,d_{j_p}),$$

$$\theta(\vec{v}_p)\in\mathscr{L}_{\mathfrak{N}}^*,\text{且}1\leqslant i_1<\cdots<i_p<\omega,\quad 1\leqslant j_1<\cdots<j_p<\omega.$$

据 Δ-分离定理(0.2.7)，集合 $\mathscr{L}_{\mathfrak{N}}^*$，$T_{\mathrm{Skolem}}$，$C$，$D$，$\mathscr{L}_{\mathfrak{N}}'$，$T_1\in\mathfrak{M}$.

下面我们要在 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}'$中构造一个$(\omega_1,\omega)$-一致性质 $\mathbf{S}$ 使得

(1) $T_{\mathrm{Skolem}}\cup\{\sigma\}\in\mathbf{S}$,

(2) 对所有 $s\in\mathbf{S}$ 和 $\psi\in T_1$，$s\cup\{\psi\}\in\mathbf{S}$.

令 $\mathscr{P}_\omega(\mathscr{L}_{\mathfrak{N}}')$是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{N}}'$ 的所有有穷句子集的集合，则 $\mathscr{P}_\omega(\mathscr{L}_{\mathfrak{N}}')\in\mathfrak{M}$. 我们来递归定义函数 $Q:\mathfrak{M}\to\mathfrak{M}$ 使得它具有下列直观意义：

$Q(\beta)=\{s:\ s=s_0\cup T_{\mathrm{Skolem}}\cup\{\sigma\},s_0\in\mathscr{P}_\omega(\mathscr{L}_{\mathfrak{N}}')$且至多在 β 步中能看到没有一满足(1)和(2)的(ω_1,ω)-一致性质包含 $s\}$.

递归定义 Q 如下：

若 x 不是序数，则 $Q(x)=\varnothing$；若 $\beta\in o(\mathfrak{M})$，则$Q(\beta)$是所有 $s\in\mathfrak{M}$ 的集合使得下列公式在$(\mathfrak{M},\in)$中成立：

$$
\begin{aligned}
&(\exists s_0 \in \mathscr{P}_\omega(\mathscr{L}_{\mathfrak{N}}'))[s = s_0 \cup T_{\text{Skolem}} \cup \{\sigma\}] \\
&\quad \wedge \Big[(\exists \theta \in T_1)(\exists \gamma < \beta)[s \cup \{\theta\} \in Q(\gamma)] \\
&\qquad \vee (\exists \theta \in s)[\neg \theta \in s] \\
&\qquad \vee (\exists \theta \in s)(\exists \psi \in \mathrm{TC}(\theta))(\exists \gamma < \beta)[\theta = \neg\neg\psi \\
&\qquad\qquad\qquad \wedge s \cup \{\psi\} \in Q(\gamma)] \\
&\qquad \vee (\exists \theta \in s)(\exists \Psi \in \mathrm{TC}(\theta))[\theta = \bigwedge \Psi \wedge (\exists \psi \in \Psi)(\exists \gamma < \beta) \\
&\qquad\qquad\qquad (s \cup \{\psi\} \in Q(\gamma))] \\
&\qquad \vee (\exists \theta \in s)(\exists \Psi \in \mathrm{TC}(\theta))[\theta = \bigvee \Psi \wedge (\forall \psi \in \Psi)(\exists \gamma < \beta) \\
&\qquad\qquad\qquad (s \cup \{\psi\} \in Q(\gamma))] \\
&\qquad \vee (\exists \theta \in s)(\exists \psi, x \in \mathrm{TC}(\theta))[\theta = \forall x \psi(x) \wedge (\exists c \in C)(\exists \gamma < \beta) \\
&\qquad\qquad\qquad (s \cup \{\psi(x/c)\} \in Q(\gamma))] \\
&\qquad \vee (\exists \theta \in s)(\exists \psi, x \in \mathrm{TC}(\theta))[\theta = \exists x \psi(x) \wedge (\forall c \in C)(\exists \gamma < \beta) \\
&\qquad\qquad\qquad (s \cup \{\psi(x/c)\} \in Q(\gamma))] \\
&\qquad \vee (\exists c, d \in C)[c \equiv d \in s \wedge (\exists \gamma < \beta)(s \cup \{d \equiv c\} \in Q(\gamma))] \\
&\qquad \vee (\exists \theta \in s)(\exists t, \psi, x \in \mathrm{TC}(\theta))(\exists c \in C)[\psi(x)\text{是原子公式或} \\
&\qquad\qquad \text{原子公式的否定} \wedge t\text{是基本项} \wedge \theta = \psi(t), c \equiv t \in s \\
&\qquad\qquad\qquad \wedge (\exists \gamma < \beta)(s \cup \{\psi(t/c)\} \in Q(\gamma))] \\
&\qquad \vee (\exists t \in \mathrm{TC}(\mathscr{L}_{\mathfrak{N}}'))[t\text{是基本项} \wedge (\forall c \in C)(\exists \gamma < \beta) \\
&\qquad\qquad\qquad (s \cup \{c \equiv t\} \in Q(\gamma))]\Big].
\end{aligned}
$$

若读者把(ω_1, ω)-一致性质的定义(4.1.2)和上述$Q(\beta)$的定义比较一下，则它们间的关系就一目了然.

据Σ-递归定义原则(0.4.3)，对所有$x \in \mathfrak{M}$，$Q(x)$皆有定义且函数Q是$\mathfrak{M}$上的Δ.定义

$$
\begin{aligned}
\mathbf{S} = \{s:\ & s = s_0 \cup T_{\text{Skolem}} \cup \{\sigma\}, s_0 \in \mathscr{P}_\omega(\mathscr{L}_{\mathfrak{N}}'), \text{只有有穷多个 } c \\
& \in C \text{ 和 } d \in D \text{ 在 } s_0 \text{ 中出现且 } s \notin \bigcup_{\alpha \in o(\mathfrak{M})} Q(\alpha)\}.
\end{aligned}
$$

下证： $\mathbf{S}$是(ω_1, ω)-一致性质.

若往常那样，我们只验证(C4)的情况，其余情况留给读者作为练习. 令$\bigvee \Psi \in s \in \mathbf{S}$且假设对所有$\psi \in \Psi$，$s \cup \{\psi\} \notin \mathbf{S}$. 令"$x \in$

$Q(y)$"是关系 $x\in Q(y)$的 Σ-定义，则

$$\langle\mathfrak{M},\in\rangle\models\forall\psi\in\Psi\exists\gamma[\text{"}s\cup\{\psi\}\in Q(\gamma)\text{"}].$$

据 Σ-自返原则(0.2.5)，存在传递集 $a\in\mathfrak{M}$ 使得 $s\in\mathfrak{M}$，$\Psi\in a$ 且

$$\langle a,\in\rangle\models\forall\psi\in\Psi\exists\gamma[\text{"}s\cup\{\psi\}\in Q(\gamma)\text{"}].$$

所以

$$\langle\mathfrak{M},\in\rangle\models\forall\psi\in\Psi\exists\gamma\in a[\text{"}s\cup\{\psi\}\in Q(\gamma)\text{"}],$$

因此

$$\langle\mathfrak{M},\in\rangle\models\forall\psi\in\Psi\exists\gamma\in o(a)[\text{"}s\cup\{\psi\}\in Q(\gamma)\text{"}],$$

从而 $s\in Q(o(a))$，与 $s\in\mathbf{S}$ 矛盾. 因此(C4)成立.

现在只须验证条件(1)和(2)成立.(2)的成立是显然的，因为若 $s\in\mathbf{S}$，$\psi\in T_1$ 且 $s\cup\{\psi\}\in Q(\alpha)$，则 $s\in Q(\alpha+1)$，与 $s\in\mathbf{S}$ 矛盾，因此 $s\cup\{\psi\}\in\mathbf{S}$.

为了证明(1)，我们施归纳先证明下列命题(13.7)：

令 $s=s_0\cup T_{\text{Skolem}}\cup\{\sigma\}$，$s_0=s(\vec{c}_m,\vec{d}_n)\in\mathscr{P}_\omega(\mathscr{L}'_{\mathfrak{N}})$ 只含有穷多个 $c\in C$ 和 $d\in D$. 假设存在 $\mathfrak{A}^*$ 和线序集 $\langle X,<\rangle$ 使得 $X\subseteq A$，$|X|\geqslant\beth_{\omega\cdot(\beta+1)}$ 且对所有 $a_1<\cdots<a_n\in X$，$(\mathfrak{A}^*,\vec{a}_n)\models\exists\vec{u}_m\wedge s(\vec{u}_m,\vec{d}_n)$，则 $s\notin Q(\beta)$. (13.7)

假设对所有 $\gamma<\beta$，$\beta\in o(\mathfrak{M})$，(13.7)成立，但对 β 不成立，则相对 $Q(\beta)$的定义的10个析取肢分别存在10种情况，其中有两种情况需要 Erdös-Rado-定理. 第一种情况是第一个析取肢：存在 $\theta\in T_1$和 $\gamma<\beta$ 使得 $s\cup\{\theta\}\in Q(\gamma)$. 不妨令

$$\theta=\psi(d_{i_1},\cdots,d_{i_p})\leftrightarrow\psi(d_{j_1},\cdots,d_{j_p}).$$

因为(13.7)对 γ 成立，所以据划分关系

$$(\beth_{\omega\cdot\beta+p})^+\to(\beth^+_{\omega\cdot\beta})^p_{\beth_{\omega\cdot\beta}},$$

从而据 $\beth_{\omega\cdot(\beta+1)}\to(\beth_{\omega\cdot(\gamma+1)})^p_2$，我们就能得到矛盾. 另一种情况就是第5个析取肢：存在 $\bigvee\Psi\in s$ 使得对所有 $\psi\in\Psi$ 存在 $\gamma<\beta$ 使得 $s\cup\{\psi\}\in Q(\gamma)$. 这时用下列划分关系 $\beth_{\omega\cdot(\beta+1)}\to(\beth_{\omega\cdot\beta})^p_2$，仍可得矛盾.

为了从(13.7)得到条件(1)，我们令(13.7)中的 $s_0=\varnothing$，这时

没有 D 中的个体常元在 $s=T_{\text{Skolem}}\cup\{\sigma\}$ 中出现. 因为 $\omega,\beta\in\mathfrak{M}$，所以能证明 $\omega\cdot(\beta+1)\in o(\mathfrak{M})$. 据归纳假设，$\sigma$ 有幂为$\beth_{\omega\cdot(\beta+1)}$的模型 $\mathfrak{A}$. 令 $\mathfrak{A}^*$ 是 $\mathfrak{A}$ 对 $\mathscr{L}_{\mathfrak{N}}{}'$ 的 Skolem-膨胀，$X=A$ 且$<$是任意二元关系，则(13.7)的假设部分被满足，所以据(13.7)，$s\notin Q(\beta)$，因此 $s\in\mathbf{S}$，从而证明(1)成立.

因为 $\mathbf{S}$ 是(ω_1,ω)-一致性质，据 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$-扩张的模型存在定理，集合 $T_{\text{Skolem}}\cup\{\sigma\}\cup T_1$ 有模型. 令$(\mathfrak{A}^*, a_1, a_2,\cdots)$是这样的模型，则 $\mathfrak{A}^*\upharpoonright\mathscr{L}=\mathfrak{A}$ 就是 σ 的模型. 因为 T_1在 $\mathfrak{A}^*$ 中成立，所以据序关系$a_i<a_j\Leftrightarrow i<j$，$X=\{a_1,a_2,\cdots\}$是 $\mathfrak{A}^*$ 的无穷 $\mathscr{L}_{\mathfrak{N}}^*$-不可辨元集. 据8. 2. 3(2)，$\sigma$ 有所有无穷幂的模型. □

说明：上述定理首先为 Morley 以下列特例所证：

$$\sigma=\bigwedge_{n<\omega}\forall x_1\cdots x_{p_n}(\bigvee_{m<\omega}\varphi_{mn}),$$

其中 φ_{mn}是 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$-公式. 此定理的一般情况是由 Barwise 证明，但 Barwise 的论证依赖可容集上的力迫构造. 我们这里给出的证明来自 Keisler 的[1971].

上述定理还可以概括到2个基数的情况，这样得到的定理称为**向上-LS-定理的双基数形式**(简称**向上-LS-双基数定理**).

本小节以下固定U 是$\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的一元谓词符号，$\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$的可数片段. 称 $\mathfrak{A}=\langle A,U,\cdots\rangle$**是类型$(\kappa,\lambda)$的结构**当且仅当$|A|=\kappa$ 且 $|U|=\lambda$. 称 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的句子集 T **允许**(κ,λ)当且仅当 T 有类型(κ,λ)的模型.

13. 1. 4双基数定理(Morley,[1965])　令 T 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的句子集，假设对所有 $\alpha<\omega_1$，存在基数 $\kappa\geqslant\omega$ 使得 T 允许$(\beth_\alpha(\kappa),\kappa)$，则

(1) T 有模型 $\mathfrak{A}=\langle A,U,\cdots\rangle$使得$U$ 的基数无穷且 U 上存在无穷不可辨元集(见8. 2. 2)，且

(2) 对所有基数 $\lambda\geqslant\omega$，T 允许(λ,ω).

证明：如13. 1. 1，我们先证(1) ⇒ (2). 令 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}^*$ 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的 Skolem-语言，$T^*=T\cup T_{\text{Skolem}}$，则对所有 $\alpha<\omega_1$，存在 $\kappa\geqslant\omega$ 使得

T^*允许$(\beth_\alpha(\kappa),\kappa)$. 运用(1)于$\mathscr{L}^*_{\mathfrak{M}}$ 和T^*,存在$\mathfrak{A}^*=\langle A,U,\cdots\rangle\models T^*$使得$\langle X,<\rangle$是$U$上无穷$\mathscr{L}^*_{\mathfrak{M}}$-不可辨元集,据向下-LS-定理,不妨假设$\mathfrak{A}^*$是可数的且$U$是无穷集,所以$|U|=\omega$. 对每一$u\in U$,增加一个新个体常元$c_u$于语言$\mathscr{L}^*_{\mathfrak{M}}$,构成扩张语言$\mathscr{L}^{*\prime}_{\mathfrak{M}}$ 和模型$(\mathfrak{A}^*,u)_{u\in U}$. (**注意**:片段$\mathscr{L}^{*\prime}_{\mathfrak{M}}$ 中每一公式只含有穷多个c_u.)因此$\langle X,<\rangle$是$\mathscr{L}^{*\prime}_{\mathfrak{M}}$-不可辨元集. 据8.2.3(2),若我们令$\langle Y,<\rangle$是基数为$\lambda$的线序集,则存在模型$(\mathfrak{B}^*,b_u)_{u\in U}$使得$\langle Y,<\rangle$是该模型的$\mathscr{L}^{*\prime}_{\mathfrak{M}}$-不可辨元集,$(\mathfrak{B}^*,b_u)_{u\in U}=\mathrm{Hull}(Y)$,且$X$和$Y$中的所有严格递增$p$元组实现$\mathscr{L}^{*\prime}_{\mathfrak{M}}$ 中相同的型. 我们令$\mathfrak{B}=\langle B,V,\cdots\rangle$是$(\mathfrak{B}^*,b_u)_{u\in U}$对$\mathscr{L}$的限制,则$\mathfrak{B}\models T$且$|B|=|Y|=\lambda$. 下证:

$$V=\{b_u:u\in U\}.$$

令$b\in V$,则对$\mathscr{L}^{*\prime}_{\mathfrak{M}}$ 的某个项$t(\vec{v}_p)$和某个$y_1<\cdots<y_p\in Y$,$b=t(\vec{y}_p)$. 令$x_1<\cdots<x_p\in X$,因为$t(\vec{y}_p)\in V$,所以$t(\vec{x}_p)\in U$,因此对某个$u\in U$,$t(\vec{x}_p)=u$,所以$t(\vec{y}_p)=b_u$,因此$V=\{b_u:u\in U\}$. 这样我们就有$|V|=\omega$,从而证明了T允许(λ,ω).

现在我们来证明(1). 令$\mathscr{L}'_{\mathfrak{M}}=\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}\cup C\cup D$,其中$C$,$D$是两个可数新个体常元集,$T_1$是下列句子集

$\neg(d_i\equiv d_j)$, $\quad i<j<\omega$,

$\forall\vec{u}_q[\theta(\vec{u}_q,d_{i_1},\cdots,d_{i_p})\leftrightarrow\theta(\vec{u}_q,d_{j_1},\cdots,d_{j_p})]$,

其中$\theta(\vec{u}_q,d_{i_1},\cdots,d_{i_p})\in\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$, $i_1<\cdots<i_p$, $j_1<\cdots<j_p$. 不妨假设T包含述说"U是无穷集"的句子集. 显然,$(\mathfrak{A},a_1,a_2,\cdots)\models T\cup T_1$蕴涵$\mathfrak{A}\models T$且$\mathfrak{A}$有$U$上的无穷不可辨元集. 据4.1.6,要得到$T\cup T_1$的模型只须构造一个$(\omega_1,\omega)$-一致性质$\mathbf{S}$使得$\mathbf{S}\neq\varnothing$且对所有$s\in\mathbf{S}$和$\sigma\in T\cup T_1$,$s\cup\{\sigma\}\in\mathbf{S}$.

令$\mathbf{S}$是形如$s=s(\vec{c}_m,\vec{d}_n)$的所有有穷$\mathscr{L}'_{\mathfrak{M}}$-句子集的集合使得对所有$\alpha<\omega_1$,存在$\mathfrak{A}=\langle A,U,\cdots\rangle\models T$和线序集$\langle X,<\rangle$使得$X\subseteq A$,$|X|\geqslant\beth_\alpha(|U|)$,且对所有$a_1<\cdots<a_n\in X$,

$$(\mathfrak{A},\vec{a}_n)\models\exists\vec{v}_m\bigwedge s(\vec{v}_m,\vec{a}_n).$$

余下证明如13.1.1证明相应部分，所不同的是据下列划分关系：

$$\beth_{\alpha+p}(|U|)\rightarrow\beth_\alpha(|U|)^p_{(2^{|U|})},$$

而这个划分关系来自 Erdös-Rado-定理.□

13.1.5推论 令 T 是 $\mathscr{L}_\mathfrak{M}$ 的句子集，若存在 $\kappa\geqslant\omega$ 使得 T 允许$(\beth_{\omega_1}(\kappa),\kappa)$，则对所有 $\lambda\geqslant\omega$，T 允许(λ,ω).

证明：据向下-LS-定理，对所有 $\alpha<\omega_1$，T 允许$(\beth_\alpha(\kappa),\kappa)$. 然后再据13.1.4，易得结论.□

说明：双基数定理在无穷逻辑模型论方面有许多运用，例如，对范畴定理和齐次模型的研究，我们将在以后讨论，也请读者参见 Keisler 的[1971].

三、$\mathscr{L}_{\infty\omega}$的可容片段 $\mathscr{L}_\mathfrak{M}$ 的向上-LS-定理

在本小节我们要概括前两小节的内容，先考虑 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$的可容片段 $\mathscr{L}_\mathfrak{M}$ 的向上-LS 定理，然后把关于单个句子的13.1.3推广到关于可容集合论的 Σ_1-理论的13.1.9，最后讨论 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$的任意可容片段的双基数定理. 这里得到的结果是 Barwise 在其[1975]得到的，它们是对 Barwise 和 Kunen 在其[1971]所取得的结果的概括.

本小节固定 U 是 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$的一元谓词符号，$\mathscr{L}_\mathfrak{M}$ 是 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$的片段. 称 $\mathscr{L}_\mathfrak{M}$ 的句子集 T **允许**(κ,λ)当且仅当 T 有模型 $\mathfrak{A}=\langle A,U,\cdots\rangle$ 使得 $|A|=\kappa$ 且 $|U|=\lambda$. 称 T 有**类型(κ,λ)的模型**当且仅当 T 允许(κ,λ). U 上的 $\mathscr{L}_\mathfrak{M}$-不可辨元集的概念如前定义.

13.1.6引理 令 $\mathscr{L}_\mathfrak{M}$ 是带个体常元集的 Skolem-片段，T 是 $\mathscr{L}_\mathfrak{M}$ 的理论，$T_{\text{Skolem}}\subseteq T$，$\kappa=|\mathscr{L}_\mathfrak{M}|$，则

(1) 若 T 有含一无穷 $\mathscr{L}_\mathfrak{M}$-不可辨元集的模型，则 T 有任意幂 $\geqslant\kappa$ 的模型；

(2) 若 $T(U)$有模型 $\mathfrak{A}=\langle A,U,\cdots\rangle$ 使得$\langle X,<\rangle$是 U 上无穷

$\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$-不可辨元集，则对所有 $\lambda\geqslant\kappa+|U|$，$T$ 允许$(\lambda,|U|)$.

证明：(1)的证明直接来自8.2.5(2)的③和8.1.25.

(2) 令 $\mathfrak{A}$ 有 U 上的无穷不可辨元集$\langle X,<\rangle$，$C=\{c_u:u\in U\}$，$\mathfrak{A}_1=(\mathfrak{A},u)_{u\in U}$如通常. 因此$\langle X,<\rangle$是 $\mathfrak{A}_1$的 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}(C)$-不可辨元集. 任给 $\lambda\geqslant\kappa$，令$\langle Y,<\rangle$是幂为 λ 的线序集，$\mathfrak{B}_1=(\mathfrak{B},u)_{u\in U}$是如8.2.5(2)所给定的模型. 据8.2.10，不妨设 $\mathfrak{B}_1=\mathrm{Hull}(Y,\mathfrak{B}_1)$，因为这个Hull-包也有8.2.5(2)的性质①和②. 把 $\mathfrak{B}$ 写作 $\mathfrak{B}=\langle B,U_1,\cdots\rangle$，下证 $U=U_1$：假设 $a\in U_1$，则对 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的某个项 t，某个 m 元组 $\vec{u}_m\in U$ 和某个 $y_1<\cdots<y_n\in Y$，$a=t(\vec{y}_n,\vec{u}_m)$. 但是

$$\mathfrak{B}\models U(t(\vec{y}_n,\vec{u}_m)),$$

所以据8.2.5(2)的②，若 $x_1<\cdots<x_n\in X$，则 $\mathfrak{B}\models U(t(\vec{x}_n,\vec{u}_m))$. 选择这样一个 n 元组 $x_1<\cdots<x_n$，则存在 $u\in U$ 使得

$$\mathfrak{A}\models u\equiv t(\vec{x}_n,\vec{u}_m).$$

再据8.2.5(2)的②，有 $\mathfrak{B}\models u\equiv t(\vec{y}_n,\vec{u}_m)$，所以 $\mathfrak{B}\models u\equiv a$. 换句话说，$U_1$的每一元素都属于 U，因此 $|U_1|=|U|$，从而

$$\begin{aligned}|B|&=|\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}(C)|+|Y|\\&=\kappa+|C|+\lambda\\&=\kappa+|U|+\lambda=\lambda.\ \square\end{aligned}$$

令 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$的结构，$\langle X,<\rangle$是线序使得 $X\subseteq A$. 固定 $n<\omega$，我们称$\langle X,<\rangle$是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的 ***n*-不可辨元集** $\Leftrightarrow$ 对所有 $x_1<\cdots<x_n$，$y_1<\cdots<y_n\in X$，$(\mathfrak{A},\vec{x}_n)\equiv(\mathfrak{A},\vec{y}_n)$. 据8.2.2，$\langle X,<\rangle$是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$-不可辨元集 $\Leftrightarrow$ 对每一 $n<\omega$，$\langle X,<\rangle$是 n-不可辨元集. 显然，若$\langle X,<\rangle$是 n-不可辨元集，则对所有 $m<n$，它也是 m-不可辨元集.

所有的线序集$\langle X,<\rangle$使得 $X\subseteq A$ 都是0-不可辨元集.

当 $\mathfrak{A}=\langle A,U,\cdots\rangle$，类似地可定义 **$U$ 上的 *n*-不可辨元集**.

13.1.7引理 固定$0<n<\omega$，且令 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$的片段使得 $|\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}|=\kappa$，$\mathfrak{A}$ 是 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$的结构，则

(1) 若 $|A|>\beth_n(\kappa)$，则 $\mathfrak{A}$ 中存在 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的无穷 n-不可辨元集$\langle X,<\rangle$.

(2) 若 $\mathfrak{A}=\langle A,U,\cdots\rangle$，其中 $|U|\geqslant\kappa$，$|A|>\beth_n(|U|)$，则 $\mathfrak{A}$ 中存在 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的 U 上的无穷 n-不可辨元集 $\langle X,<\rangle$.

证明：(1) 令 $<$ 是 A 的线序，且对每一 $x_1<\cdots<x_n\in A$，令

$$T(x_1<\cdots<x_n)=\{\varphi(\vec{v}_n):\mathfrak{A}\models\varphi[\vec{x}_n]\}.$$

因为对 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$，存在 $\leqslant 2^\kappa$ 个不同的公式集，所以也就把 $[A]^n$ 划分为 $\leqslant 2^\kappa$ 个不同的集合. 因为

$$|A|>\beth_n(\kappa)=\beth_{n-1}(2^\kappa),$$

所以据 Erdös-Rado-定理，存在幂 $>2^\kappa>\aleph_0$ 的 $X\subseteq A$ 使得 $[A]^n$ 的每一元素在这个划分的一个固定的元素中，即当 $x_1<\cdots<x_n$，$y_1<\cdots<y_n\in X$ 时，

$$T(x_1<\cdots<x_n)=T(y_1<\cdots<y_n).$$

因此 $\langle X,<\restriction X\rangle$ 就是 $\mathfrak{A}$ 中的无穷 n-不可辨元集.

(2) 令 $C=\{c_u:u\in U\}$，用 $|\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}(C)|$ 置换(1)中的 κ，然后运用(1)于 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}(C)$ 和 $\mathfrak{A}_1=(\mathfrak{A},u)_{u\in U}$. □

13.1.8定理 令 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$ 的可容片段使得 $|\mathfrak{M}|=\kappa$，$\alpha=\mathbf{g}_2(\mathfrak{M})$，$T$ 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的 Σ_1-理论. 若对每一 $\beta<\alpha$，T 有幂 $\geqslant\beth_\beta(\kappa)$ 的模型，则 T 有包含无穷不可辨元集的模型.

证明：据8.1.13，不妨假设 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是 Skolem-片段，$T_{\text{Skolem}}\subseteq T$ 且 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是 $\mathfrak{M}$ 上的 Δ_1. 假设 T 有模型但没有含 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$-不可辨元集的模型. 我们要证对某个 $\beta<\alpha$，T 没有幂 $\geqslant\beth_\beta(\kappa)$ 的模型，从而证明本定理的逆否形式. 这个定理的证明比较长，我们须分阶段进行.

假设 $\mathscr{L}'_{\mathfrak{M}}$ 是包含 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 和两个新符号 $X,<$ 的 Skolem-片段，$C=\{c_n:0<n<\omega\}$ 是新个体常元符号集. 在下面的证明中我们要涉及语言 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}(\vec{c}_n)$，$\mathscr{L}'_{\mathfrak{M}}(\vec{c}_n)$，$\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}(C)$，$\mathscr{L}'_{\mathfrak{M}}(C)$；这些都是带个体常元集的 Skolem-语言. 对 $n\geqslant 0$，我们定义 $\mathbf{S}_n$ 是 $\mathscr{L}'_{\mathfrak{M}}(\vec{c}_n)$ 的所有具有下列性质的超有效性质 D 的集合：

(1) $T\subseteq$ D，

(2) "X 被 $<$ 线序且 X 没有末元(last element)"，

(3) "$c_i \in X \wedge c_i < c_{i+1}$" $\in$ D， 对$0<i<n$，

(4) 当 $n>0$时，对每一 $\varphi(\vec{v}_n) \in \mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$，

$$\forall \vec{x}_n \in X[x_1 < \cdots < x_n \to (\varphi(\vec{x}_n) \leftrightarrow \varphi(\vec{c}_n))] \in \mathrm{D}.$$

据弱完全性定理8.1.17，

D$\in$S$_n$ $\Leftrightarrow$ D 是由某个结构$(\mathfrak{A}, X, <, \vec{a}_n)$给定的 $\mathscr{L}'_{\mathfrak{M}}(\vec{c}_n)$-超有效性质，其中 $\mathfrak{A} \models T$，$\langle X, < \rangle$是 $\mathfrak{A}$ 中 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的无穷 n-不可辨元集，且 $a_1 < \cdots < a_n \in X$. (13.8)

令 $\mathbf{S} = \bigcup_{n<\omega} \mathbf{S}_n$. **注意**：对 $n \geqslant 0$，每一 D$\in$**S** 恰好在一个 S$_n$ 中. 这个 n 称为 D 的层次. 我们可以通过观察是否有

$$c_n \equiv c_n \in \mathrm{D} \text{ 且 } c_{n+1} \equiv c_{n+1} \notin \mathrm{D}$$

来确定 D 的层次 n. 令 Lev(D)表示 D 的层次，定义 **S** 上$\prec$如下：

$$\mathrm{D}_1 \prec \mathrm{D} \Leftrightarrow \mathrm{Lev}(\mathrm{D}_1) > \mathrm{Lev}(\mathrm{D}) \text{ 且 } \mathrm{D} \cap \mathscr{L}_{\mathfrak{M}}(c_1, \cdots, c_{\mathrm{Lev}(\mathrm{D})}) \subseteq \mathrm{D}_1.$$

因此易见，若 D$_1 \prec$D，则对 $n=$Lev(D)，D 和 D$_1$恰好包含相同的 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}(\vec{c}_n)$-公式，但不一定恰好包含相同的 $\mathscr{L}'_{\mathfrak{M}}(\vec{c}_n)$-公式. 下证：

$\langle$**S**$, \prec \rangle$是良建的. (13.9)

假设$\langle$**S**$, \prec\rangle$不是良建的，令

$$\cdots \prec \mathrm{D}_{n+1} \prec \mathrm{D}_n \prec \cdots \prec \mathrm{D}_1 \prec \mathrm{D}_0$$

是无穷递降链. 若 D$\in$S$_n$ 且 $n>m$，则 D$\cap \mathscr{L}'_{\mathfrak{M}}(\vec{c}_m) \in$ S$_m$，因此我们可以假设 Lev(D$_n$)$=n$，且令

$$\mathrm{D}_n^0 = \mathrm{D}_n \cap \mathscr{L}_{\mathfrak{M}}(\vec{c}_n), \quad \mathrm{D}_\infty^0 = \bigcup_{n<\omega} \mathrm{D}_n^0.$$

据链并引理8.1.20，D$_\infty^0$是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}(C)$的超有效性质. 据弱完全性定理，令$(\mathfrak{A}, \vec{a}_n, \cdots)$是 D$_\infty^0$的模型，则 $\mathfrak{A} \models T$ 且 $X=\{a_1, a_2, \cdots\}$是 $\mathfrak{A}$ 中如下排序的无穷 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$-不可辨元集：

$$a_i < a_j \Leftrightarrow i < j.$$

而这与 T 的假设矛盾，所以(13.9)成立.

据(13.9)，定义 **S** 上的秩函数如下：

$$\mathrm{Rank}(\mathrm{D}) = \sup\{\mathrm{Rank}(\mathrm{D}_1)+1 : \mathrm{D}_1 \prec \mathrm{D}\},$$

$$\mathrm{Rank}(\mathbf{S}) = \sup\{\mathrm{Rank}(\mathrm{D}_1)+1 : \mathrm{D}_1 \in \mathbf{S}\}.$$

因为 $S_0 \neq \varnothing$，所以 $\mathrm{Rank}(S)>0$. 下证：

若 $\mathrm{Rank}(S)=n<\omega$，则没有 $\mathfrak{A} \models T$ 有无穷 n-不可辨元集.

$$(13.10)$$

为此假设 $\mathfrak{A} \models T$，且 $\langle X,<\rangle$ 是无穷 n-不可辨元集. 对 $0 \leqslant m \leqslant n$，令 $\mathfrak{A}_m=(\mathfrak{A},X,\vec{a}_m)$ 且令 D_m 是由 $\mathfrak{A}_m$ 给定的 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}'(\vec{c}_m)$ 的超有效性质，则 $D_m \in S_m$，且

$$\mathrm{Rank}(D_0)>\mathrm{Rank}(D_1)>\cdots>\mathrm{Rank}(D_n)\geqslant 0,$$

所以 $\mathrm{Rank}(D_0)\geqslant n$，因此 $\mathrm{Rank}(S)>n$，与假设矛盾. (13.10)得证.

据(13.10)和13.1.7(1)，立得

$$\mathrm{Rank}(S)=n<\omega, \text{则 } T \text{ 没有幂} > \beth_n(\kappa) \text{ 的模型.} \qquad (13.11)$$

若 $\mathrm{Rank}(S)\geqslant\omega$，则我们不能给 n-不可辨元集 $\langle X,<\rangle$ 的“规模” n 事先规定一个上界，但能给 $|X|$ 规定一个界限. 假设 $\mathfrak{A} \models T$，$\langle X,<\rangle$ 是 $\mathfrak{A}$ 中 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的 n-不可辨元集且 $a_1<\cdots<a_n \in X$. 令 $D \in S_n$ 是由 $(\mathfrak{A},X,<,\vec{a}_n)$ 给定的超有效性质. 下证：

$$\beta=\mathrm{Rank}(D) \Rightarrow |X|<\beth_{\omega\cdot(\beta+1)}(\kappa). \qquad (13.12)$$

如13.1.7(1)的证明那样，用 Erdös-Rado-定理且施归纳于 β. 假设我们已经证明(13.12)对 $\gamma<\beta$（其中 $\beta>0$）成立，且 $|X|\geqslant \beth_{\omega\cdot(\beta+1)}(\kappa)$. 对 $\langle X,<\rangle$ 的每一递增 $n+1$ 元组 $x_1<\cdots<x_{n+1}$，令

$$T(x_1<\cdots<x_{n+1})=\{\varphi(\vec{v}_{n+1})\in\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}:\mathfrak{A}\models\varphi[\vec{x}_{n+1}]\},$$

从而把 $[X]^{n+1}$ 划分为 $\leqslant 2^\kappa$ 个集合. 因为 $2^\kappa \leqslant \beth_{\omega\cdot\beta+1}(\kappa)$ 且

$$|X|\geqslant\beth_{\omega\cdot(\beta+1)}(\kappa)=\beth_{\omega\cdot(\beta+1)}(2^\kappa)>\beth_{\omega\cdot\beta+n}(2^\kappa)=\beth_n(\beth_{\omega\cdot\beta}(\kappa)),$$

所以根据 Erdös-Rado-定理，存在 $X_0\subseteq X$ 使得 $|X_0|>\beth_{\omega\cdot\beta}(\kappa)$ 且 $[X_0]^{n+1}$ 的每一元素在这个划分的一个固定元中，即对 X_0 中所有 $n+1$ 元组 $x_1<\cdots<x_{n+1}$，$y_1<\cdots<y_{n+1}$，

$$T(x_1<\cdots<x_{n+1})=T(y_1<\cdots<y_{n+1})$$

使得 $\langle X_0,<\rangle$ 是 $\mathfrak{A}$ 中 $n+1$-不可辨元集. 我们令 $a_1<\cdots<a_{n+1}$ 是 $\langle X_0,<\rangle$ 的 $n+1$ 元组，D_0 是由 $\mathfrak{A}_0=(\mathfrak{A},X_0,<\restriction X_0,\vec{a}_{n+1})$ 给定的超有效性质，则 $D_0<D$，所以 $\mathrm{Rank}(D_0)<\beta$. 因为

$$|X_0| > \beth_{\omega\cdot\beta}(\kappa) \geqslant \beth_{\omega\cdot(\gamma+1)}(\kappa),$$

其中 $\gamma = \mathrm{Rank}(\mathsf{D}_0)$，所以 $\mathfrak{A}_0$ 的构成与归纳假设矛盾，从而证明(13.12)对 $\beta>0$ 成立. $\beta=0$ 的情况更容易，请读者自证. 下证：

T 的每一模型 $\mathfrak{A}$ 有幂 $<\beth_{\omega\cdot\beta}(\kappa)$，其中 $\beta=\mathrm{Rank}(\mathbf{S})$. (13.13)

为此令 $X=A$，且 $<$ 是 X 的任意线序，因为 $\langle X, <\rangle$ 是 $\mathfrak{A}$ 的 0-不可辨元集，所以若 D 是由 $(\mathfrak{A}, X, <)$ 给定的 $\mathscr{L}'_{\mathfrak{M}}$-超有效性质，则 $\gamma=\mathrm{Rank}(\mathsf{D})<\beta$. 据(13.12)，

$$|A| = |X| < \beth_{\omega\cdot(\gamma+1)}(\kappa) \leqslant \beth_{\omega\cdot\beta}(\kappa).$$

下证：

$$\mathrm{Rank}(\mathbf{S}) < \mathbf{g}_{\Sigma}(\mathfrak{M}). \tag{13.14}$$

为此我们需要构造能**制约** $\beta=\mathrm{Rank}(\mathbf{S})$ 的 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的 Σ_1-理论 $T_1(<)$. 首先让我们描述一下预期的 $T_1(<)$ 的模型 $\mathfrak{A}$ 使得 $<^{\mathfrak{A}}$ 有序型 β. 令 $\mathfrak{A}$ 是下列结构

$$\langle A;\ \beta, <;\ \mathfrak{M};\ \mathscr{P}(\mathfrak{M}), E;\ \mathbf{S}, \prec, F, G, x\rangle_{x\in\mathfrak{M}},$$

其中

$$A = \beta \cup \mathfrak{M} \cup \mathscr{P}(\mathfrak{M}),$$

$$< \;=\; \in \restriction \beta,$$

$$G(\mathsf{D}) = \begin{cases} \mathrm{Lev}(\mathsf{D}), & \text{若 } \mathsf{D}\in\mathbf{S}, \\ \text{某个不属于 } \omega \text{ 的常元}, & \text{否则}, \end{cases}$$

$$F(\mathsf{D}) = \begin{cases} \mathrm{Rank}(\mathsf{D}), & \text{若 } \mathsf{D}\in\mathbf{S}, \\ \text{某个不属于 } \beta \text{ 的常元}, & \text{否则}, \end{cases}$$

$$E = \in \cap (\mathfrak{M}\times\mathscr{P}(\mathfrak{M})).$$

现假设

$$\mathfrak{A}_1 = \langle A_1;\ N, <_1;\ \mathfrak{N}_1;\ P, E_1;\ \mathbf{S}_1, \prec_1, F_1, G_1, x\rangle_{x\in\mathfrak{N}_1}$$

满足所有在 $\mathfrak{A}$ 中真的有穷一阶句子且 $\mathfrak{M}\subseteq_{\mathrm{end}}\mathfrak{N}_1$. 要证 $\langle N, <_1\rangle$ 是良序结构. 这个证明说明我们实际要用到的有穷句子集是 $\mathfrak{M}$ 上的 Σ_1，从而证明(13.14).

据关于 $\mathscr{P}(\mathfrak{M})$ 的外延性公理，不妨假设

$$P\subseteq\mathscr{P}(\mathfrak{N}_1), \quad E_1 = \in \cap (\mathfrak{N}_1\times P), \quad \mathbf{S}_1\subseteq P.$$

现设线序 $\langle N, <_1\rangle$ 不能被良序，则存在没有 $<_1$-极小元的子集 N_0

$\subseteq N$. 令

$$\mathbf{S}_2=\{\mathrm{D}\in\mathbf{S}_1:F_1(\mathrm{D})\in N_0\},$$

$$\mathbf{S}_3=\{\mathrm{D}\cap\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}'(\vec{c}_m):\mathrm{D}\in\mathbf{S}_2,m<\omega,m\leqslant G_1(\mathrm{D})\},$$

其中 $G_1(\mathrm{D})$可以是一个非标准整数. 不难看出 $\mathbf{S}_3\subseteq\mathbf{S}$,因为每一 D $\in\mathbf{S}_1$是一适当的 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}'(c_1,\cdots,c_{G(\mathrm{D})})$的超有效性质,且相关的量词都是全称量词,所以 $\mathbf{S}_3$必有极小元 D. 从 D 考虑它在 N 中的对应元,且分别考虑 $G_1(\mathrm{D})$的标准情况和非标准情况,我们易得矛盾. 这样,我们证明了$(N,<_1)$被良序,从而证明了(13.14).

最后我们来证明本定理的结论:假设 $\mathbf{g}_\Sigma(\mathfrak{M})=\omega$,则本定理的结论可以从(13.11)得到. 假设 $\mathrm{Rank}(\mathbf{S})=\beta$ 且 $\mathbf{g}_\Sigma(\mathfrak{M})>\omega$,则据12.4.14和(13.14),$\omega\cdot\beta<\mathbf{g}_\Sigma(\mathfrak{M})$,因此本定理的结论可以从(13.13)得到. □

13.1.9推论 令 $\mathfrak{M}$ 是可容集,$\kappa=|\mathfrak{M}|$,$\alpha=\mathbf{g}_\Sigma(\mathfrak{M})$,$T$ 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的 Σ_1-理论. 若对每一 $\beta<\alpha$,T 有幂$\geqslant\beth_\beta(\kappa)$的模型,则对任意 $\lambda\geqslant\kappa$,T 有幂为 λ 的模型.

证明:据8.1.13,可设 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是 Skolem-片段,$T_{\mathrm{Skolem}}\subseteq T$,据13.1.8和13.1.6(1),就有本推论. □

13.1.10推论 令 $\mathfrak{M}$ 是可数可容集,T 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的 Σ_1-理论. 若对每一 $\beta<\alpha=o(\mathfrak{M})$,$T$ 有幂$\geqslant\beth_\beta(\aleph_0)$的模型,则 T 有每一无穷幂的模型.

证明:据12.4.10(3),$\mathbf{g}_\Sigma(\mathfrak{M})=o(\mathfrak{M})$. 再据13.1.9. □

说明:若 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 不是 $\mathbf{HF}_{\mathfrak{A}}$,则易证对每一 $\beta\in\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$,存在 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的句子 σ 使得 σ 有幂为$\beth_\beta(\aleph_0)$的模型却没有更大幂的模型(参见练习13.1.18),因此13.1.10对 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}\neq\mathbf{HF}_{\mathfrak{A}}$ 是最好的,不能得到改善. 但对 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}=\mathbf{HF}_{\mathfrak{A}}$,有 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}=\mathscr{L}_{\omega\omega}$,所以我们有更好的结果.

13.1.11推论 令 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$的 Skolem-可容片段使得 $\omega=\mathbf{g}_\Sigma(\mathfrak{M})$,$T$ 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的 Σ_1-理论. 若对每一 $n<\omega$,T 有包含 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的一无穷 n-不可辨元集的 Skolem-模型,则 T 有包含一无穷 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$-不可

辨元集的 Skolem-模型.

证明:据13.1.8的证明中的(13.10).□

同样,我们也有下列双基数定理:

13.1.12双基数定理 令 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是可容片段使得 $\kappa=|\mathfrak{M}|,\alpha=g_{\Sigma}(\mathfrak{M}),T=T(U)$ 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的 Σ_1-理论. 若对每一 $\beta<\alpha$,存在基数 $\lambda\geqslant\kappa$ 使得 T 允许 $(\beth_{\beta}(\lambda),\lambda)$,则 T 有模型 $\mathfrak{A}=\langle A,U,\cdots\rangle$ 使得 $\mathfrak{A}$ 包含 U 上无穷 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$-不可辨元集.

证明:本定理的证明类似13.1.8的证明,所以下面我们只说明两者的不同之处. 仍假设 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是 Skolem-片段,$T_{\text{Skolem}}\subseteq T$,且假设(通过增加 κ 个新个体常元符号和某些形如 $U(c_x),\neg(c_x\equiv c_y)$ 的公理给 T)T 的每一模型 $\mathfrak{A}$ 有 $|U|\geqslant\kappa$.

令 $\mathscr{L}'_{\mathfrak{M}}(C)$ 如13.1.8证明所规定,且令

$\mathsf{D}\in\mathsf{S}_n\Leftrightarrow\mathsf{D}$ 是 $\mathscr{L}'_{\mathfrak{M}}(\vec{c}_n)$ 的、具有13.1.8证明所规定的性质(1)—(4)和下列性质(5)的超有效性质;对 $\mathscr{L}'_{\mathfrak{M}}$ 的所有项 $t(\vec{v}_n)$,

(5) $U(t(\vec{c}_n))\rightarrow\forall\vec{x}_n\in X[x_1<\cdots<x_n\rightarrow t(\vec{x}_n)\equiv t(\vec{c}_n)]$.

与(13.8)类似的下列(13.15)是一个方向的结果:

若 D 是由某个 $(\mathfrak{A},X,<,\vec{a}_n)$ 给定的、$\mathscr{L}'_{\mathfrak{M}}(\vec{c}_n)$ 的超有效性质,$\langle X,<\rangle$ 是 $U^{\mathfrak{A}}$ 上 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的 n-不可辨元集,$a_1<\cdots<a_n\in X$,则 $\mathsf{D}\in\mathsf{S}_n$.

(13.15)

定义 $\mathsf{S}=\bigcup\limits_{n<\omega}\mathsf{S}_n$ 上的关系 $\prec$ 如3.1.8的证明. 此外,还假设 T 没有包含 $U^{\mathfrak{A}}$ 上不可辨元集的模型 $\mathfrak{A}$. 下证:

$$\langle\mathsf{S},\prec\rangle\text{ 是良建的.}\tag{13.16}$$

证明(13.16)要比证明(13.9)更技巧一些. 假设每一 D_n 有层次 n,且

$$\cdots\prec\mathsf{D}_{n+1}\prec\mathsf{D}_n\prec\cdots\prec\mathsf{D}_1\prec\mathsf{D}_0.$$

令 $\mathsf{D}_n^0=\mathsf{D}_n\cap\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}(\vec{c}_n)$, $\mathsf{D}_\infty^0=\bigcup\limits_{n<\omega}\mathsf{D}_n^0$. 据链并引理8.1.20, D_∞^0 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}(C)$ 的超有效性质. 下令 $(\mathfrak{A},\vec{a}_n,\cdots)$ 是 D_∞^0 的模型,$X=\{\vec{a}_n,\cdots\}$,

$a_i < a_j \Leftrightarrow i < j$，还令 $\mathfrak{A} = \mathrm{Hull}(X, \mathfrak{A}_0)$. 据8.2.10，$\mathfrak{A} \models \mathsf{D}^0_\infty$. 因此 $\mathfrak{A} \models T$，且 $\langle X, < \rangle$ 是 $\mathfrak{A}$ 中 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$-不可辨元集. 下证 $\langle X, < \rangle$ 是 $U^{\mathfrak{A}}$ 上的不可辨元集. 为此设 $u \in U^{\mathfrak{A}}$，要证 $\langle X, < \rangle$ 的递增 n 元组在 $(\mathfrak{A}, u)$ 中满足相同的公式（若对 $\vec{u}_k$ 也同样可证）. 因为 $\mathfrak{A} = \mathrm{Hull}(X)$，所以存在项 $t(\vec{v}_m)$ 使 $\mathfrak{A} \models u \equiv t(\vec{a}_m)$. 于是，据公式(5)，$\mathfrak{A} \models u \equiv t(\vec{x}_m)$，其中 $x_1 < \cdots < x_m \in X$. 现假设 $n < \omega$，$x_1 < \cdots < x_n$，$y_1 < \cdots < y_n \in X$. 只须证对所有公式 $\varphi(\vec{v}_{n+1})$，

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{x}_n, u] \Rightarrow \mathfrak{A} \models \varphi[\vec{y}_n, u].$$

选择递增 m 元组 $z_1 < \cdots < z_m$ 使得 $z_1 > x_n$，$z_1 > y_n$. 考虑由

$$\varphi(\vec{v}_n, t(v_{n+1}, \cdots, v_{n+m})/v_{n+1})$$

给定的公式 $\psi(\vec{v}_{n+m})$. 因为 $u = t(\vec{z}_m)$，所以 $\mathfrak{A} \models \psi[\vec{x}_n, \vec{z}_m]$，因此据 $\langle X, < \rangle$ 的不可辨性，$\mathfrak{A} \models \psi[\vec{y}_n, \vec{z}_m]$，从而有 $\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{y}_n, u]$. 这样我们就证明了 $\langle X, < \rangle$ 是 U 上的不可辨元集，从而证明了(13.16).

定义 Rank(D)，Rank(S)如前，如证明(13.10)那样证明下列(13.17)：

设 Rank(S)$=n<\omega$，则没有 $\mathfrak{A} \models T$ 含 $U^{\mathfrak{A}}$ 上无穷 n-不可辨元集.

(13.17)

用(13.17)和13.1.7(2)，我们有

若 Rank(S)$=n<\omega$，则对任意基数 λ，T 不允许 $(\beth_{n+1}(\lambda), \lambda)$.

(13.18)

假设 $\mathfrak{A} \models T$，$\langle X, < \rangle$ 是 $U = U^{\mathfrak{A}}$ 上的 n-不可辨元集，$a_1 < \cdots < a_n \in X$. 我们令 $\mathsf{D} \in \mathsf{S}_n$ 是由 $(\mathfrak{A}, X, <, \vec{a}_n)$ 给定的超有效性质，$\beta = \mathrm{Rank}(\mathsf{D})$. 对应(13.12)，下证：

$$|X| < \beth_{\omega\cdot(\beta+1)}(|U|). \tag{13.19}$$

(13.19)的证明仍是运用 Erdös-Rado-定理且施归纳于 β. 此证明非常类似(13.12)的证明，所以在此不再赘述.

假设 $\beta = \mathrm{Rank}(\mathsf{S})$，据(13.19)，有

$$\mathfrak{A} \models T \Rightarrow |A| < \beth_{\omega\cdot\beta}(|U^{\mathfrak{A}}|). \tag{13.20}$$

据与(13.14)的证明完全相同的证明，有

$$\mathrm{Rank}(\mathbf{S})<\mathbf{g}_{\Sigma}(\mathfrak{M}). \tag{13.21}$$

现在不难证明本定理的结论. □

13.1.13双基数定理 令 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是可容片段使得 $\kappa=|\mathfrak{M}|, \alpha=\mathbf{g}_{\Sigma}(\mathfrak{M}), T$ 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的 Σ_1-理论. 若对每一 $\beta<\alpha$，存在基数 $\lambda\geqslant\kappa$ 使得 T 允许$(\beth_{\beta}(\lambda),\lambda)$，则对所有$\geqslant\kappa$ 的基数 δ, T 允许(δ,κ).

证明：据8.1.13，不妨假设 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是 Skolem-片段，$T_{\mathrm{Skolem}}\subseteq T$，据13.1.9和13.1.6(2)，就有本推论. □

13.1.14推论 令 $\mathfrak{M}$ 是可数可容集，T 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的 Σ_1-理论. 若对每一 $\beta<\alpha=o(\mathfrak{M})$，存在基数 $\lambda\geqslant\omega$ 使得 T 允许$(\beth_{\beta}(\lambda),\lambda)$，则对所有的 $\lambda\geqslant\omega$, T 允许(λ,ω).

证明：据12.4.10(3)，$\mathbf{g}_{\Sigma}(\mathfrak{M})=o(\mathfrak{M})$，再据13.1.13. □

注意：从定理13.1.2和13.1.14易得双基数定理13.1.4，其它情况也类似，这说明本小节的结果是对前两节结果的概括. 但要注意两者有一个根本的差别：对于后者，"$\mathfrak{M}$ 是可容集"这个条件是本质的，不能删去；而对前者，它们只是提供了一个方便的装置.

我们还可以进一步弱化本小节的诸结果的假设条件. 当然，为了得到 $\mathbf{g}_{\Sigma}(\mathfrak{M})=o(\mathfrak{M})$，我们还是要求可数集 $\mathfrak{M}$ 是可容集.

另外，我们还须注意：从应用的角度来说，双基数形式的向上-LS-定理更有用. 例如，当我们在带始元的集合论模型中工作时，双基数定理是相当自然的. 下举一例说明之.

13.1.15例 令 $\mathfrak{M}$ 是可容集使得 $\kappa=|\mathfrak{M}|, \alpha=\mathbf{g}_{\Sigma}(\mathfrak{M})$，对任意 $\beta<\alpha$，存在 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的、包含 U 的 Σ_1-理论 T 和 ξ，其中 $\beta<\xi<\mathbf{g}_{\Sigma}(\mathfrak{M})$，使得

(1) T 有类型$(\beth_{\beta}(\kappa),\kappa)$的模型，

(2) 若 $\mathfrak{B}$ 是 T 的类型(λ,δ)的模型，则 $\lambda\leqslant\beth_{\beta}(\delta)$.

特别地，T 没有类型$(\beth_{\alpha}(\kappa),\kappa)$的模型.

证明：令 T_0 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的、包含<且制约 β 的 Σ_1-理论. 据12.4.15，令 $\xi<\mathbf{g}_{\Sigma}(\mathfrak{M})$大于 T_0制约的所有序数. 在构造理论 T 之前，我

们先描述预期的模型 $\mathfrak{A}$ 使得 $\mathfrak{A}\models T$ 是类型为 $(\beth_\beta(\kappa),\kappa)$ 的模型. 令 A 是幂为 κ 的始元集, $\mathfrak{A}_0=\langle A_0,<,\cdots\rangle$ 是 T_0 的模型, 其中 $<$ 有序型 β. 据向下-LS-定理, 不妨假设 $|A_0|\leqslant\max(\kappa,|\beta|)$, 所以我们完全可以假设 $A_0\subseteq A\cup\beta$. 现令

$$\mathfrak{A}=\langle A\cup\mathbf{V}_A(\beta),A,\in,F,A_0,<,\cdots\rangle,$$

其中

$\mathbf{V}_A$ 见第0章 §7开头部分,

$F_0(a)=(a$ 在 $\mathbf{V}_A$ 中的秩$)$,

$F(a)=(<$ 的第 $F_0(a)$ 个元素$)$.

构造 T 如下: 对每一 $x\in\mathfrak{M}$, 令 c_x 是个体常元符号. 因为 $|\mathfrak{M}|=\kappa$, 所以这样的 c_x 有 κ 个. 令 T 由下列句子组成:

$\neg(c_x\equiv c_y)$, 对所有 $x,y\in\mathfrak{M},x\neq y$,

$U(c_x)$, 对所有 $x\in\mathfrak{M}$,

$\forall x(x\in a\leftrightarrow x\in b)\rightarrow a\equiv b$ (在 **KPU** 中成立),

$\forall xy[x\in y\rightarrow F(x)<F(y)]$,

$\varphi^{(U_0)}$, 对所有 $\varphi\in T_0$.

这里 U 和 U_0 是两个新一元谓词符号. 显然, T 在 $\mathfrak{A}$ 中成立, 其中 $U^{\mathfrak{A}}=A,U_0^{\mathfrak{A}}=A_0$. 另一方面, 若 $\mathfrak{B}=\langle B,U,E,F,U_0,<,\cdots\rangle$ 是 T 的另一个模型, 则 $\langle U_0,<,\cdots\rangle\models T_0$, 所以 $<$ 被良序且其序型 $<\xi$. 但 F 保证 E 是良建的且 $\mathrm{Rank}(E)<\xi$, 所以 $\langle B,U,E\rangle$ 同构 $\mathbf{V}_U(\xi)$ 的一子模型, 因此 $|B|\leqslant\beth_\xi(|U|)$. □

练 习

13.1.16 令 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$-片段, $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}^*$ 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的 Skolem-片段, $\mathfrak{A}^*=\langle A,U,\cdots\rangle$ 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}^*$-模型使得 $\mathfrak{A}^*$ 有 U 上的无穷不可辨元集. 证明: 对所有基数 $\lambda\geqslant|A|$, 存在幂为 λ 的结构 $\mathfrak{B}^*=\langle B,V,\cdots\rangle$ 使

$$\mathfrak{B}^*\equiv_{\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}}\mathfrak{A}^*,\quad |V|=|U|.$$

13.1.17 令 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ 的可数片段, T 是 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的句子集. 假

设对所有 $\alpha<\omega_1$，存在 $\kappa\geqslant\beth_\alpha$ 使得 T 允许 $(\beth_\beta(\kappa),\kappa)$，则对所有 $\lambda\geqslant\mu\geqslant\omega$，$T$ 允许 (λ,μ).

[提示：据13.1.16得到 U 上的不可辨元集 $\{x_1,x_2,\cdots\}$，然后通过增加命名诸 x_i 的个体常元构成一语言，再得到该语言中的不可辨元 $\{u_1,u_2,\cdots\}\subseteq U$.]

13.1.18 令 $\mathfrak{M}$ 是可容集，$\alpha=\mathbf{g}(\mathfrak{M})$，

(1) 证明 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的单句的 Hanf-数至少是

$$\lambda=\sup\{\beth_\alpha(\kappa):\kappa=|X|,\text{对某个 } X\in\mathfrak{M}\}，$$

即证明对 $\lambda_0<\lambda$，存在 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的句子 σ 使得 σ 有幂 $\geqslant\lambda_0$ 的模型但没有幂 $\geqslant\lambda$ 的模型. [提示：给定 $X\in\mathfrak{M}$，$\beta<\mathbf{g}(\mathfrak{M})$，构造 $\mathbf{V}_X(\beta)$.]

(2) 证明对某个极限序数 λ，上述 Hanf-数总是形如 $\beth_\lambda$.

13.1.19 令 $\mathfrak{M}$ 是可容集使得 $\mathrm{o}(\mathfrak{M})>\omega$，

(1) 证明每一 $\sigma\in\mathfrak{M}$ 能以下列方式属于一个 Skolem-片段 $\mathscr{L}_N\in\mathfrak{M}$：$\sigma$ 的每一模型(不只是 $\mathfrak{M}$ 中的那些模型)能膨胀到 T_{Skolem} 的模型.

(2) 证明 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的单句的 Hanf-数是

$$\lambda=\sup\{\beth_\alpha(\kappa):\ \kappa=|X|,X\in\mathfrak{M}\}，$$

其中 $\alpha=\mathbf{g}(\mathfrak{M})$. 即证明若 $\sigma\in\mathfrak{M}$ 没有每一幂 $\geqslant|\mathfrak{M}|$ 的模型，则存在 $X\in\mathfrak{M}$ 和 $\beta<\mathbf{g}(\mathfrak{M})$ 使得 σ 没有幂 $\geqslant\beth_\beta(|X|)$ 的模型.

[提示：集合 X 就是(1)中的 $\mathscr{L}_N$. 修正13.1.8的证明.]

(3)(Barwise-Kunen,[1971]) 证明若 $\mathfrak{M}$ 是纯可容集，则 $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的单句的 Hanf-数是 $\beth_{\mathbf{g}(\mathfrak{M})}$，即使当 $\mathrm{o}(\mathfrak{M})=\omega$ 时也如此.

(4)(Dickmann,[1975],ch4 § 5) 称序数 α 是 $\mathscr{L}_{\kappa^+\omega}$-**可达序数**(简称 κ^+-**可达序数**) ⇔ 存在 $\mathscr{L}_{\kappa^+\omega}$的、包含二元关系符号 $<$ 和一元谓词 U 的句子 σ 使得

① 对 σ 的每一模型 $\mathfrak{A}$，$U^{\mathfrak{A}}=\mathrm{field}(<^{\mathfrak{A}})$ 且 $<^{\mathfrak{A}}$ 良序 $U^{\mathfrak{A}}$，

② 存在 σ 的模型 $\mathfrak{B}$ 使得 $<^{\mathfrak{B}}$ 有序型 $\geqslant\alpha$.

(这里的定义与12.4.2一致.)令 $\mathbf{AC}_{\kappa^+}$ 是所有 κ^+-可达序数的类，

$g(\kappa^+)$是第一个不在AC_{κ^+}中的序数. 证明:

(1) α是κ^+-可达序数 $\Rightarrow h(\mathscr{L}_{\kappa^+\omega})>\beth_\alpha$.

(2) $\mathscr{L}_{\kappa^+\omega}$的 Hanf-数 $h(\mathscr{L}_{\kappa^+\omega})=\beth_{g(\kappa^+)}$.

13.1.20 令 $\mathfrak{M}$ 是可容集, $\alpha=g_\Sigma(\mathfrak{M})$, 且令

$\lambda_0=\sup\{\beth_\alpha(\kappa):\kappa=|X|$, 对某个 $X\in\mathfrak{M}\}$,

$\lambda_1=\beth_\alpha(|\mathfrak{M}|)$.

据13.1.8, $\mathscr{L}_{\mathfrak{M}}$ 的 Σ_1-理论的 Hanf-数 $\lambda\leqslant\lambda_1$.

(1) 证明 $\lambda\geqslant\lambda_0$,

(2) 证明若 $\mathfrak{M}$ 是可数的且 $\mathfrak{M}\neq \mathbf{HF}_{\mathfrak{A}}$, 或者 $g_\Sigma(\mathfrak{M})>o(\mathfrak{M})$, 则 $\lambda_0=\lambda_1$.

§2 $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$的 Hanf-数

本节我们要讨论当 $\lambda>\omega$ 时, $\mathscr{L}_{\kappa\lambda}$的 Hanf-数, 特别是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega_1}$的 Hanf-数.

在第11章和本章§1的13.1.19(4), 我们已经讨论了有穷量词语言 $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$的 Hanf-数. 在那里我们已知, $h(\mathscr{L}_{\kappa\omega})$的确定值一般独立于 **ZFC** 的公理. 但是, 在 **ZFC** 中我们能够得到 $h(\mathscr{L}_{\kappa\omega})$的合理界限, 即这种界限可以用 **ZFC** 中的基数运算来表达. 在本节我们将看到即使这样的权宜方法对无穷量词语言也是不成立的, 除非我们另外增加公理给 **ZFC**, 否则, 我们不知道 $h(\mathscr{L}_{\omega_1\omega_1})$的界限.

解决这个问题要依赖其它集合论假设. 目前已得到的最好的情况是把**强无穷公理**(即可测基数存在)加到 **ZFC** 上. 本节得到的绝大部分结果都需要这种假设, 只有一个结果(定理13.2.18)需要 **L=V**的假设, 但正如我们所知(参见 Dickmann 的[1975]定理0.4.29和附录 D), **L=V**的假设与非常大基数的存在是矛盾的.

本节的结果的证明所需的技巧分为两类:

(1) 运用划分演算、不可辨元和超积构造结构(模型)的方法,

使 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega_1}$ 的 Hanf-数处于可用某些划分基数表达的界限之间. 特别是用这些方法得到 $h(\mathscr{L}_{\omega_1\omega_1})$ 的下界. 这些技巧是 Silver 在其[1966]和[1971]中建立起来的.

(2) 用更大的基数(可测基数、强紧致基数)给出 $h(\mathscr{L}_{\omega_1\omega_1})$ 的上界, 或者说明不可能证明某些基数是 $h(\mathscr{L}_{\omega_1\omega_1})$ 的上界. 这些结果中最有意思的是 Kunen 在其[1970]得到的结果(13. 2. 14).

一、Hanf-数的上界

13. 2. 1定理 假设存在强紧致基数 κ 且 $\lambda\leqslant\kappa$. 若 $\mathscr{L}_{\lambda\lambda}$ 的句子 σ 有任意幂 $<\kappa$ 的模型, 则 σ 有任意大幂的模型, 从而 $h(\mathscr{L}_{\lambda\lambda})\leqslant\kappa$.

证明: 令 $\lambda_1\geqslant\kappa$ 是任意基数, $\mathscr{L}_1=\mathscr{L}\cup\{c_\beta:\beta<\lambda_1\}$, 其中诸 c_β 是新个体常元, 令

$$\Sigma=\{\sigma\}\cup\{\neg(c_\beta\equiv c_\gamma):\gamma,\beta<\lambda_1,\gamma\neq\beta\},$$

令 Σ_1 是 Σ 的幂 $<\kappa$ 的子集. 据假设, σ 有任意幂 $<\kappa$ 的模型, 则 σ 有幂 $\geqslant|\Sigma_1|$ 的模型 $\mathfrak{A}$. 显然, $(\mathfrak{A},a)_{a\in A}$ 是 Σ_1 的模型. 据强紧致性, Σ 有模型 $\mathfrak{B}$. 易见 $\mathfrak{B}$ 是 σ 的幂 $\geqslant\lambda_1$ 的模型. 因此 $h(\mathscr{L}_{\lambda\lambda})\leqslant\kappa$. □

13. 2. 2推论 若 κ 是强紧致基数, 则对任意 $\mathscr{L}$, $h(\mathscr{L}_{\kappa\kappa})=\kappa$.

证明: 显然, $h(\mathscr{L}_{\kappa\kappa})\geqslant\kappa$. 而据13. 2. 1, 有 $h(\mathscr{L}_{\kappa\kappa})\leqslant\kappa$. □

另一方面, 我们有:

13. 2. 3定理 若 κ 是强紧致基数且 λ 和 $\mathscr{L}_{\lambda\lambda}$ 的幂都 $<\kappa$, 则

$$h(\mathscr{L}_{\lambda\lambda})<\kappa.$$

证明: 令 $\mu=\max\{|\mathscr{L}|,\lambda\}$, 则 $\lambda,\mu<\kappa$. 因为 κ 强不可达, 所以

$$|\mathrm{Scnt}(\mathscr{L}_{\lambda\lambda})|\leqslant\mu^\lambda<\kappa. \tag{13.22}$$

令 X 是所有没有任意大幂模型的 $\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$-句子的集合, 据(13. 22), $|X|<\kappa$. 令 $\chi_\sigma=\sup\{\xi:\xi$ 是 σ 的一模型的基数$\}$. 据13. 2. 1的逆否形式, 对所有 $\sigma\in X$, $\chi_\sigma<\kappa$. 显然, $h(\mathscr{L}_{\lambda\lambda})\leqslant\sup\{\chi_\sigma^+:\sigma\in X\}$. 因为 κ 是极限基数, 所以对 $\sigma\in X$, $\chi_\sigma^+<\kappa$. 因为 κ 又是正则基数且 $|X|<\kappa$, 所以 $\sup\{\chi_\sigma^+:\sigma\in X\}<\kappa$. 因此 $h(\mathscr{L}_{\lambda\lambda})<\kappa$. □

13.2.4推论 假设存在强紧致基数且令第一个强紧致基数为κ_0，若$|\mathscr{L}|<\kappa_0$，则$\mathrm{h}(\mathscr{L}_{\omega_1\omega_1})<\kappa_0$. □

从上面诸结果自然产生一个问题：对$\mathrm{h}(\mathscr{L}_{\omega_1\omega_1})$是否有可能得到更小的上界. Silver 在其[1966]对这个问题作了部分回答，我们将在下面一系列定理中给出 Silver 的结果. 这些定理还给出了当$|\mathscr{L}|\leqslant\aleph_0$时$\mathscr{L}_{\omega_1\omega_1}$的前束全称句子集的 Hanf 的上界$\kappa(\omega_1)$.

我们称集合Γ是$\mathscr{L}$的**Skolem-句子集**$\Leftrightarrow$ $\mathscr{L}$是 Skolem-语言且对每一$n\geqslant 1$和$\varphi\in\mathrm{Form}_n(\mathscr{L})$，

$$\forall\vec{v}_n[\exists v_0\varphi(v_0,\vec{v}_n)\leftrightarrow\varphi(F_\varphi(\vec{v}_n),\vec{v}_n)]\in\Gamma,$$

其中F_φ是φ的 Skolem-函数.

若Γ是$\mathscr{L}$的 Skolem-句子集，$\mathfrak{A}$是$\mathscr{L}$的结构，$\langle X,<\rangle$是线序集，我们用$\mathscr{H}(\Gamma;\langle X,<\rangle;\mathfrak{A})$表示

(1) $\langle X,<\rangle$是$\mathfrak{A}$的不可辨元集，

(2) $\Gamma=\{\varphi\in\mathrm{Form}(\mathscr{L})$：存在$x_1<\cdots<x_n\in X$且$\mathfrak{A}\models\varphi[\vec{x}_n]\}$，

(3) $\mathfrak{A}=\mathrm{Hull}(X,\mathfrak{A})$.

注意：以后我们在不致混淆之处，把(2)的等式右边的集合简写为$\mathrm{Form}_{\mathfrak{A}}(X,<)$，甚至$\mathrm{Form}_{\mathfrak{A}}(X)$.

13.2.5定理 假设Γ是$\mathscr{L}$的 Skolem-句子集，$\langle\mathfrak{B}_\xi:\xi<\kappa\rangle$是结构序列使得对每一$\xi<\kappa$，$\mathscr{H}(\Gamma;\langle\xi,\in\rangle;\mathfrak{B}_\xi)$. 若$\langle Y,<\rangle$是良序且$\mathscr{H}(\Gamma;\langle Y,<\rangle;\mathfrak{B})$，则每一在所有$\mathfrak{B}_\xi$中成立的$\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$-前束全称句也在$\mathfrak{B}$中成立.

证明：令σ是$\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$-前束全称句使得对每一$\xi<\kappa$，$\mathfrak{B}_\xi\models\sigma$. 不妨令$\sigma=(\forall v\upharpoonright\beta)\varphi$，其中$\beta<\kappa$且$\varphi$是无量词公式. 假设要证的结果不成立，则$\mathfrak{B}\models\neg\sigma$，因此存在$f\in B^\beta$使得$\mathfrak{B}\models\neg\varphi[f]$. 因为$\beta<\kappa$，所以存在$X\subseteq Y$，$|X|<\kappa$使得$\mathrm{Ran}(f)\subseteq\mathrm{Hull}(X,\mathfrak{B})=\mathfrak{C}$. 因为$\mathfrak{C}\prec\mathfrak{B}$且$\varphi$是无量词公式，所以$\mathfrak{C}\models\neg\varphi[f]$. 令$\alpha$是$\langle X,<\upharpoonright X\rangle$的序型，则存在保序映射$g:\langle X,<\upharpoonright X\rangle\to\langle\alpha,\in\upharpoonright\alpha\rangle$. 据15.4.1，$g$能扩张为单射$h:\mathfrak{C}\to\mathfrak{B}_\alpha$，因此$\mathfrak{B}_\alpha\models\neg\varphi[h\circ f]$，而这与$\mathfrak{B}_\alpha\models\sigma$矛盾. □

令$[\kappa]^{<\omega}=\mathscr{P}_\omega(\kappa)$是$\kappa$的所有有穷子集的集合. 我们知道划分

性质 $\kappa\to(\lambda)^{<\omega}_{\mu}$ 表示对每一函数 $f:[\kappa]^{<\omega}\to\mu$，存在幂为 λ 的 $X\subseteq\kappa$ 使得对每一 $n<\omega$，f 在 $[X]^n$ 上是常值函数.（参见9.3.17(5)和 Dickmann 的[1975]，p.51.）

13.2.6定理 令 $\mathrm{Sm}(\mathfrak{A})=\mathscr{L}$，$C\subseteq A$，$<$ 良序 C 且 $|C|=\kappa$，

(1) 若 $|\mathscr{L}|\leqslant\lambda$，$\alpha\in\mathbf{ON}$ 且 $\kappa\to(\alpha)^{<\omega}_{2^\lambda}$，则存在 $X\subseteq C$ 使得 $\langle X,<\upharpoonright X\rangle$ 有序型 α 且 $\langle X,<\upharpoonright X\rangle$ 是 $\mathfrak{A}$ 的不可辨元集，

(2) 若 $|\mathscr{L}|\leqslant\aleph_0$，$\kappa\to(\alpha)^{<\omega}_{2}$ 且 α 是极限序数，则与(1)相同的结论成立.

证明：(1) 不妨假设 $C=\kappa$ 且 $<\ =\ \in\upharpoonright\kappa$（因为我们总可以在 $\langle C,<\rangle$ 和 $\langle\kappa,\in\upharpoonright\kappa\rangle$ 之间做一同构映射使得我们要证明的东西保持不变）. 对 κ 中递增 n 元组 $\vec{x}_n$，定义映射 f 如下：

$$f(\{\vec{x}_n\})=\{\varphi:\varphi\in\mathrm{Form}_n(\mathscr{L}_{\omega\omega})\text{且 }\mathfrak{A}\models\varphi[\vec{x}_n]\}.$$

显然，f 把 $[\kappa]^{<\omega}$ 映射到 $\mathscr{P}(\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\omega\omega}))$ 中，而后者的基数 $\leqslant 2^\lambda$. 据假设 $\kappa\to(\alpha)^{<\omega}_{2^\lambda}$，存在序型 α 的 $X\subseteq\kappa$ 使得 X 对 f 是**齐性集**(9.3.17(4))：即对每一 $n<\omega$，f 在 $[\kappa]^n$ 上是常值函数. 据 f 的定义，显见，$\langle X,<\upharpoonright X\rangle$ 是 $\mathfrak{A}$ 的不可辨元集.

(2) 假设 α 是极限序数，据 Erdös-Rado-定理，

$$\kappa\to(\alpha)^{<\omega}_{2}\Rightarrow\kappa\to(\alpha)^{<\omega}_{2^\omega}.$$

因此从(1)立得(2). □

13.2.7定理 令 σ 是 $\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$-前束全称句，$|\mathscr{L}|\leqslant\lambda$ 且 $\lambda\in\mathbf{CN}_1$，

(1) 若 σ 有幂为 τ 的模型 $\mathfrak{A}$，其中 $\tau\to(\kappa)^{<\omega}_{2^\lambda}$，则 σ 有每一幂 $\geqslant\lambda$ 的模型 $\mathfrak{B}$；

(2) 若 $\mathrm{cf}(\kappa)>2^\lambda$ 且 σ 有幂为 τ 的模型 $\mathfrak{A}$，其中对每一 $\alpha<\kappa$，$\tau\to(\alpha)^{<\omega}_{2^\lambda}$，则 σ 有每一幂 $\geqslant\lambda$ 的模型 $\mathfrak{B}$.

说明：在上述(1)和(2)两种情况下，可以把 $\mathfrak{B}$ 看作是与 $\mathfrak{A}$ 有 $\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$-初等等价关系的模型.

证明：令 $\mathfrak{A}$ 是 σ 的幂为 τ 的模型，$\mathrm{Sm}(\mathfrak{A})=\mathscr{L}$，$\mathscr{L}^*$ 是 $\mathscr{L}$ 的 Skolem-语言. 据第8章的有关结果，$|\mathscr{L}^*|\leqslant\lambda$，因此不妨设 $\mathfrak{A}$ 就是

Skolem-结构.

证(1)：据13.2.6(1)，存在 $X\subseteq A$ 和 X 的序型为 κ 的良序 $<$ 使得 $\langle X,<\rangle$ 是 $\mathfrak{A}$ 的不可辨元集. 对每一 $\gamma<\kappa$，令 X_γ 由 X 的前 γ 个元素组成，$\mathfrak{B}_\gamma=\mathrm{Hull}(X_\gamma,\mathfrak{A})$. 因为 $\mathfrak{B}_\gamma\subseteq\mathfrak{B}$ 且 σ 是前束全称句，所以对每一 $\gamma<\kappa$，$\mathfrak{B}_\gamma\models\sigma$. 令 $\Gamma=\mathrm{Form}_{\mathfrak{A}}(X,<)$. 因为对每一 $\gamma<\kappa$，$\mathscr{K}(\Gamma;\langle X_\gamma,<\rangle;\mathfrak{B}_\gamma)$，所以据13.2.5，若 $\langle Y,\prec\rangle$ 是良序集，$\mathfrak{B}$ 是结构使得 $\mathscr{K}(\Gamma;\langle Y,\prec\rangle;\mathfrak{B})$，则 $\mathfrak{B}\models\sigma$. 任给基数 $\mu\geqslant\lambda$，取 $Y=\mu$ 且 $\prec=\in\restriction\mu$. 据8.2.5(2)，存在结构 $\mathfrak{C}$ 使得

$$\mathscr{K}(\Gamma;\langle\mu,\in\restriction\mu\rangle;\mathfrak{C}),$$

因此 $\mathfrak{C}=\mathrm{Hull}(\mu,\mathfrak{C})$. 易证 $\mathrm{Hull}(\mu,\mathfrak{C})$ 是 $\mathfrak{C}$ 的含 μ 的最小子结构，故 $|\mathrm{Hull}(\mu,\mathfrak{C})|\geqslant\mu$，即 $|\mathfrak{C}|\geqslant\mu$；另一方面，$\mathrm{Hull}(\mu,\mathfrak{C})$ 的个体域是

$$\{t^{\mathfrak{A}}[\vec{x}_n]:n<\omega,\ \vec{x}_n\in\mu,\ t\text{ 是 }\mathscr{L}\text{-项且 }|\mathrm{Fv}(t)|=n\}.$$

而 $|\mathrm{Term}(\mathscr{L}_{\omega\omega})|\leqslant\lambda$，所以 $|\mathrm{Hull}(\mu,\mathfrak{C})|\leqslant\lambda$. 因为 $\lambda\leqslant\mu$，所以 $|\mathfrak{C}|\leqslant\mu$，因此 $|\mathfrak{C}|=\mu$. 因为 σ 是前束全称句且 $\mathfrak{A}\models\sigma$，所以 $\sigma\in\Gamma$. 据 $\mathscr{K}(\Gamma;\langle\mu,\in\restriction\mu\rangle;\mathfrak{C})$ 的定义，$\Gamma=\mathrm{Form}_{\mathfrak{C}}(\mu,\in\restriction\mu)$，所以 $\mathfrak{C}\models\sigma$. (1)证毕. **注意**：$\Gamma\supseteq\mathrm{Th}_{\omega\omega}(\mathfrak{A})$. 因为 $\mathscr{K}(\Gamma;\langle\mu,\in\restriction\mu\rangle;\mathfrak{C})$，所以对每一 $\sigma\in\Gamma$，$\mathfrak{C}\models\sigma$，因此 $\mathfrak{C}\equiv\mathfrak{A}$.

证(2)：令 $\mathfrak{A}\models\sigma$ 且 $|A|=\tau$，据13.2.6(1)，对每一 $\xi<\kappa$，存在 $X_\xi\subseteq A$ 和序型为 ξ 的良序 $\langle X_\xi,<_\xi\rangle$ 使 $\langle X_\xi,<_\xi\rangle$ 是 $\mathfrak{A}$ 的不可辨元集. 定义映射 $h:\kappa\to\mathscr{P}(\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\kappa\kappa}))$ 如下：$h(\xi)=\mathrm{Form}_{\mathfrak{A}}(X_\xi,<_\xi)$. 因为 $|\mathscr{L}|\leqslant\lambda$，所以 $|\mathrm{Ran}(h)|\leqslant 2^\lambda<\mathrm{cf}(\kappa)$. 因为

$$\kappa=\bigcup\{h^{-1}(x):x\in\mathrm{Ran}(h)\},$$

所以存在集合 $S\subseteq\kappa$ 使得 $|S|=\kappa$ 且 $h\restriction S$ 有常值. 不妨令这个常值为 Γ. 据基数的基本性质，$\sup S=\bigcup S=\kappa$，所以 S 与 κ 共尾. 因此对 $\alpha\in S$，定义 $Y_\alpha=X_\alpha$，$<_\alpha=<_\alpha$. 对 $\alpha\notin S$，$\alpha<\kappa$，定义 α_1 是第一个 $\beta\in S$ 使得 $\alpha<\beta$，令 Y_α 是由 X_{α_1} 的前 α 个元素组成，$<_\alpha=<_{\alpha_1}\restriction Y_\alpha$. 显然，这样定义的有序集满足 $\mathrm{Form}_{\mathfrak{A}}(Y_\alpha,<_\alpha)=\Gamma$. 下面我们令 $\mathfrak{B}_\alpha=\mathrm{Hull}(Y_\alpha,\mathfrak{A})$. 显然，我们有 $\mathscr{K}(\Gamma;\langle Y_\alpha,<_\alpha\rangle;\mathfrak{B}_\alpha)$ 且对每一 $\alpha<\kappa$，$\mathfrak{B}_\alpha$

$\vdash\sigma$. 剩下的证明如同(1). □

以后我们用 $\mathrm{PU}_{\lambda\lambda}$来指称 $\mathscr{L}_{\lambda\lambda}$的前束全称句子集.

令 $\hat{\kappa}(\lambda)$是最小的基数 τ 使得 $\tau\to(\lambda)_2^{<\omega}$.

13.2.8定理 令 $\mathscr{L}$ 是语言，$\mu=\max\{|\mathscr{L}|,\aleph_0\}$，$\lambda\in\mathbf{CN}_1$，

(1) $\mathrm{h}(\mathrm{PU}_{\lambda\lambda})$不超过第一个 τ 使 $\tau\to(\lambda)_{2^\mu}^{<\omega}$，只要这样的 τ 存在.

(2) 若 $\mu\not\to(\lambda)_2^{<\omega}$，比方说，$\mu<\lambda$，则 $\mathrm{h}(\mathrm{PU}_{\lambda\lambda})\leqslant\hat{\kappa}(\lambda)$.

(3) 若 $|\mathscr{L}|\leqslant\aleph_0$，则 $\mathrm{h}(\mathrm{PU}_{\omega_1\omega_1})\leqslant\hat{\kappa}(\omega_1)$.

证明：(1)只是13.2.7(1)的重述.

(2) 假设 $\mu\not\to(\lambda)_2^{<\omega}$，据 Erdōs-Rado-定理，可得$2^\mu\not\to(\lambda)_2^{<\omega}$. 据 $\hat{\kappa}(\lambda)\to(\lambda)_2^{<\omega}$和 Silver 在其[1966]，p. 54得到的下列结果

$$\kappa\to(\lambda)_2^{<\omega}\text{且 }\mu\not\to(\lambda)_2^{<\omega}\Rightarrow\kappa\to(\lambda)_\mu^{<\omega},$$

我们有 $\hat{\kappa}(\lambda)\to(\lambda)_{2^\mu}^{<\omega}$. 据(1)，$\mathrm{h}(\mathrm{PU}_{\lambda\lambda})\leqslant\hat{\kappa}(\lambda)$.

(3)是(2)的特例. □

13.2.9定理 若$|\mathscr{L}|$，$\lambda<\hat{\kappa}(\lambda)$，则 $\mathrm{h}(\mathrm{PU}_{\lambda\lambda})<\hat{\kappa}(\lambda)$.

证明：显然，$\mu=\max\{|\mathscr{L}|,\aleph_0\}<\hat{\kappa}(\lambda)$，因此 $\mu\not\to(\lambda)_2^{<\omega}$，据13.2.8(2)，有 $\mathrm{h}(\mathrm{PU}_{\lambda\lambda})\leqslant\hat{\kappa}(\lambda)$. 下证 $\mathrm{h}(\mathrm{PU}_{\lambda\lambda})\neq\hat{\kappa}(\lambda)$. 据11.2.7，

$$\mathrm{cf}(\mathrm{h}(\mathrm{PU}_{\lambda\lambda}))\leqslant|\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\lambda\lambda})|\leqslant\tau^\lambda,$$

其中 $\tau=\max\{|\mathscr{L}|,\lambda\}$. 据 Dickmann 的[1975]的0.5.17，$\hat{\kappa}(\lambda)>\omega$是强不可达基数，所以 $\tau^\lambda<\hat{\kappa}(\lambda)$，因此 $\mathrm{cf}(\mathrm{h}(\mathrm{PU}_{\lambda\lambda}))<\hat{\kappa}(\lambda)$，从而

$$\mathrm{h}(\mathrm{PU}_{\lambda\lambda})\neq\hat{\kappa}(\lambda).\ \square$$

13.2.10推论 令 $\mathscr{L}$ 包含二元关系$<$，$|\mathscr{L}|\leqslant\aleph_0$，$\mathfrak{A}$ 是幂为 κ 的结构使得 $\kappa\to(\omega_1)_2^{<\omega}$且$<^{\mathfrak{A}}$ 良序 A. 对每一无穷基数 λ，存在幂为 λ 的结构 $\mathfrak{B}$ 使得 $\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{B}$ 且$<^{\mathfrak{B}}$ 良序 B.

(**注意**：即使$<^{\mathfrak{A}}$ 良序 A 的一真子集，本推论仍成立.)

证明：因为"$<$是良序"是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega_1}$的前束全称句(参见1.2.3)，所以据13.2.8(1)，立得本推论. □

对 κ 增加更严格的划分要求，Silver 改善了13.2.10的结论.

13.2.11定理 (1)(Silver) 假设$|\mathscr{L}|\leqslant\aleph_0$且 $\mathscr{L}$ 包含$<$，令 $\mathfrak{A}$

是 $\mathscr{L}$ 的幂为 κ 的结构使得 $\kappa \to (\kappa)_2^{<\omega}$ 且 $<^{\mathfrak{A}}$ 良序 A(的一子集). 对每一 $\lambda \in \mathbf{CN}_1, \lambda > \omega$,存在幂为 λ 的结构 $\mathfrak{B}$ 使得 $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$ 且 $<^{\mathfrak{B}}$ 以序型 λ 良序 B(的一子集). 若 $\lambda \leqslant \kappa$,则能选择 $\mathfrak{B}$ 使得 $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$.

(2)(Helling,[1964]) 若 κ 是可测基数,则(1)的结论成立. □

说明:13.2.11实际上是一系列存在定理的一个特例. 证明这些存在定理所使用的技巧更复杂,已超出本书的范围. 请感兴趣的读者参见有关文献.

J. Väänänen 在其[1980]用力迫法还证明了下列定理:

13.2.12定理 若下列理论

ZFC+"存在弱紧致(或可测、或 Ramsay-)基数的真类"

是一致的,则下列理论

ZFC+"$h(\mathscr{L}_{\omega_1\omega_1})$< 第一个弱紧致(或可测、或 Ramsay-)基数"

也是一致的. □

13.2.12的证明也请参见有关文献.

二、Hanf-数的下界

逻辑学家曾希望用形如 $\kappa \to (\lambda)_2^{<\omega}$ 的划分性质来概括前面的定理,得到 $h(\mathscr{L}_{\omega_1\omega_1})$(其中 $|\mathscr{L}| \leqslant \aleph_0$)的上界,而不只是 $h(PU_{\omega_1\omega_1})$ 的上界. 但这些希望由于 Kunen 在其[1968b]和[1970]作出的下列结果而落空. 为了表述这一结果,我们还需下列定义:

13.2.13定义 令 $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{P}(\kappa)$,其中 κ 是基数,

(1) $L_0[\mathscr{D}] = \varnothing$,

(2) $L_\alpha[\mathscr{D}] = \bigcup_{\beta<\alpha} L_\beta[\mathscr{D}]$, 若 α 是极限序数,

(3) $L_{\alpha+1}[\mathscr{D}] = \{a \subseteq L_\alpha[\mathscr{D}] : a$ 相对 $\mathfrak{A}$ 可从 $L_\alpha[\mathscr{D}]$ 一阶定义$\}$,

其中

$$\mathfrak{A} = \langle L_\alpha[\mathscr{D}], \in, \{\langle \xi, \beta_\xi \rangle : \xi, \beta_\xi < \alpha\}, \{\langle \xi, x \rangle : \xi < \alpha \text{ 且 } x \in \mathscr{D} \cap L_\alpha[\mathscr{D}]\}\rangle,$$

(4) $L[\mathscr{D}]=\bigcup_{\alpha\in ON} L_\beta[\mathscr{D}]$.

说明：在下列定理中，我们用 φ_m 表示 **ZFC** 的前 m 个公理（按某个固定的枚举）的合取. $\psi(\pi)$断定 π 是可测基数且个体域是从 π 上一正规超滤 $\mathscr{D}$ 如13.2.13所构造起来.

13.2.14定理（Kunen，[1970]）　若 $\mathbf{V}=\mathbf{L}[\mathscr{D}]$，其中 $\mathscr{D}$ 是可测基数 κ 上的正规超滤，则 $h(\mathscr{L}_{\omega_1\omega_1})>\kappa$.

证明（概述）：令 σ 是下列句子的合取，其中 c 是个体常元符号，F 是一元函数符号：

(1) φ_m，

（据 Silver 的[1966]，若 κ 是可测基数，$\mathscr{D}$ 是 κ 上的正规超滤，且 $\mathbf{V}=\mathbf{L}[\mathscr{D}]$，则 **GCH** 成立.）

(2) $\psi(c)$，

(3) $\neg\exists v_0v_1v_2\cdots[\cdots v_n\in\cdots\in v_2\in v_1\in v_0]$，

(4) $\forall v_2v_3\cdots\exists v_0\forall v_1[v_1\in v_0\leftrightarrow(v_1\equiv v_2\vee v_1\equiv v_3\vee\cdots)]$，

(5) $\forall v_0\exists v_1[v_1\in c\wedge F(v_1)\equiv v_0]$.

显然，σ 是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega_1}$的句子. 可以证明 σ 的模型同构一传递模型 $\mathfrak{M}$ 使得 $\mathfrak{M}\vDash\varphi_m$，且对某个序数 $\alpha\in M$，$\mathfrak{M}$ 满足 $\psi(\alpha)$. 据(4)，对任意 $x\subseteq M$，若 $|x|=\omega$，则 $x\in M$. 据(5)，$|M|=\alpha$. 据 Kunen 的[1970]的8.7和8.6，σ 有基数为 κ 的模型但没有基数$\geqslant\kappa^{++}$的模型. □

一旦有了 $h(\mathscr{L}_{\omega_1\omega_1})>\kappa$，就可证明（参见 Kunen[1970]8.2），

$$h(\mathscr{L}_{\omega_1\omega_1})>\beth_{\kappa^+}，h(\mathscr{L}_{\omega_1\omega_1})>\beth_{(\beth_\kappa^+)}，\cdots.$$

用13.2.5—13.2.11相同的方法和划分演算的结果，我们能得到某些 Hanf-数的下界：

13.2.15定理（Silver，[1971]）　若存在基数 κ 使得$\kappa\to(\omega)_2^{<\omega}$，则存在可枚举语言 $\mathscr{L}$ 使得

$$\bar{\kappa}(\omega)<h(\mathscr{L}_{\omega_1\omega_1}).$$

证明：对每一 $n\geqslant1$，令语言 $\mathscr{L}$ 包含 n 元关系符号 R^n，令 S^n 是 $n=\{0,1,\cdots,n-1\}$的所有**置换**（permutation）的集合，σ 是 $\mathscr{L}_{\omega_1\omega_1}$的

下列句子的合取：

$\sigma_1=$

$$\bigwedge_{\substack{n<\omega\\ \pi\in S^n}}\forall v_0\cdots v_{n-1}[R^n(v_0,\cdots,v_{n-1})\leftrightarrow R^n(v_{\pi(0)},\cdots,v_{\pi(n-1)})],$$

$$\sigma_2=(\forall v\upharpoonright\omega)\neg[\bigwedge\{\neg(v_i\equiv v_j):i,j<\omega,i\neq j\}$$

$$\wedge\bigwedge_{n<\omega}\bigwedge\{R^n(v_{i_1},\cdots,v_{i_n})\leftrightarrow R^n(v_{j_1},\cdots,v_{j_n}):i_1<\cdots<i_n,j_1<\cdots<j_n\}].$$

任给集合 X 和关系 $T^n\subseteq X^n$ 使得 $\langle X,T^n\rangle_{n<\omega}\models\sigma_1$，定义 $[X]^{<\omega}$ 的一个划分如下：

$$\{x_0,\cdots,x_{n-1}\}\in\begin{cases}C_0\Leftrightarrow\langle x_0,\cdots,x_{n-1}\rangle\in T^n,\\ C_1\Leftrightarrow\langle x_0,\cdots,x_{n-1}\rangle\notin T^n.\end{cases}$$

因此我们有

$\langle X,T^n\rangle_{n<\omega}\models\sigma_2\Leftrightarrow$ 不存在 X 的可枚举子集 Y 使得 Y 相对划分 (C_0,C_1) 是**齐性集**. (13.23)

因此句子 σ 有所有幂 $<\hat{\kappa}(\omega)$ 的模型. 事实上，若 $\lambda<\hat{\kappa}(\omega)$，则令 $f:[\lambda]^{<\omega}\to2$ 是一没有上述可数齐性集 Y 的函数，显然，

$$\langle\lambda,\{\langle x_0,\cdots,x_{n-1}\rangle:f(\{x_0,\cdots,x_{n-1}\})=1\rangle_{n<\omega}$$

是 σ 的模型.

另一方面，σ 没有幂 $\geqslant\hat{\kappa}(\omega)$ 的模型. 因为我们有

$$\kappa\to(\omega)_2^{<\omega}\text{且 }\lambda\geqslant\kappa\Rightarrow\lambda\to(\omega)_2^{<\omega},$$

所以若 $\mathfrak{A}$ 是幂 $\geqslant\hat{\kappa}(\omega)$ 的 $\mathscr{L}$-结构，则我们定义

$$f(\{a_0,\cdots,a_{n-1}\})=\begin{cases}1,&\text{若}\langle a_0,\cdots,a_{n-1}\rangle\in(R^n)^{\mathfrak{A}};\\ 0,&\text{若}\langle a_0,\cdots,a_{n-1}\rangle\notin(R^n)^{\mathfrak{A}}.\end{cases}$$

因此 $\mathfrak{A}\models\neg\sigma_1$ 或相对 f 存在一个无穷齐性集. 而后者与 σ_2 的构造不相容（参见(13.23)），所以在上述两种情况下都有 $\mathfrak{A}\models\neg\sigma$. 这样，证明了 $\hat{\kappa}(\omega)\leqslant\mathrm{h}(\mathscr{L}_{\omega_1\omega_1})$.

据11.2.7及其后面的说明：

$$\mathrm{cf}(\mathrm{h}(\mathscr{L}_{\omega_1\omega_1}))\leqslant|\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\omega_1\omega_1})|=2^{\aleph_0}.$$

因为 $\hat{\kappa}(\omega)>\omega$ 是强不可达基数，所以 $\hat{\kappa}(\omega)$ 是正则基数，因此 $\mathrm{cf}(\hat{\kappa}(\omega))=\hat{\kappa}(\omega)>2^{\aleph_0}$，从而证明了 $\mathrm{h}(\mathscr{L}_{\omega_1\omega_1})>\hat{\kappa}(\omega)$. □

13.2.16推论 存在可数语言 $\mathscr{L}$ 使 $\mathrm{h}(\mathscr{L}_{\omega_1\omega_1})$，$\mathrm{h}(\mathrm{PU}_{\omega_1\omega_1})$ 超过第一个大于 ω 的弱紧致、强不可达基数 κ_0.

证明：因为 $\hat{\kappa}(\omega)\to(\hat{\kappa}(\omega))^2_2$，所以 $\hat{\kappa}(\omega)\geqslant\kappa_0$. □

据本质上类似前面的证明，我们有：

13.2.17定理 若 $\lambda\geqslant\omega$ 且存在 κ 使得 $\kappa\to(\lambda)^{<\omega}_2$，则存在幂为 λ 的语言 $\mathscr{L}$ 使得

$$\hat{\kappa}(\lambda)<\mathrm{h}(\mathrm{PU}_{\lambda^+\lambda^+})<\mathrm{h}(\mathscr{L}_{\lambda^+\lambda^+}).\ \square$$

13.2.18定义 称 $\kappa\in\mathbf{CN}_1$ 是**第 n 个有序特征化基数**(n^{th} order characterizable cardinal) $\Leftrightarrow$ 存在包含 $\in$ 的第 n 个有序句子使得

(1) $(\mathbf{R}(\kappa),\in)\models\sigma$,

(2) $(\mathbf{R}(\lambda),\in)\models\neg\sigma$, 对任何 $\lambda\in\mathbf{CN}_1,\lambda\neq\kappa$.

Silver 在其[1966]改善了13.2.15给出的 $\mathrm{h}(\mathscr{L}_{\omega_1\omega_1})$ 的下界(请参见13.2.22). Silver 在此还探讨了在没有非常大基数的情况下 $\mathrm{h}(\mathscr{L}_{\omega_1\omega_1})$ 的规模. 他证明了：

13.2.19定理 若 $\mathbf{V}=\mathbf{L}$，则对 $n<\omega$，$\mathrm{h}(\mathscr{L}_{\omega_1\omega_1})$ 大于任意第 n 个有序特征化基数.

13.2.20推论 若 $\mathbf{V}=\mathbf{L}$ 且存在 Π^n_m 不可描述基数，则 Hanf-数 $\mathrm{h}(\mathscr{L}_{\omega_1\omega_1})$ 超过第一个这样的基数.

练　习

13.2.21(Silver, [1966]) 令 $|\mathscr{L}|\leqslant\aleph_0$. $V(\mathscr{L})$ 是所有 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$-句子的合取的集合且含有"<是良序"的句子，则 $\mathrm{PU}_{\omega_1\omega_1}$ 被 $V(\mathscr{L})$ 置换后13.2.9和13.2.15仍成立.

[提示：对13.2.15，证明存在 ZF 的有穷公理集使得它与断定

"不存在基数 κ 使得 $\kappa\to(\omega)^{<\omega}_2$"

一起能定义 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$-句子 σ 使得

$\mathfrak{A}\models\sigma$ 且 $\mathfrak{A}$ 是良建的 $\Rightarrow |A|\leqslant\hat{\kappa}(\omega)$.]

13.2.22(Silver,[1966]) 证明存在可枚举语言 $\mathscr{L}$ 使得

$$\sup\{\hat{\kappa}(\alpha):\alpha<\omega_1\}\leqslant \mathrm{h}(\mathscr{L}_{\omega_1\omega_1}).$$

§3 $\mathscr{L}_{\infty\infty}$的某些句子相对一阶理论的Hanf-数

本节我们讨论 $\mathscr{L}_{\infty\infty}$的某些句子,主要是 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$和 $\mathscr{L}_{\infty\lambda}$(其中 $\lambda>\omega$)的某些全称句子相对一阶理论的 Hanf-数. 这一部分工作主要来自 J. Flum 的[1972],可以看作是对前面章节有关结果的一种概括.

本节我们总是用 V 和<表示一元和二元关系符号,用 $\alpha,\beta,\xi,\eta,\zeta,\cdots$表示序数,用 $\kappa,\lambda,\mu,\cdots$表示无穷基数,$T,T',T_n,\cdots$表示一阶理论.

令 F 是结构类构成的族使得每一类 $\mathscr{M}\in$ F 中所有结构具有相同的语言. 假设 $\mathscr{M}$ 是其中一个结构类,$\mathscr{L}$ 是 $\mathscr{M}$ 对应的语言,我们用 W($\mathscr{M}$)指称最小的序数 ξ(若存在这样的 ξ)使得对 $\mathscr{L}$ 的任意 V 和<,若对任意 $\mathfrak{A}\in\mathscr{M}$, $\langle V^{\mathfrak{A}},<^{\mathfrak{A}}\rangle$是线序且对每一 $\eta<\xi$,存在 $\mathfrak{A}\in\mathscr{M}$ 使得$\langle V^{\mathfrak{A}},<^{\mathfrak{A}}\rangle$以序型$\geqslant\eta$ 被良序. 则存在 $\mathfrak{B}\in\mathscr{M}$ 使得$\langle V^{\mathfrak{B}},<^{\mathfrak{B}}\rangle$不被良序. 若 $\mathscr{M}$ 包含任意大幂的结构,我们令h($\mathscr{M}$)$=0$,否则,令 h($\mathscr{M}$)$=\sup\{|A|^+:\mathfrak{A}\in\mathscr{M}\}$. 我们称这样定义的 h($\mathscr{M}$)是 $\mathscr{M}$ 的 **Hanf-数**,因为若 $\mathscr{M}$ 包含幂$\geqslant$h($\mathscr{M}$)的结构,则 $\mathscr{M}$ 包含任意大幂的结构. 若 sup{W($\mathscr{M}$):$\mathscr{M}\in$F}存在,我们就用 W(F)指称它且称它是F 的**良序数**. 若

$$\max\{\aleph_0,\sup\{(\mathrm{h}(\mathscr{M}))^+:\mathscr{M}\in\mathrm{F}\}\}$$

存在,则用 h(F)指称它且称它是 F 的 **Hanf-数**,因为对每一 $\mathscr{M}\in$ F,若 $\mathscr{M}$ 包含幂$\geqslant$h(F)的结构,则 $\mathscr{M}$ 包含任意大幂的结构.

13.3.1定义 令 σ 是 $\mathscr{L}_{\infty\infty}$-句子,本节总是假设它有无穷模型. 定义 F($\sigma,\lambda$)如下:

$$\mathscr{M}\in \mathsf{F}(\sigma,\lambda)\Leftrightarrow\begin{cases}\text{存在语言 } \mathscr{L}' \text{ 和幂} \leqslant\lambda \text{ 的 } \mathscr{L}'_{\omega\omega}\text{-理论 } T \text{ 使得}\\ \mathscr{M}=\{\mathfrak{A}:\mathfrak{A}\text{ 是 } \mathscr{L}\cup\mathscr{L}'\text{-结构}, \mathfrak{A}\models T\cup\{\sigma\}\}.\end{cases}$$

若 $\mathrm{h}(\mathsf{F}(\sigma,\lambda))$ 和 $\mathrm{W}(\mathsf{F}(\sigma,\lambda))$ 存在，则我们分别用 $\mathrm{h}(\sigma,\lambda)$ 和 $\mathrm{W}(\sigma,\lambda)$ 来表示它们.

13.3.2引理

(1)(Hanf,[1964]) 对 $\mathscr{L}_{\infty\infty}$-句子 σ, $\mathrm{h}(\sigma,\lambda)$ 存在.

(2)(López-Escobar,[1966])

(Ⅰ) 对 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$-句子 σ, $\mathrm{W}(\sigma,\lambda)$ 存在;

(Ⅱ) 对 $\mathscr{L}_{\infty\infty}$ 或 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$-句子 σ 使得 σ 形如 $(\exists x\upharpoonright\xi)\varphi$，其中 φ 是 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$-公式, $\mathrm{W}(\sigma,\lambda)$ 存在.

(3) 对 $\mathscr{L}_{\infty\infty}$-句子 σ, $\mathrm{h}(\sigma,\lambda)$ 是最小的基数 κ 使得对任意幂 $\leqslant\lambda$ 的理论 T，若对每一基数 $\mu<\kappa$，存在 $T\cup\{\sigma\}$ 的幂 $\geqslant\mu$ 的模型，则 $T\cup\{\sigma\}$ 有任意大幂的模型.

(4) 对 $\mathscr{L}_{\infty\infty}$-句子 σ, $\mathrm{W}(\sigma,\lambda)$ 是最小的序数 ξ，若存在这样的 ξ 使得对任意语言 $\mathscr{L}'$, $\mathscr{L}'_{\omega\omega}$ 的任意幂 $\leqslant\lambda$ 的理论 T 和 $\mathscr{L}'$ 的任意 V 和 $<$，若对每一 $\eta<\xi$, T 有模型 $\mathfrak{A}\models\sigma$ 使得 $\langle V^{\mathfrak{A}},<^{\mathfrak{A}}\rangle$ 以序型 $\geqslant\eta$ 被良序，则 T 有模型 $\mathfrak{B}\models\sigma$ 使得 $\langle V^{\mathfrak{B}},<^{\mathfrak{B}}\rangle$ 不被良序.

(5) 设 $W(\sigma,\lambda)$ 存在且 $W(\sigma,\lambda)>\omega+1$，则

$$\xi+1<W(\sigma,\lambda)\Rightarrow\omega\cdot\xi<W(\sigma,\lambda).$$

证明：据13.3.1. 关于(1)还可见11.2.5后面. □

固定 $\theta(V,<)$ 是述说"$<$是 V 上有首元的离散线序"的 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$-句子. 对 $n<\omega$，固定 $\theta^n(V,<)$ 是述说"x 大于 $\langle V,<\rangle$ 中第 n 个元素"的 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$ 公式.

13.3.3引理 下列命题等价:

(1) $\mathrm{W}(\sigma,\lambda)$ 存在且 $\mathrm{h}(\sigma,\lambda)=\omega$.

(2) 任给序列 $\langle T_n:n<\omega\rangle$ 使对 $i<j<\omega$, $T_i\subseteq T_j$, $\left|\bigcup_{n<\omega}T_n\right|\leqslant\lambda$. 若对任意 $n, m<\omega$, $T_n\cup\{\sigma\}$ 有幂 $\geqslant m$ 的模型，则 $\bigcup_{n<\omega}T_n\cup\{\sigma\}$ 有模型.

证明：显然. 若 $\mathrm{W}(\sigma,\lambda)$ 存在，则 $\mathrm{W}(\sigma,\lambda)\geqslant\omega$. 现证(2) $\Rightarrow$ (1):

设(2)成立，任给幂$\leqslant\lambda$的理论T，新个体常元集$\{c_n:n<\omega\}$. 令$T_0=T,\cdots,T_{n+1}=T_n\cup\{V(c_n)\}\cup\{c_n<c_i:i<n\}$. 若$T\cup\{\sigma\}$的所有模型是良序模型，则$\bigcup_{n<\omega}T_n\cup\{\sigma\}$没有模型. 在这种情况下，据(2)，存在$n<\omega$使得在$T\cup\{\sigma\}$的每一模型$\mathfrak{A}$中，$\langle V^{\mathfrak{A}},<^{\mathfrak{A}}\rangle$的序型$<n$. 所以据$W(\sigma,\lambda)$的定义，$W(\sigma,\lambda)\leqslant\omega$，因此(1)成立.

下证(1) $\Rightarrow$ (2)：设(1)成立，令$\langle T_n:n<\omega\rangle$如(2)的假设所规定，我们要证$\bigcup_{n<\omega}T_n\cup\{\sigma\}$有模型. 令$\langle\sigma_\xi^n:\xi<\lambda\rangle$是对$T_n$的枚举，令

$$T=\{\theta(V,<)\}\cup\{\forall x[\theta^n(V,<)(x)\to\sigma_\xi^n]:n<\omega,\xi<\lambda\},$$

其中$V,<$是新关系符号. 因为对每一$n<\omega$，$T\cup\{\sigma\}$有幂$\geqslant n$的模型，所以$T_n\cup\{\sigma\}$也有序型$\geqslant n$的模型. 据(1)，$T_n\cup\{\sigma\}$有非良序模型$\mathfrak{A}$，而$\mathfrak{A}$就是$\bigcup_{n<\omega}T_n\cup\{\sigma\}$的模型. □

令$\mathfrak{A}$是Skolem-模型，$\langle X,<\rangle$是$\mathfrak{A}$的无穷不可辨元集，$\Gamma=\mathrm{Form}_{\mathfrak{A}}(X,<)$如13.2.5前面规定，且$\langle Y,<\rangle$是任意线序集，则$\mathrm{Hull}_\Gamma(Y,<)$（后面有时简记为$\mathrm{Hull}_\Gamma(Y)$）指称由$Y$生成的唯一的（在同构意义上）结构使得$\mathrm{Form}_{\mathfrak{A}}(X,<)=\mathrm{Form}_{\mathrm{Hull}_\Gamma(Y)}(X,<)$. 据第8章§2和本章§2的结果，我们有：

13.3.4引理 假设$\langle X,<\rangle$是线序，$\mathfrak{A}$是$\mathscr{L}$的Skolem-结构，$\Gamma=\mathrm{Form}_{\mathfrak{A}}(X,<)$，则

(1) 若$\varphi(\vec{v}_n)\in\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\infty\omega})$是$\mathscr{L}_{\omega\omega}$-公式的无穷布尔组合，则对任意$x_1<\cdots<x_n,y_1<\cdots<y_n\in X$，

$$\mathfrak{A}\models\varphi[\vec{x}_n]\Leftrightarrow\mathfrak{A}\models\varphi[\vec{y}_n].$$

(2) 若$\langle Y,<\rangle$是线序，则$\mathrm{Hull}_\Gamma(X)=\mathrm{Hull}_\Gamma(Y)$.

(3) (Chang, [1968b]) 若$\langle Y_1,<_1\rangle$和$\langle Y_2,<_2\rangle$是无端点稠密线序，则 $\mathrm{Hull}_\Gamma(Y_1)\equiv_{\infty\omega}\mathrm{Hull}_\Gamma(Y_2)$. □

在后面的证明中，我们还需要下列事实：

13.3.5引理 (1) 假设σ是全称句（或存在句）且$\mathfrak{A}\prec\mathfrak{B}$，则

$$\mathfrak{B}\models\sigma\Rightarrow\mathfrak{A}\models\sigma（或\ \mathfrak{A}\models\sigma\Rightarrow\mathfrak{B}\models\sigma）.\qquad(13.24)$$

因此若 σ 是存在句且 λ 是任意基数，则据(13.24)，我们有

$$\mathrm{h}(\sigma,\lambda)\leqslant\aleph_1,\quad \mathrm{W}(\sigma,\lambda)\leqslant\omega+1.$$

若 σ 还是下列形式的存在句

$$\sigma=\bigvee_{n<\omega}\exists\vec{x}_n\forall x[U(x)\leftrightarrow x\equiv x_1\vee\cdots\vee x\equiv x_n],$$

则
$$\mathrm{h}(\sigma,\lambda)=\aleph_1,\quad \mathrm{W}(\sigma,\lambda)=\omega+1.$$

(2) 称 $\mathscr{L}_{\infty\infty}$-句子 σ 是**合取句** $\Leftrightarrow$ σ 不含无穷析取号且对 σ 的任意形如 $\neg\varphi$ 的子公式，φ 是 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$-公式.

(Keisler 在其[1965]证明了，对任意 $\mathscr{L}_{\infty\infty}$-合取句 σ，$\{\mathfrak{A};\mathfrak{A}\models\sigma\}$ 在超积下封闭.)

因此
$$\mathrm{h}(\sigma,\lambda)=\aleph_0,\quad \mathrm{W}(\sigma,\lambda)=\omega.\ \square$$

13.3.6定理 (1) 假设 σ 是 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$的全称句，$|\mathscr{L}|\leqslant\lambda$，则

$$\mathrm{W}(\sigma,\lambda)=\omega\Rightarrow \mathrm{h}(\sigma,\lambda)\leqslant\beth_\omega(\lambda).$$

(2) 若对(1)中的 λ，存在基数 κ 使得 $\lambda=\beth_\omega(\kappa)$，则

$$\mathrm{h}(\sigma,\lambda)\leqslant\beth_\omega(\kappa).$$

(3) 若(1)中的 $\lambda=\omega$，则 $\mathrm{h}(\sigma,\lambda)=\aleph_0$.

证明：(1) 任给幂 $\leqslant\lambda$ 的理论 T 使得对每一 $\mu<\beth_\omega(\lambda)$，存在 $T\cup\{\sigma\}$ 的幂 $\geqslant\mu$ 的模型，下证 $T\cup\{\sigma\}$ 有任意大幂的模型. 不妨设 T 是 $\mathscr{L}'_{\omega\omega}$中 Skolem-理论，其中 $\mathscr{L}\subseteq\mathscr{L}'$. 令 $\langle d_n:n<\omega\rangle$ 是有理数集 $\mathbf{Q}$ 的一枚举，$\{c_r:r\in\mathbf{Q}\}$ 是新个体常元集. 对 $n<\omega$，令 T_n 是下列句子的集合：

$T\cup\{\neg(d_i\equiv d_j):i<j\leqslant 2n\}\cup\{\varphi(c_{r_0},\cdots,c_{r_n})\leftrightarrow\varphi(c_{s_0},\cdots,c_{s_n}):\varphi(\vec{v}_n)$ 是 $\mathscr{L}'_{\omega\omega}$-公式，$\vec{r}_n,\vec{s}_n\in\{d_i:i\leqslant 2n\}$ 且 $r_0<\cdots<r_n,s_0<\cdots<s_n\}$.

据 Erdös-Rado-定理，对 $n<\omega$，存在 $\mu_n<\beth_\omega(\lambda)$ 使得 $\mu_n\to(\omega)^n_{2^\lambda}$，因此通过解释新个体常元 $d_0,\cdots,d_{2n}$把 $T\cup\{\sigma\}$ 的任意幂 $\geqslant\mu_n$ 的模型 $\mathfrak{A}$ 膨胀为 $T_n\cup\{\sigma\}$ 的模型. 据13.3.3，$\bigcup_{n<\omega}T_n\cup\{\sigma\}$ 有模型 $\mathfrak{B}$. 令 $\mathfrak{C}=\mathrm{Hull}(\{c_r^{\mathfrak{B}}:r\in\mathbf{Q}\})$. 则据13.3.5(1)，$\mathfrak{C}\models T\cup\{\sigma\}$. 令 $\langle Y,<\rangle$ 是任意无端点稠密线序，$\Gamma=\mathrm{Form}_{\mathfrak{C}}(\{c_r^{\mathfrak{B}}:r\in\mathbf{Q}\})$，因为 $\mathfrak{C}\cong\mathrm{Hull}_\Gamma(\mathbf{Q})$，所以据13.3.4(3)，$\mathfrak{C}\equiv_{\infty\omega}\mathrm{Hull}_\Gamma(Y)$. 因为 Y 是任给的且 $|\mathrm{Hull}_\Gamma(Y)|\geqslant$

$|Y|$，所以 $T\cup\{\sigma\}$ 有任意大幂的模型.

(2) 设对某个基数 κ，存在 $\lambda=\beth_\omega(\kappa)$. 因为 ω 是极限序数，所以 $\beth_\omega(\kappa)=\bigcup\limits_{n<\omega}\beth_n(\kappa)$，所以 $\mathrm{cf}(\lambda)=\omega$，因此 $\bigcup\limits_{n<\omega}T_n$ 可写作 $\bigcup\limits_{n<\omega}T_n'$ 使得 $|T_n'|<\beth_\omega(\kappa)$. 如(1)所证，我们就有 $\mathrm{h}(\sigma,\lambda)\geqslant\beth_\omega(\kappa)$.

(3) 在 $\lambda=\aleph_0$ 的情况下，$\bigcup\limits_{n<\omega}T_n$ 是可数的，据 Erdös-Rado-定理，对每一 $m,n,j<\omega$，存在 $k<\omega$ 使 $k\to(j)_m^n$，所以如(1)所证，有

$$\mathrm{h}(\sigma,\lambda)=\aleph_0.\ \square$$

我们称 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$ 的公式 φ 是**严格全称公式** $\Leftrightarrow$ φ 形如 $\forall x_1\cdots x_n\psi$，其中 ψ 是 $\mathscr{L}_{\omega\omega}$-公式的无穷布尔组合.

13.3.7定理 假设 σ 是 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$ 的严格全称句，$|\mathscr{L}|\leqslant\lambda$，则

$$\mathrm{W}(\sigma,\lambda)=\alpha\Rightarrow\mathrm{h}(\sigma,\lambda)\leqslant\beth_\alpha(\lambda).$$

证明：假设 T 是 $\mathscr{L}'$ 的 Skolem-理论，$\mathscr{L}\subseteq\mathscr{L}'$，$|\mathscr{L}'|\leqslant\lambda$ 且对每一 $\mu<\beth_\alpha(\lambda)$，$T\cup\{\sigma\}$ 有幂 $\geqslant\mu$ 的模型，下证 $T\cup\{\sigma\}$ 有任意大幂的模型. 若 $\alpha=\omega$，则本定理就是13.3.6(1)，所以不妨设 $\alpha>\omega$ 是极限序数(若 α 不是极限序数，证明也类似，只有几处需要略加修正，请读者自证). 对 $\beta<\alpha$，据13.3.2(5)，$\omega\cdot\beta<\alpha$. 因此不妨令 $\mathfrak{A}$ $(=\mathfrak{A}_\beta)$ 是 $T\cup\{\sigma\}$ 的幂 $\geqslant\beth_{\omega\cdot\beta}(\lambda)$ 的模型且 $\beta\subseteq A$. 令 $V,<,\prec$ 是新关系符号，定义

$$V^{\mathfrak{A}}=\beta,\quad <^{\mathfrak{A}}=\in\restriction\beta,\quad \prec^{\mathfrak{A}}=A\text{ 上的线序}.$$

首先证：对 $m<\omega$，$\vec{\xi}_m=\xi_0,\cdots,\xi_m<\beta$；$\xi_0>\cdots>\xi_m$，我们可以构造 A 的具有下列性质的子集序列 $\langle A_{\vec{\xi}_m}:m<\omega\rangle$：

(1) $A_{\vec{\xi}_m}\supseteq A_{\vec{\xi}_{m+1}}$，

(2) $|A_{\vec{\xi}_m}|\geqslant\beth_{\omega\cdot\xi_m}(\lambda)$，.

(3) 对所有 $\vec{a}_m,\vec{b}_m\in A_{\vec{\xi}_m}$，$a_0\prec\cdots\prec a_m$，$b_0\prec\cdots\prec b_m$ 和所有 $\psi(\vec{v}_m)\in\mathrm{Form}(\mathscr{L}_{\omega\omega}')$，

$$\mathfrak{A}\models\psi[\vec{a}_m]\Leftrightarrow\mathfrak{A}\models\psi[\vec{b}_m].$$

对每一 $m<\omega$ 和每一序数 $\xi<\beta$，据 Erdös-Rado-定理，有

$$\beth_{\omega\cdot(\xi+1)}(\lambda)\to(\beth_{\omega\cdot\xi}(\lambda))^{m}_{2^\lambda}. \qquad (13.25)$$

因此对 $\xi_0<\beta$，据(13.25)，存在具有性质(2)和(3)的子集 A_{ξ_0}. 假设幂 $\geqslant\beth_{\omega\cdot\xi_m}(\lambda)$ 的 A_{ξ_m} 已定义且 $\xi_{m+1}<\xi_m$，则据(13.25)的另一种用法，我们得到 A_{ξ_m} 的、具有性质(2)和(3)的子集 $A_{\xi_{m+1}}$. 对 $m<\omega$，据下面的等价式定义 A 上 $2(m+1)$ 元关系 $P_m^{\mathfrak{A}}$（P_m 是指称这个关系的新关系符号）：

$P_m^{\mathfrak{A}}(\vec{\xi}_m,\vec{a}_m)$

$$\Leftrightarrow V^{\mathfrak{A}}(\xi_0),\cdots,V^{\mathfrak{A}}(\xi_m),\ \xi_m<\cdots<\xi_0,\ \vec{a}_m\in A_{\xi_m} 且\ a_0\prec\cdots\prec a_m.$$

令 $\mathfrak{A}^*=(\mathfrak{A},V^{\mathfrak{A}},<^{\mathfrak{A}},\prec^{\mathfrak{A}},P_m^{\mathfrak{A}})_{m<\omega}$. 至此，我们对每一 $\beta<\alpha$，构造了 $T\cup\{\sigma\}$ 的模型 $\mathfrak{A}^*(=\mathfrak{A}_\beta^*)$ 使得 $\langle V^{\mathfrak{A}^*},<^{\mathfrak{A}^*}\rangle$ 是序型为 β 的良序. 令 $T^*=\bigcap\{\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_\beta^*):\beta<\alpha\}$ 在所有 $\mathfrak{A}_\beta^*$ 中成立. 据 $\mathrm{W}(\sigma,\lambda)$ 的定义，$T^*\cup\{\sigma\}$ 有非良序模型 $\mathfrak{B}$. 假设 $\langle\xi_n:n<\omega\rangle$ 是 $\langle V^{\mathfrak{B}},<^{\mathfrak{B}}\rangle$ 中的递降序列，则

① 对 $m<\omega$，存在 B 的无穷子集 B_m 使得对所有 $\vec{b}_m\in B_m$，

$$b_0\prec\cdots\prec b_m\Rightarrow P_m^{\mathfrak{B}}(\vec{\xi}_m,\vec{b}_m).$$

② 对每一 $\varphi(\vec{v}_m)\in\mathrm{Form}(\mathscr{L}'_{\omega\omega})$ 和所有 $\vec{a}_m,\vec{b}_m\in B_m$，若我们有 $P_m^{\mathfrak{B}}(\vec{\xi}_m,\vec{a}_m)$ 和 $P_m^{\mathfrak{B}}(\vec{\xi}_m,\vec{b}_m)$，则

$$\mathfrak{B}\models\varphi[\vec{a}_m]\Leftrightarrow\mathfrak{B}\models\varphi[\vec{b}_m].$$

令

$$\Gamma=\{\varphi(\vec{v}_m):m<\omega,\varphi(\vec{v}_m)\in\mathrm{Form}(\mathscr{L}'_{\omega\omega})，且对所有\ \vec{a}_m\in B,$$

$$P_m^{\mathfrak{B}}(\vec{\xi}_m,\vec{a}_m)\Rightarrow\mathfrak{B}\models\varphi[\vec{a}_m]\}.$$

据①和②以及 $\mathscr{L}'_{\omega\omega}$ 的紧致性定理，对任意线序 $\langle X,<\rangle$，存在结构 $\mathfrak{A}$ 使 $\Gamma=\mathrm{Form}_{\mathfrak{A}}(X,<)$. 因此 $\mathrm{Hull}_\Gamma(X,<)\models T$. 因为我们可以选择 X 使之有任意大幂，所以剩下只须证 $\mathrm{Hull}_\Gamma(X,<)\models\sigma$. 因为 σ 是严格全称句，所以不妨令 $\sigma=\forall\vec{x}_n\theta$，其中 θ 是一阶公式的无穷布

尔组合.假设 $\mathrm{Hull}_\Gamma(X,<)\models\neg\sigma$,则存在 $\mathscr{L}'_{\omega\omega}$的项 $t_0(v_0,\cdots,v_{s_0})$,$\cdots,t_n(v_0,\cdots,v_{s_n})$和 $x_0^0,\cdots,x_{s_0}^0$, $x_0^0,\cdots,x_{s_n}^n\in X$ 使得

$$\mathrm{Hull}_\Gamma(X)\models\neg\theta[t_0^{\mathrm{Hull}_\Gamma(X)}[x_0^0,\cdots,x_{s_0}^0],\cdots,t_n^{\mathrm{Hull}_\Gamma(X)}[x_0^n,\cdots,x_{s_n}^n]].$$

令 $X_1=\{x_0^0,\cdots,x_{s_n}^n\}$,$m=\sum_{i=0}^n s_i$,则对任意 $\vec{b}_m$ 使得 $P_m^{\mathfrak{B}}(\vec{\xi}_m,\vec{b}_m)$和任意保序映射 $e:X_1\to\{\vec{b}_m\}$,据上述②和13.3.4(1),有

$$\mathfrak{B}\models\neg\theta[t_0^{\mathfrak{B}}[e(x_0^0),\cdots,e(x_{s_0}^0)],\cdots,t_n^{\mathfrak{B}}[e(x_0^n),\cdots,e(x_{s_n}^n)]].$$

从而 $\mathfrak{B}\models\neg\sigma$,矛盾.□

后面将证明,对任意 $\mu<\beth_{W(\sigma,\lambda)}(\lambda)$, $h(\sigma,\lambda)\leqslant\mu$ 一般不成立.

13.3.8定理 令 σ 形如$(\exists x\upharpoonright\xi)\varphi$,$\varphi$是严格全称 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$-公式,若$|\mathscr{L}|\leqslant\lambda$,$W(\sigma,\lambda)=\alpha$ 且 U 是不在 σ 中出现的一元谓词使得

$$\models\sigma\to(\exists x\upharpoonright\xi)[\varphi\wedge\forall x[U(x)\leftrightarrow\bigvee_{\eta<\xi}x\equiv x_\eta]]\tag{13.26}$$

则
$$h(\sigma,\lambda)\leqslant\beth_\alpha(\sup\{|\xi|,\lambda\}).$$

证明:本证明类似13.3.7的证明,因此下面我们只指出变动之处.仍假设 $\alpha>\omega$ 是极限序数(非极限序数的情况类似可证,$\alpha=\omega$ 的情况在13.3.9处理).若 $\beta<\alpha$,则令 $\mathfrak{A}(=\mathfrak{A}_\beta)$是 $T\cup\{\sigma\}$的幂$\geqslant\beth_{\omega\cdot\beta}(\kappa)$的模型,其中 $\kappa=\sup\{|\xi|,\lambda\}$.选择 A 的子集 A_{ξ_m} 使得:

(1) $A_{\xi_m}\supseteq A_{\xi_{m+1}}$,

(2) $|A_{\xi_m}|\geqslant\beth_{\omega\cdot\xi_m}(\lambda)$,

(3) 对所有 $\mathscr{L}'_{\omega\omega}$-公式 $\varphi(v_0,\cdots,v_{2m+1})$,所有 $\vec{a}_m,\vec{b}_m\in A_{\xi_m}$和所有 $\vec{u}_m\in U^{\mathfrak{A}}$,若 $a_0<\cdots<a_m$,$b_0<\cdots<b_m$,则

$$\mathfrak{A}\models\varphi[\vec{u}_m,\vec{a}_m]\Leftrightarrow\mathfrak{A}\models\varphi[\vec{u}_m,\vec{b}_m].$$

(这里我们用下列事实:据 σ 的构造和(13.26),对 σ 的每一模型 $\mathfrak{A}$,$|U^{\mathfrak{A}}|\leqslant|\xi|$.)如13.3.7那样定义 $\mathfrak{A}_\beta^*$.令

$$T^*=\bigcap\{\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_\beta^*):\beta<\alpha\},$$

$\mathfrak{B}$ 是 $T^*\cup\{\sigma\}$的非良序模型,$\langle\xi_n:n<\omega\rangle$是$\langle V^{\mathfrak{B}},<^{\mathfrak{B}}\rangle$的递降序列,据(13.26),我们可以选择$\langle u^\zeta:\zeta<\xi\rangle$使得 $\mathfrak{B}\models\varphi[u^\zeta:\zeta<\xi]$,且对所

有 $b\in B$.

① $U^{\mathfrak{B}}(b)\Leftrightarrow$ 对某个 $\zeta<\xi$, $b=u^{\zeta}$.

因为 $\mathfrak{B}$ 是 T^* 的模型,所以

② 对所有 $\mathscr{L}'_{\omega\omega}$-公式 $\varphi(v_0,\cdots,v_{2m+1})$,所有 $\vec{a}_m,\vec{b}_m\in A_{\vec{\xi}_m}$ 和所有 $\vec{u}_m\in U^{\mathfrak{B}}$,若 $P^{\mathfrak{B}}_m(\vec{\xi}_m,\vec{a}_m)$ 且 $P^{\mathfrak{B}}_m(\vec{\xi}_m,\vec{b}_m)$,则

$$\mathfrak{B}\models\varphi[\vec{u}_m,\vec{a}_m]\Leftrightarrow\mathfrak{B}\models\varphi[\vec{u}_m,\vec{b}_m].$$

令 $\langle X,<\rangle$ 是任意线序使得 $X\cap U^{\mathfrak{B}}=\varnothing$, $\{c_x:x\in X\}$ 和 $\{c_u:u\in U^{\mathfrak{B}}\}$ 是新个体常元集,且令

$$T_1=T\cup\{\neg(c_y\equiv c_z):y,z\in U^{\mathfrak{B}}\cup X,y\neq z\}\cup\{\varphi(\vec{c}_{u_m},\vec{c}_{x_m}):\vec{u}_m\in U^{\mathfrak{B}},x_0<\cdots<x_m\in X,\varphi(v_0,\cdots,v_{2m+1})\in \mathrm{Form}(\mathscr{L}'_{\omega\omega}),\text{且对所有 }\vec{a}_m\in B\text{ 使得 }P^{\mathfrak{B}}_m(\vec{\xi}_m,\vec{a}_m),\mathfrak{B}\models\varphi[\vec{u}_m,\vec{a}_m]\}.$$

据②,T_1 是一致的. 令 $\mathfrak{C}$ 是 T_1 的模型,不妨假设对 $u\in U^{\mathfrak{B}}$, $c^{\mathfrak{C}}_u=u$; $x\in X$, $c^{\mathfrak{C}}_x=x$. 令 $\mathfrak{D}=\mathrm{Hull}(U^{\mathfrak{B}}\cup X)$. 显然,$\mathfrak{D}\models T$. 因为 X 是任意的,所以剩下只须证 $\mathfrak{D}\models\sigma$. 因为 φ 形如 $\forall\vec{x}_n\theta$,其中 θ 是一阶公式的无穷布尔组合,所以类似13. 3. 7的证明的最后部分,我们能得到 $\mathfrak{D}\models\varphi[u^{\zeta}:\zeta<\xi]$,所以 $\mathfrak{D}\models\sigma$. □

运用13. 3. 6和13. 3. 8证明中的方法,我们有:

13. 3. 9定理 令 σ 形如 $(\exists x\upharpoonright\xi)\varphi$,其中 φ 是 $\mathscr{L}_{\infty\omega}$-全称公式,若 $|\mathscr{L}|\leqslant\lambda$, $\mathrm{W}(\sigma,\lambda)=\omega$ 且 U 是不在 σ 中出现的一元谓词使得

$$\models\sigma\rightarrow(\exists x\upharpoonright\xi)[\varphi\wedge\forall x[U(x)\leftrightarrow\bigvee_{\eta<\xi}x\equiv x_\eta]],$$

则
$$\mathrm{h}(\sigma,\lambda)\leqslant\beth_\omega(\sup\{|\xi|,\lambda\}).\ \square$$

13. 3. 10定义 (1) $\bar{\mathrm{h}}(\sigma,\lambda)(=\bar{\mathrm{h}}(\mathsf{F}(\sigma,\lambda)))$ 是最小的基数 κ 使得对任意幂 $\leqslant\lambda$ 的理论 T,若 $T\cup\{\sigma\}$ 有幂 $\geqslant\kappa$ 的模型,则 $T\cup\{\sigma\}$ 有任意大幂的模型.

(2) $\overline{\mathrm{W}}(\sigma,\lambda)(=\overline{\mathrm{W}}(\mathsf{F}(\sigma,\lambda)))$ 是最小的序数 ξ(若存在这样的 ξ)使得对所有语言 $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}_{\omega\omega}$ 的所有幂 $\leqslant\lambda$ 的理论 T 和 $\mathscr{L}$ 的任意 V 和 $<$,若 $T\cup\{\sigma\}$ 有模型 $\mathfrak{A}$ 使得 $\langle V^{\mathfrak{A}},<^{\mathfrak{A}}\rangle$ 是序型 $\geqslant\xi$ 的良序,则 T

$\bigcup\{\sigma\}$有模型 $\mathfrak{B}$ 使得$\langle V^{\mathfrak{B}},<^{\mathfrak{B}}\rangle$不被良序.

定义13.3.10中的 $\bar{\mathrm{h}}$是前面章节定义的 Hanf-数的相对化.

从上述定义,易得下列结果:

13.3.11引理 (1) 若 $\overline{\mathrm{W}}(\sigma,\lambda)$ 存在,则 $\overline{\mathrm{W}}(\sigma,\lambda)$是极限序数.

(2) $\bar{\mathrm{h}}(\sigma,\lambda)\leqslant \mathrm{h}(\sigma,\lambda)\leqslant(\bar{\mathrm{h}}(\sigma,\lambda))^{+}$.

(3) $\overline{\mathrm{W}}(\sigma,\lambda)$存在 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{W}(\sigma,\lambda)$存在,且

$$\overline{\mathrm{W}}(\sigma,\lambda)\leqslant \mathrm{W}(\sigma,\lambda)\leqslant \overline{\mathrm{W}}(\sigma,\lambda)+1.\square$$

显然,用 $\bar{\mathrm{h}}(\sigma,\lambda)$和 $\overline{\mathrm{W}}(\sigma,\lambda)$ 分别处处置换13.3.7和13.3.8中的 $\mathrm{h}(\sigma,\lambda)$和 $\mathrm{W}(\sigma,\lambda)$,这两个定理仍成立.但这种置换对13.3.3不成立,从而对13.3.6和13.3.9也不成立.下举反例说明之.

13.3.12反例 令

$$\sigma=\bigvee_{n<\omega}\exists\vec{x}_n\forall x[U(x)\leftrightarrow x\equiv x_1\vee\cdots\vee x\equiv x_n],$$

$$T_0=\{\forall x[V(x)\leftrightarrow U(x)];\text{“}\langle V,<\rangle\text{是线序”}\}.$$

则 $T_0\bigcup\{\sigma\}$只有良序模型,且对每一 $n<\omega$,$T_0\bigcup\{\sigma\}$有序型$\geqslant n$ 的良序模型,因此 $\mathrm{W}(\sigma,\lambda)>\omega$. 任给理论 T 使得 $T\bigcup\{\sigma\}$有模型 $\mathfrak{A}$ 且$\langle V^{\mathfrak{A}},<^{\mathfrak{A}}\rangle$是序型$\geqslant\omega$ 的良序,则 $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})\bigcup\{c_{n+1}<c_n:n<\omega\}$是一致的,其中$\{c_n:n<\omega\}$是新个体常元集.若 $\mathfrak{B}$ 是 $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})\bigcup\{c_{n+1}<c_n:n<\omega\}$的一模型的适当的归约模型,则 $\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{B}$. 因为 $\mathfrak{A}\models T\bigcup\{\sigma\}$,所以 $\mathfrak{B}\models T\bigcup\{\sigma\}$. 但因为$\langle c_n^{\mathfrak{B}}:n<\omega\rangle$是$\langle V^{\mathfrak{B}},<^{\mathfrak{B}}\rangle$的递降序列,所以$\langle V^{\mathfrak{B}},<^{\mathfrak{B}}\rangle$不被良序.因为 $U^{\mathfrak{A}}$ 是有穷的,所以对每一 λ,

$$\overline{\mathrm{W}}(\sigma,\lambda)=\omega,\quad \mathrm{W}(\sigma,\lambda)=\omega+1.\square$$

在本节余下部分我们固定一元关系符号 $U\in\mathscr{L}$.

令 $\mathscr{M}$ 是 $\mathscr{L}$ 的非空结构类,$\mathfrak{A}$ 是一个结构使得 $\mathscr{L}\bigcup\{U\}\subseteq \mathrm{Sm}(\mathfrak{A})$.我们称 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathscr{M}$-**结构(模型)** $\Leftrightarrow$ 以 $U^{\mathfrak{A}}$ 为个体域的 $\mathfrak{A}\upharpoonright\mathscr{L}$ 的子结构(称为 **$\mathfrak{A}$ 的 U-部分**)同构 $\mathscr{M}$ 中一元素.

定义 $\mathrm{F}(\mathscr{M},\lambda)$加下:若 $\mathscr{N}$ 是一结构类,则

$$\mathscr{N}\in\mathrm{F}(\mathscr{M},\lambda)\Leftrightarrow \text{存在 }\mathscr{L}'\text{ 和 }\mathscr{L}'_{\omega\omega}\text{的幂}\leqslant\lambda\text{ 的理论 }T\text{ 使得}$$

$$\mathscr{N}=\{\mathfrak{A}:\mathfrak{A}\models T\text{ 是 }\mathscr{M}\text{-模型且 }\mathrm{Sm}(\mathfrak{A})=\mathscr{L}\bigcup\mathscr{L}'\}$$

下面我们用 $\mathrm{h}(\mathscr{M},\lambda)$, $\bar{\mathrm{h}}(\mathscr{M},\lambda)$, $\mathrm{W}(\mathscr{M},\lambda)$, $\overline{\mathrm{W}}(\mathscr{M},\lambda)$分别指称 $\mathrm{h}(\mathsf{F}(\mathscr{M},\lambda))$, $\bar{\mathrm{h}}(\mathsf{F}(\mathscr{M},\lambda))$, $\mathrm{W}(\mathsf{F}(\mathscr{M},\lambda))$, $\overline{\mathrm{W}}(\mathsf{F}(\mathscr{M},\lambda))$.

13.3.13定理

令 μ 和 κ 是基数使得对所有 $\mathfrak{A}\in\mathscr{M}$, $\mu\leqslant|A|\leqslant\kappa$,则

(1) 对任意 λ, $\bar{\mathrm{h}}(\mathscr{M},\lambda)$和 $\overline{\mathrm{W}}(\mathscr{M},\lambda)$存在.

(2) 令 $\alpha=\overline{\mathrm{W}}(\mathscr{M},\lambda)$,

$$\lambda<\beth_\alpha(\mu)\Rightarrow\bar{\mathrm{h}}(\mathscr{M},\lambda)\geqslant\beth_\alpha(\mu).$$

(3) 令 $\alpha=\overline{\mathrm{W}}(\mathscr{M},\lambda)$,

$$\lambda\geqslant|\mathscr{L}|\Rightarrow\bar{\mathrm{h}}(\mathscr{M},\lambda)\geqslant\beth_\alpha(\sup\{\kappa,\lambda\}).$$

证明:(1) 对幂为 κ_1的 $\mathfrak{A}\in\mathscr{M}$,令$\langle a_\xi:\xi<\kappa_1\rangle$是 A 的无重复枚举,$\varphi_{\mathfrak{A}}$ 是 $\mathfrak{A}$ 的无穷图象,即 $\varphi_{\mathfrak{A}}$ 是下列公式的合取:

$U(x_\xi)$, 对 $\xi<\kappa$;

$\neg(x_\xi\equiv x_\eta)$, 对 $\xi<\eta<\kappa_1$;

$x_\xi\equiv x_0$, 对 ξ 使得 $\kappa_1\leqslant\xi<\kappa$;

$F(x_{\xi_0},\cdots,x_{\xi_{n-1}})\equiv x_{\xi_n}$, 对 $n<\omega$,F 是 $\mathscr{L}$ 的 n 元函数符号,
$\xi_0,\cdots,\xi_{n-1}\in\kappa_1$, $F^{\mathfrak{A}}(a_{\xi_0},\cdots,a_{\xi_{n-1}})\equiv a_{\xi_n}$;

$P(x_{\xi_0},\cdots,x_{\xi_{n-1}})$, 对 $n<\omega$,P 是 $\mathscr{L}$ 的 n 元关系符号,
$\xi_0,\cdots,\xi_{n-1}<\kappa_1$且$\langle a_{\xi_0},\cdots,a_{\xi_{n-1}}\rangle\in P^{\mathfrak{A}}$;

$\neg P(x_{\xi_0},\cdots,x_{\xi_{n-1}})$, 对 $n<\omega$,P 是 $\mathscr{L}$ 的 n 元关系符号,
$\xi_0,\cdots,\xi_{n-1}<\kappa_1$且$\langle a_{\xi_0},\cdots,a_{\xi_{n-1}}\rangle\notin P^{\mathfrak{A}}$.

令 $\mathscr{M}_1$是由 $\mathscr{M}$ 中两两不同构的结构构成的 $\mathscr{M}$ 的最大子类,令

$$\varphi=\forall x[(U(x)\leftrightarrow\bigvee_{\xi<\kappa}x\equiv x_\xi)\wedge\bigvee\{\varphi_{\mathfrak{A}}:\mathfrak{A}\in\mathscr{M}_1\}],$$

$$\sigma=(\exists x\upharpoonright\kappa)\varphi.$$

易见,对任意语言 $\mathscr{L}'\supseteq\mathscr{L}\cup\{U\}$,我们有

① φ是 $\mathscr{L}'$的严格全称公式,且

$$\vDash\sigma\rightarrow(\exists x\upharpoonright\kappa)[\varphi\wedge\forall x(U(x)\leftrightarrow\bigvee_{\xi<\kappa}x\equiv x_\xi)].$$

② $\mathscr{L}'$的结构 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathscr{M}$-模型 $\Leftrightarrow\mathfrak{A}\vDash\sigma$.

据13.3.2(1)，13.3.11和①，$\bar{\mathrm{h}}(\mathscr{M},\lambda)$和$\overline{\mathrm{W}}(\mathscr{M},\lambda)$存在.

(2)(概述) 因为$\overline{W}(\sigma,\lambda)=\alpha$是极限序数(见13.3.11(1))，所以据 beth-数的性质，只须证对任意$\beta<\alpha=\overline{\mathrm{W}}(\mathscr{M},\lambda)$，存在幂$\leqslant\lambda$的理论$T_1$使得$T_1$有幂$\geqslant\beth_\beta(\mu)$的$\mathscr{M}$-模型但没有任意大幂的$\mathscr{M}$-模型. 不妨假设$\lambda\leqslant\beth_\beta(\mu)$，因为$\beta+1<\alpha$，所以据$\overline{\mathrm{W}}(\mathscr{M},\lambda)$的定义，存在幂$\leqslant\lambda$的语言$\mathscr{L}'$和只有$\mathscr{M}$-良序模型的$\mathscr{L}'_{\omega\omega}$-理论$T$使得$T$的模型中有一模型$\mathfrak{A}$的序型为$\beta_0\geqslant\beta+1$，因为$\lambda\leqslant\beth_{\beta_0}(\mu)$，所以据向下-LS-定理，不妨假设，

$$\mu\leqslant|U^{\mathfrak{A}}|\leqslant|A|\leqslant\max\{|\beta_0|,\lambda,|U^{\mathfrak{A}}|\}\leqslant\beth_{\beta_0}(|U^{\mathfrak{A}}|).$$

令x是集合，ξ是序数，递归定义x相对ξ的**迭代**(iterated)**幂集**$\mathscr{P}(x,\xi)$如下：

$$\mathscr{P}(x,0)=x,$$

$$\mathscr{P}(x,\xi)=\bigcup\{\mathscr{P}(\mathscr{P}(x,\zeta)):\zeta<\xi\},\quad 对\ \xi>0.$$

($\mathscr{P}(x,\xi)$也称为x的第ξ层幂集.)若$\mathfrak{A}=\langle A,U,R_\gamma\rangle_{\gamma<\mu}$，则令

$$\mathfrak{A}_1=\langle A\cup\bigcup_{\xi<\beta_0}\mathscr{P}(U^{\mathfrak{A}},\xi),U,F,G,R_\gamma\rangle_{\gamma<\mu},$$

其中$F^{\mathfrak{A}_1}$是从A到$\bigcup_{\xi<\beta_0}\mathscr{P}(U^{\mathfrak{A}},\xi)$中的单射，$G^{\mathfrak{A}_1}$是三元关系使得对任意$a,b,c\in A\cup\bigcup_{\xi<\beta_0}\mathscr{P}(U^{\mathfrak{A}},\xi)$，

$$G^{\mathfrak{A}_1}(a,b,c)\Leftrightarrow\begin{cases}a\ 是\langle V^{\mathfrak{A}},<^{\mathfrak{A}}\rangle\ 中的第\ \xi\ 个元，\xi+1<\beta_0，且\\ c\in\mathscr{P}(U^{\mathfrak{A}},\xi+1)\ 且\ b\in c.\end{cases}$$

因为$\beta+1\leqslant\beta_0$，所以$|A_1|\geqslant\beth_\beta(\mu)$. 令$\mathscr{L}''=\mathscr{L}'\cup\{F,G\}$，因此若$T_1=\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_1)$，则$T_1$有幂$\geqslant\beth_\beta(\mu)$的$\mathscr{M}$-模型. 令$\mathfrak{B}$是$T_1$的任意$\mathscr{M}$-模型，则$\langle V^{\mathfrak{B}},<^{\mathfrak{B}}\rangle$是序型$\xi<\alpha$的良序，但据$F^{\mathfrak{B}}$和$G^{\mathfrak{B}}$的定义，$|B|=\left|\bigcup_{\zeta<\xi}\mathscr{P}(U^{\mathfrak{B}},\zeta)\right|$. 因为$|U^{\mathfrak{B}}|\leqslant\kappa$，所以$\beth_\alpha(|U^{\mathfrak{B}}|)\leqslant\beth_\alpha(\kappa)$，因此$T_1$的每一$\mathscr{M}$-模型的幂$<\beth_\alpha(\kappa)$.

(3) 从13.3.8和上述②立得(3). □

13.3.14推论 假设$\mathscr{M}$中的每一结构的幂为κ，令$\alpha^*=\mathrm{W}(\mathscr{M},\lambda)$，$\alpha_1=\mathrm{W}(\mathscr{M},\lambda)$，$\lambda$是基数使得$|\mathscr{L}|\leqslant\lambda\leqslant\beth_\alpha(\kappa)$，则

(1) $\bar{\mathrm{h}}(\mathscr{M},\lambda)=\beth_{\alpha}(\kappa)$.

(2) $\alpha_1=\alpha \Rightarrow \mathrm{h}(\mathscr{M},\lambda)=\beth_{\alpha_1}(\kappa)$.

(3) ① $\alpha_1>\alpha \Rightarrow \beth_{\alpha}(\kappa)<\mathrm{h}(\mathscr{M},\lambda)\leqslant\beth_{\alpha_1}(\kappa)$;

② (**GCH**) $\alpha_1>\alpha \Rightarrow \mathrm{h}(\mathscr{M},\lambda)=\beth_{\alpha_1}(\kappa)$.

证明:(1) 据13.3.13的(2)和(3),我们只须证,对 $\lambda<\beth_{\alpha}(\kappa)$,$\beth_{\alpha}(\kappa)=\beth_{\alpha}(\sup\{\kappa,\lambda\})$. 假设 $\alpha>\omega$($\alpha=\omega$ 的情况也类似可证,请读者自证),若 $\lambda=\sup\{\kappa,\lambda\}$ 且对 $\xi_1<\alpha,\lambda<\beth_{\xi_1}(\kappa)$,则因为 α 是极限序数,所以据13.3.2(5),$\omega\cdot\xi_1<\alpha$,选择 ξ_2使得 $\omega\cdot\xi_1+\xi_2=\alpha$,因此

$$\beth_{\alpha}(\kappa)=\beth_{\xi_1+(\omega\cdot\xi_1+\xi_2)}(\kappa)\geqslant\beth_{\omega\cdot\xi_1+\xi_2}(\lambda)=\beth_{\alpha}(\lambda)\geqslant\beth_{\alpha}(\sup\{\kappa,\lambda\}).$$

(2) 据(1)和假设 $\alpha=\alpha_1$,有 $\bar{\mathrm{h}}(\mathscr{M},\lambda)=\beth_{\alpha_1}(\kappa)$. 据13.3.11(2),有 $\bar{\mathrm{h}}(\mathscr{M},\lambda)\leqslant\mathrm{h}(\mathscr{M},\lambda)\leqslant(\bar{\mathrm{h}}(\mathscr{M},\lambda))^{+}$,故 $\mathrm{h}(\mathscr{M},\lambda)\geqslant\beth_{\alpha_1}(\kappa)$,而据13.3.13(3)和(1)的证明,有 $\bar{\mathrm{h}}(\mathscr{M},\lambda)\leqslant\beth_{\alpha_1}(\kappa)$. 因为 $\mathrm{h}(\mathscr{M},\lambda)\leqslant(\bar{\mathrm{h}}(\mathscr{M},\lambda))^{+}$ 且$\beth_{\alpha_1}(\kappa)$是基数,所以 $\mathrm{h}(\mathscr{M},\lambda)\leqslant\beth_{\alpha_1}(\kappa)$.

(3)①:假设 $\alpha_1>\alpha$,据13.3.11(1)和(3),α 是极限序数,所以 $\beth_{\alpha}(\kappa)<\beth_{\alpha_1}(\kappa)$. 据(1),有 $\bar{\mathrm{h}}(\mathscr{M},\lambda)<\beth_{\alpha_1}(\kappa)$,所以有$(\bar{\mathrm{h}}(\mathscr{M},\lambda))^{+}\leqslant\beth_{\alpha_1}(\kappa)$,据13.3.11(2),有 $\mathrm{h}(\mathscr{M},\lambda)\leqslant\beth_{\alpha_1}(\kappa)$. 同理可证

$$\beth_{\alpha}(\kappa)<\mathrm{h}(\mathscr{M},\lambda).$$

②:据①,$\beth_{\alpha}(\kappa)<\mathrm{h}(\mathscr{M},\lambda)$. 因为 $\alpha_1>\alpha$,所以

$$\beth_{\alpha}(\kappa)<\beth_{\alpha_1}(\kappa)=\beth_{\alpha+1}(\kappa)=2^{\beth_{\alpha}(\kappa)}=(\beth_{\alpha}(\kappa))^{+},$$

因此有 $\mathrm{h}(\mathscr{M},\lambda)\geqslant(\beth_{\alpha}(\kappa))^{+}=\beth_{\alpha_1}(\kappa)$. 而据①,又有

$$\mathrm{h}(\mathscr{M},\lambda)\leqslant\beth_{\alpha_1}(\kappa).\ \square$$

我们可以用反例说明,若 $\mathscr{M}$ 是所有幂为 κ 的结构的类使得对所有 $\lambda\leqslant\kappa$,**GCH** 对$\beth_{\omega}(\kappa)$不成立,则

$$\mathrm{h}(\mathscr{M},\lambda)<\beth_{\mathrm{W}(\mathscr{M},\lambda)}(\kappa).$$

13.3.15反例 令 $\mathscr{M}=\{\mathfrak{A}_n:n<\omega\}$,其中每一$\mathfrak{A}_n=\langle A_n,P^{\mathfrak{A}_n}\rangle$,$|A_n|=\kappa$ 且 $P^{\mathfrak{A}_n}$是 A 上的一元关系使得$|P^{\mathfrak{A}_n}|=n$,则理论

$$T_0=\{\forall x[V(x)\leftrightarrow P(x)]:“\langle V,<\rangle 是线序”\}$$

只有良序的 $\mathscr{M}$-模型，且对每一 $n<\omega$，T_0 有序型 $\geqslant n$ 且良序的 $\mathscr{M}$-模型，因此 $\mathrm{W}(\mathscr{M},\lambda)>\omega$. 假设 T 是幂 $\leqslant\lambda$ 的理论使得 T 有 $\mathscr{M}$-模型 $\mathfrak{B}$ 且 $\langle V^{\mathfrak{B}},<^{\mathfrak{B}}\rangle$ 是序型 $\geqslant\omega$ 的良序，则对某个 n，$\mathfrak{B}$ 是 $\{\mathfrak{A}_n\}$-模型. 令 $\{c_n:n<\omega\}$ 是新个体常元集，则

$$T_1=\mathrm{Th}(\mathfrak{B})\cup\{c_{n+1}<c_n:n<\omega\}$$

是一致的. 令 $\mathfrak{C}$ 是 T_1 的模型使得 $|U^{\mathfrak{C}}|=\kappa$(**注意**：我们假设 $\lambda\leqslant\kappa$). 因为 $\mathfrak{C}\models\mathrm{Th}(\mathfrak{B})$，所以 $\mathfrak{C}$ 是 T 的 $\{\mathfrak{A}_n\}$-模型，从而是 T 的 $\mathscr{M}$-模型，因此 $\mathrm{W}(\mathscr{M},\lambda)=\omega+1$ 且 $\overline{\mathrm{W}}(\mathscr{M},\lambda)=\omega$. 据13. 3. 11，13. 3. 14 (1)和(3)，我们有 $\mathrm{h}(\mathscr{M},\lambda)=(\beth_\omega(\kappa))^+$. 因此，若 **GCH** 对 $\beth_\omega(\kappa)$ 不成立，即 $(\beth_\omega(\kappa))^+<2^{\beth_\omega(\kappa)}=\beth_{\omega+1}(\kappa)$，则

$$\mathrm{h}(\mathscr{M},\lambda)<\beth_{\mathrm{W}(\mathscr{M},\lambda)}(\kappa).\ \square$$

13. 3. 16例 称 $\langle A,<\rangle$ 是**类-κ-序**(κ-like ordering) $\Leftrightarrow$ $\langle A,<\rangle$ 是线序，$|A|=\kappa$，且对所有 $a\in A$，$|\{b\in A:b<a\}|<\kappa$. 令 $\mathscr{M}_\kappa=\{\langle A,<\rangle:\langle A,<\rangle 是类\text{-}\kappa\text{-}序\}$. 据13. 3. 14(1)，对 $\lambda<\beth_\alpha(\kappa)$，其中 $\alpha=\overline{\mathrm{W}}(\mathscr{M}_\kappa,\lambda)$，有 $\mathrm{h}(\mathscr{M}_\kappa,\lambda)=\beth_\alpha(\kappa)$. $\square$

13. 3. 17例 令 $\mathfrak{A}_\kappa=\langle\kappa,<,\xi\rangle_{\xi<\kappa}$，其中 $<=\in\upharpoonright\kappa$，据13. 3. 14 (1)，我们有 $\bar{\mathrm{h}}(\{\mathfrak{A}_\kappa\},\kappa)=\beth_\alpha(\kappa)$，其中 $\alpha=\overline{\mathrm{W}}(\{\mathfrak{A}_\kappa\},\kappa)$，但 $\kappa\cdot\kappa<\alpha$，所以 $\beth_\alpha=\beth_\alpha(\kappa)$，因此 $\bar{\mathrm{h}}(\{\mathfrak{A}_\kappa\},\kappa)=\beth_\kappa$. $\square$

13. 3. 18例 我们可以把 $\mathrm{EC}(\mathscr{L}_{\kappa^+\omega})$ 写作

$$\{\mathrm{Mod}(\sigma):\sigma 是 \mathscr{L}_{\kappa^+\omega} 的句子\}.$$

这样，$\bar{\mathrm{h}}(\mathrm{EC}(\mathscr{L}_{\kappa^+\omega}))$ 就是11. 2. 5的 $\mathrm{h}(\mathscr{L}_{\kappa^+\omega})$. 如通常那样(参见第11章 § 3，特别是11. 3. 1的证明)，对 $\mathscr{L}_{\kappa^+\omega}$ 的任意句子 σ，我们可以构造与 σ 相关且幂 $\leqslant$ 的理论 T_σ 和型集 $S_\sigma=\{\Gamma_{\sigma,\xi}:\xi<\kappa\}$，其中每一 $\Gamma_{\sigma,\xi}$ 的幂 $\leqslant\kappa$，由11. 3. 1证明中的诸结果，我们有：

(1)(Chang，[1968a])

$$\bar{\mathrm{h}}(\mathrm{EC}(\mathscr{L}_{\kappa^+\omega}))=\bar{\mathrm{h}}(\{\mathfrak{A}_\kappa\},\kappa),$$

$$\overline{W}(EC(\mathscr{L}_{\kappa^+\omega}))=\overline{W}(\{\mathfrak{A}_\kappa\},\kappa).$$

(2)(Barwise-Kunen,[1971]; J. H. Schmerl,[1970])

$$h(EC(\mathscr{L}_{\kappa^+\omega}))=\beth_\alpha,\quad 其中\ \alpha=\overline{W}(EC(\mathscr{L}_{\kappa^+\omega})).$$

(参见13.1.19(4).)□

13.3.19例(Morley,[1971]) 令 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathscr{L}$-结构,$\mathscr{M}=\{\mathfrak{A}\}$,我们用 $W(\mathfrak{A},\lambda)$,$\overline{W}(\mathfrak{A},\lambda)$,$h(\mathfrak{A},\lambda)$,$\bar{h}(\mathfrak{A},\lambda)$分别指称$W(\{\mathfrak{A}\},\lambda)$,$\overline{W}(\{\mathfrak{A}\},\lambda)$,$h(\{\mathfrak{A}\},\lambda)$,$\bar{h}(\{\mathfrak{A}\},\lambda)$. 据13.3.14(1),对$|\mathscr{L}|\leqslant\lambda<\beth_\alpha(|A|)$,其中 $\alpha=\overline{W}(\mathfrak{A},\lambda)$,有

$$\bar{h}(\mathfrak{A},\lambda)=\beth_\alpha(|A|).\ \square$$

13.3.20引理 下列命题等价:

(1) $\overline{W}(\mathfrak{A},\lambda)=\omega$.

(2) $W(\mathfrak{A},\lambda)=\omega$.

证明:显然有(2) ⇒ (1).

假设(1)成立,且假设对每一 $n<\omega$,T_n 是幂$\leqslant\lambda$的理论,对 $i<j<\omega$,$T_i\subseteq T_j$ 且每一 T_n 有一$\{\mathfrak{A}\}$-模型,据13.3.13的证明中的②和13.3.3,只须证 $\bigcup_{n<\omega}T_n$ 有$\{\mathfrak{A}\}$-模型. 令$\langle\sigma_{n,\xi}:\xi<\lambda\rangle$是对 T_n 的枚举,据假设,存在$\{\mathfrak{A}\}$-模型 $\mathfrak{B}$ 使得$\langle V^{\mathfrak{B}},<^{\mathfrak{B}}\rangle$是序型为 ω 的良序且 B 的诸子集 $B_n(n<\omega)$有下列性质(可把诸 B_n 看作是一元谓词):

① $U^{\mathfrak{B}}\subseteq B_n\subseteq B$,

② $\mathfrak{B}\models$"$V(x)$,x 大于$\langle V,<\rangle$中第 n 个元 ⇒ $\sigma_{n,\xi}$在 B_x 中成立".

据(1),存在 $Th(\mathfrak{B})$的一个非良序$\{\mathfrak{A}\}$-模型 $\mathfrak{C}$. 对$\langle V^{\mathfrak{C}},<^{\mathfrak{C}}\rangle$中任意非标准"整数"$x$,$B_x^{\mathfrak{C}}$ 是$\bigcup_{n<\omega}T_n$ 的一$\{\mathfrak{A}\}$-模型的个体域. □

从13.3.19和13.3.20直接可得:

13.3.21推论 若$|\mathscr{L}|\leqslant\aleph_0$,则下列等价:

(1) $\overline{W}(\mathfrak{A},\omega)=\omega$.

(2) $W(\mathfrak{A},\omega)=\omega$.

(3) $h(\mathfrak{A},\omega)=\beth_\omega(|A|)$.

(4) 幂为 ω 的$\{\mathfrak{A}\}$-结构的族 $F(\mathfrak{A},\omega)$是 ω-紧致的. □

13.3.22定理 令 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathscr{L}$-结构，λ 是基数使得 $|\mathscr{L}|\leqslant\lambda<\beth_{\alpha}(|A|)$，其中 $\alpha=\overline{\mathrm{W}}(\mathfrak{A},\lambda)$，则

$$\mathrm{W}(\mathfrak{A},\lambda)=\overline{\mathrm{W}}(\mathfrak{A},\lambda),\quad \mathrm{h}(\mathfrak{A},\lambda)=\bar{\mathrm{h}}(\mathfrak{A},\lambda).$$

证明（概述）：本证明类似13.1.8的证明，所以在此我们主要说明两者的不同之处．据13.3.20，$\alpha=\omega$ 的情况已得到证明，因此这里考虑 $\alpha>\omega$．假设幂 $\leqslant\lambda$ 的理论 T_0 没有任意大幂的 $\{\mathfrak{A}\}$-模型，下证存在一个 $\xi_0<\alpha$ 使得 T_0 的每一 $\{\mathfrak{A}\}$-模型的幂 $\leqslant\beth_{\xi_0}(|A|)$，从而 $\mathrm{h}(\mathfrak{A},\lambda)\leqslant\beth_{\alpha}(|A|)$．据13.3.14，我们有

$$\mathrm{W}(\mathfrak{A},\lambda)=\overline{\mathrm{W}}(\mathfrak{A},\lambda),\quad \mathrm{h}(\mathfrak{A},\lambda)=\bar{\mathrm{h}}(\mathfrak{A},\lambda).$$

令 $\mathscr{L}'$ 是幂 $\leqslant\lambda$ 的语言，T_0 是 $\mathscr{L}'_{\omega\omega}$-理论，$\mathscr{L}\subseteq\mathscr{L}'$，且 $U\in\mathscr{L}'$．不妨假设 T_0 是 $\mathscr{L}'_{\omega\omega}$ 的 Skolem-理论．对 $n<\omega$，令 $\mathbf{S}_n$ 是

$$\mathscr{L}'\cup\{X,\prec\}\cup\{u_a:a\in A\}\cup\{c_1,\cdots,c_n\}$$

的所有一致理论 T 的集合使得

(1) $T_0\subseteq T$，

(2) "X 是无穷集"$\subseteq T$，

(3) "$\prec\restriction X$ 是线序"$\in T$，

(4) $c_1\prec\cdots\prec c_n$，

$X(c_1)\wedge\cdots\wedge X(c_n)\in T$，

$\neg(c_i\equiv c_j)\in T,\quad 1\leqslant i<j\leqslant n$，

(5) $\forall\vec{u}_n\vec{x}_n[\bigwedge_{i=1}^{n}U(u_i)\wedge\bigwedge_{i=1}^{n}X(x_i)\wedge x_1\prec\cdots\prec x_n$

$\rightarrow(\varphi(\vec{u}_n,\vec{x}_n)\leftrightarrow\varphi(\vec{u}_n,\vec{c}_n))]\in T$，　对所有 $\mathscr{L}'_{\omega\omega}$-公式 $\varphi(\vec{v}_{2n})$，

(6) $U(t(\vec{u}_{a_n},\vec{c}_n))$ 或 $\neg U(t(\vec{u}_{a_n},\vec{c}_n))$ 属于 T，

对所有 $\mathscr{L}'$-项 $t(\vec{v}_{2n})$，

若 $U(t(\vec{u}_{a_n},\vec{c}_n))\in T$，则对某个 $a\in A$，$t(\vec{u}_{a_n},\vec{c}_n)=u_a\in T$，

(7) T 包含所有在 $(\mathfrak{A},a)_{a\in A}$ 中成立的原子句或原子句的否定，

(8) 对所有 $a\in A$，$U(u_a)\in T$，

(9) 若 $T_1\subseteq T$ 且 T_1 满足上述(1)—(8)，则 $T_1=T$．

令 $\mathbf{S}=\bigcup_{n<\omega}\mathbf{S}_n$. 定义 $\mathbf{S}$ 上的二元关系 R 如下：

$$\langle T_1, T_2\rangle \in R \Leftrightarrow T_2 \subsetneq T_1.$$

下证：

$$\langle \mathbf{S}, R\rangle \text{是良序的}. \tag{13.27}$$

假设(13.27)不成立，则 $\langle \mathbf{S}, R\rangle$ 中存在递降链 $\langle T_n^* : n<\omega\rangle$. 令 $T^*=\bigcup_{n<\omega}T_n^*$. 易证 T^* 是一致的，且 T_0 有任意大幂的 $\{\mathfrak{A}\}$-模型而这与我们关于 T_0 的假设矛盾.

因为 $\langle \mathbf{S}, R\rangle$ 是良建的，所以若13.1.8的证明那样定义 $\mathbf{S}$ 中元素和 $\mathbf{S}$ 自身的秩函数 Rank. 令 $T\in\mathbf{S}_n$ 且 $\mathfrak{B}$ 是 T 的 $\{\mathfrak{A}\}$-模型使得 $U^{\mathfrak{B}}=\{u_a^{\mathfrak{A}} : a\in A\}$. 施归纳于 $\beta=\mathrm{Rank}(T)$, 我们来证明：

$$|X_\beta| < \beth_{\omega\cdot(\beta+1)}(\sup\{\lambda, |A|\}). \tag{13.28}$$

令 $\mathfrak{B}=(\mathfrak{B}_1, X, \vec{c}_n)$, 假设

$$|X^{\mathfrak{B}}| \geqslant \beth_{\omega\cdot(\beta+1)}(\sup\{\lambda, |A|\}),$$

据(13.25)，存在子集 $X_0\subseteq X^{\mathfrak{B}}$, $|X_0|\geqslant\beth_{\omega\cdot\beta}(\sup\{\lambda, |A|\})$ 使得对某个 $T_1\in\mathbf{S}_{n+1}$ 和任意 $\vec{x}_{n+1}\in X_0$, $x_1<^{\mathfrak{B}}\cdots<^{\mathfrak{B}}x_{n+1}$, 且 $(\mathfrak{B}_1, X_0, \vec{x}_{n+1})$ 是 T_1 的 $\{\mathfrak{A}\}$-模型. 据定义 $\mathbf{S}_n$ 的(9), $T\subsetneq T_1$, 所以 $\langle T_1, T\rangle\in R$,

因此 $\qquad\qquad \mathrm{Rank}(T_1)<\mathrm{Rank}(T)$,

但对 $\gamma=\mathrm{Rank}(T_1)$,

$$|X_0| \geqslant \beth_{\omega\cdot(\gamma+1)}(\sup\{\lambda, |A|\}),$$

与归纳假设矛盾，所以(13.28)成立.

令 $\mathfrak{B}\vDash T_0$ 是解释 $\mathscr{L}'$ 的 $\{\mathfrak{A}\}$-模型，所以 $\mathfrak{B}$ 的 U-部分（见13.3.13前的规定）与 $\mathfrak{A}$ 同构. 不妨假设 $\mathfrak{B}$ 的这个 U-部分对 $\mathscr{L}$ 的归约就是 $\mathfrak{A}$. 令 $<^{\mathfrak{B}}$ 是 B 的任意线序，则结构 $(\mathfrak{B}, B, <^{\mathfrak{B}}, a)_{a\in A}$ 是某个 $T\in\mathbf{S}_0$ 的 $\{\mathfrak{A}\}$-模型（其中 B 是对 X 的解释，a 是对 u_a 的解释），据(13.28)，对 $\beta=\mathrm{Rank}(T)$, 有

$$|B| < \beth_{\omega\cdot(\beta+1)}(\sup\{\lambda, |A|\}),$$

因此，对 $\eta=\mathrm{Rank}(\mathbf{S})$, 有 $|B|<\beth_{\omega\cdot\eta}(\sup\{\lambda, |A|\})$. 因为对 $\alpha=\overline{\mathrm{W}}(\mathfrak{A}, \lambda)$, $\beth_\alpha(|A|)=\beth_\alpha(\sup\{\lambda, |A|\})$, 且对每一 $\xi<\alpha$, $\omega\cdot\xi<\alpha$, 所

以剩下只须证：

$$\text{Rank}(\mathbf{S})<\alpha. \tag{13.29}$$

为此我们要描述性地构造一个幂$\leqslant\lambda$的、包含谓词S_1，R_1的理论T_1使得在T_1的每一$\{\mathfrak{A}\}$-模型中$(\mathbf{S},R)$可以用(S_1,R_1)来"表示". 据$(\mathbf{S},R)$的良建性，(13.29)可以用$\overline{\mathrm{W}}(\mathfrak{A},\lambda)$的定义得到.

令Sent_n是对应$\mathbf{S}_n$中诸理论的语言$\mathscr{L}^n$的句子集，我们可以将$\bigcup_{n<\omega}\text{Form}(\mathscr{L}^n)$的公式用 Gödel-数编码，从而构造理论$T_1$使得(**注意**：我们假设$\alpha>\omega$，所以能在一个幂$\leqslant\lambda$的适当的理论的所有$\{\mathfrak{A}\}$-模型中刻画一个序型为$\omega$的良序)：

① $|T_1|\leqslant\lambda$，

② T_1包含一元谓词S_1和二元谓词R_1；在T_1的任意$\{\mathfrak{A}\}$-模型$\mathfrak{B}$中，对任意$t\in B$使得$t\in S_1^{\mathfrak{B}}$，存在唯一的$n<\omega$和唯一的理论$T_t\in\mathbf{S}_n$使$\{c_r:r<\omega\}$中恰好有个体常元$c_1,\cdots,c_n$至少出现在$\bigcup_{n<\omega}\mathscr{L}^n$的一个句子中，且该句的 Gödel-数在$t$中，而且$T_t$中每一句子的 Gödel-数也在$t$中.

③ 令$\mathfrak{B}$是T_1的$\{\mathfrak{A}\}$-模型，$t_1,t_2\in B$使得$t_1,t_2\in S_1^{\mathfrak{B}}$，若$\langle t_1,t_2\rangle\in R_1^{\mathfrak{B}}$，则$\langle T_{t_1},T_{t_2}\rangle\in R$(因此$T_{t_1}$和$T_{t_2}$由②定义).

④ 存在T_1的$\{\mathfrak{A}\}$-模型$\mathfrak{B}$使得

(Ⅰ) 对每一$T\in\mathbf{S}$，存在$t\in B$使得$t\in S_1^{\mathfrak{B}}$，且$T_t=T$，

(Ⅱ) 对任意$t_1,t_2\in B$，若$t_1,t_2\in S_1^{\mathfrak{B}}$，则

$$\langle t_1,t_2\rangle\in R_1^{\mathfrak{B}}\Leftrightarrow\langle T_{t_1},T_{t_2}\rangle\in R.$$

据③，在T_1的任意$\{\mathfrak{A}\}$-模型$\mathfrak{B}$中，$\langle S_1^{\mathfrak{B}},R_1^{\mathfrak{B}}\rangle$是良建的. 因为秩函数(从而它的值域)是一阶可定义的，所以对T_1的任意$\{\mathfrak{A}\}$-模型$\mathfrak{B}$，$\text{Rank}(S_1^{\mathfrak{B}})<\alpha$. 据④，$\text{Rank}(\mathbf{S})<\alpha$. □

现在据13.3.22，13.3.17和13.3.18，我们有：

13.3.23推论 令$\alpha=\overline{\mathrm{W}}(\mathrm{EC}(\mathscr{L}_{\kappa^+\omega}))=\overline{\mathrm{W}}(\mathscr{L}_{\kappa^+\omega})$，

$$\mathrm{h}(\mathrm{EC}(\mathscr{L}_{\kappa^+\omega}))=\mathrm{h}(\mathscr{L}_{\kappa^+\omega})=\beth_\alpha. \square$$

主要参考文献

Aczel, P. H. G.

[1973] *Infinitary logic and the Barwise compactness theorem.* In: **Proceedings of the Bertrand Russell Memorial Logic Conference**, edited by J. L. Bell, J. C. Cole, G. Priest and A. B. Slomson. University of Leeds, 1973, pp. 234—277.

Adamson, A. A.

[1980] *Saturated structures, unions of chains, and preservation theorems.* **Annals of Mathematical Logic**, vol. 19(1980), pp. 67-96.

Barwise, K. J.

[1967] ***Infinitary Logic and Admissible Sets.*** Doctoral Dissertation, Stanford University, 1967, 124pp.

[1968] *Implicit definability and compactness in infinitary languages.* In: **The Syntax and Semantics of Infinitary Languages**, edited by K. J. Barwise. **Springer-Verlag Lecture Notes in Mathematics**, vol. 72(1968), pp. 1-35.

[1969a] *Applications of strict* Π_1^1 *predicates to infinitary logic.* **Journal of Symbolic Logic**, vol. 34(1969), pp. 409-423.

[1969b] *Infinitary logic and admissible sets.* **Journal of Symbolic Logic**, vol. 34(1969), pp. 226-252.

[1973] *Back and forth through infinitary logics.* In: **Studies in Model Theory**, edited by M. D. Morley. **Mathematical Association of America, Studies in Mathematics**, vol. 8(1973), pp. 5-34.

[1975] **Admissible Sets and Structures: An Approach to Definability Theory.** Springer-Verlag, 1975, xiii + 394pp.

Barwise, K. J., Gandy, R. O. and Moschovakis, Y. N.

[1971] *The next admissible set.* **Journal of Symbolic Logic**, vol. 36(1971), pp. 108-120.

Barwise, K. J. and Kunen, K.

[1971] *Hanf numbers for fragments of* $\mathscr{L}_{\infty\omega}$. **Israel Journal of Mathematics**, vol. 10(1971), pp. 306—320.

Baumgartner, J. E.

[1974] *The Hanf number for complete* $\mathscr{L}_{\omega_1,\omega}$ sentences (without **GCH**). **Journal of Symbolic Logic**, vol. 39(1974), pp. 575—578.

Bell, J. L.

[1970] *Weak compactness in restricted second-order languages.* **Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des Sciences Mathématiques**, vol. 18(1970), pp. 111—114.

[1972] *On the relationship between weak compactness in* $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$, $\mathscr{L}_{\omega_1\omega_1}$ *and restricted second order languages.* **Archiv für Mathematische Logik und Grundlagenforschung**, vol. 15(1972), pp. 74—78.

Bell, J. L. and Slomson, A. B.

[1969] **Models and Ultraproducts: An Introduction.** North-Holland Publishing Company, 1969, ix+322pp.

Benda, M.

[1978] *Compactness for omitting of types.* **Annals of Mathematical Logic**, Vol. 14(1978), pp. 39—56.

Beth, E. W.

[1953] *On Padoa's method in the theory of definition.* **Indagationes Methematicae**, Vol. 15(1953), pp. 330—339.

Caicedo Ferrer, X.

[1981] *Independent sets of axioms in* $\mathscr{L}_{\kappa\alpha}$. **Canadian Mathematical Bulletin**, Vol. 24(1981), pp. 219—223.

Calais, J.-P.

[1972] *Partial isomorphisms and infinitary languages.* **Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik**, Vol. 18

(1972), pp. 435—456.

Chang, C. C.

[1956] *A simple proof of the Rabin-Keisler theorem.* **Bulletin of the American Mathematical Society**, vol. 71 (1956), pp. 642—643.

[1957] *On the representation of α-complete Boolean algebras.* **Transactions of the American Mathematical Society**, vol. 85 (1957), pp. 208—218.

[1968a] *Some remarks on the model theory of infinitary languages.* In: **The Syntax and Semantics of Infinitary Languages**, edited by K. J. Barwise. **Springer-Verlag Lecture Notes in Mathematics**, vol. 72 (1968), pp. 36—63.

[1968b] *Infinitary properties of models generated from indiscernibles.* In: **Logic, Methodology and Philosophy of Science, III**, edited by B. van Rootselaar and J. F. Staal. North-Holland Publishing Company, 1968, pp. 9—21.

[1971a] *Sets constructible using* $\mathscr{L}_{\kappa\kappa}$. In: **Axiomatic Set Theory, Part I**, edited by D. S. Scott. **American Mathematical Society Proceedings of Symposia in Pure Mathematics**, Vol. 13 (1971), pp. 1—8.

[1971b] *Two interpolation theorems.* **Symposia Mathematica**, Vol. 5 (1971), pp. 5—19.

Chang, C. C. and Keisler, H. J.

[1973] **Model Theory.** North-Holland Publishing Company, 1973, xii + 550pp.

Church, A.

[1956] **Introduction to Mathematical Logic.** vol. 1, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1956, x + 378pp.

Cutland, N. J.

[1972] Σ_1*-compactness and ultraproducts.* **Journal of Symbolic Logic**, vol. 37 (1972), pp. 688—672.

[1978] Σ_1*-compactness in languages stronger than* $\mathscr{L}_A$. **Journal of Symbol-**

ic Logic, vol. 43(1978), pp. 508—520.

Dickmann, M. A.

[1970] **Model Theory of Infinitary Languages. Aarhus Lecture Notes Series. Matematisk Institut, Aarhus Universitet**, vol. 20, 1970, viii+390pp.

[1975] **Large Infinitary Languages: Model Theory.** North-Holland Publishing Company, 1975, xv+464pp.

Ehrenfeucht, A.

[1961] *An application of games to the completeness problem for formalized theories.* **Fundamenta Mathematicae**, vol. 49(1961), pp. 129—141.

Ehrenfeucht, A. and Mostowski, A.

[1956] *Models of axiomatic theories admitting automorphisms.* **Fundamenta Mathematicae**, vol. 43(1956), pp. 50—68.

Eklof, P. C.

[1970] *On the existence of* $\mathscr{L}_{\infty\kappa}$*-indiscernibles.* **Proceedings of the American Mathematical Society**, vol. 25(1970), pp. 798—800.

[1977] *Classes closed under substructures and direct limits.* **Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik**, Vol. 23(1977), pp. 427—430.

Enderton, H. B.

[1972] **A Mathematical Introduction to Logic.** Academic Press, 1972, xiii+295pp.

Feferman, S.

[1972] *Infinitary properties, local functors, and systems of ordinal functions.* In: **Conference in Mathematical Logic, London '70**, edited by W. Hodges. **Springer-Verlag Lecture Notes in Mathematics**, Vol. 225(1972), pp. 63—97.

Feferman, S. and Vaught, R. L.

[1959] *The first order properties of algebraic systems.* **Fundamenta Mathematicae**, Vol. 47(1959), pp. 57—103.

Ferro, R.

[1981] *An analysis of Karp's interpolation theorem and the notion of κ-consistency property*. **Rendiconti del Seminario Matematico dell' Università di Padova**, vol. 65(1981), pp. 111—118.

Flum, J.

[1972] *Hanf numbers and well-ordering numbers*. **Archiv für Mathematische Logik und Grundlagenforschung**, vol. 15(1972), pp. 164—178.

Fraïssé, R.

[1974] *Isomorphisme local et équivalence associés à un cardinal; utilité en calcul des formules infinies à quanteurs finis*. In: **Proceedings of the Tarski Symposium**, edited by L. A. Henkin. **American Mathematical Society Proceedings of Symposia in Pure Mathematics**, Vol. 25(1974), pp. 241—254.

Frayne, T. E., Morel, A. C. and Scott, D. S.

[1962] *Reduced direct products*. **Fundamenta Mathematicae**, Vol. 51 (1962), pp. 195—228.

Friedman, H. M.

[1971] *The Beth and Craig theorems in infinitary languages*. Manuscript, University of Wisconsin, 1971, 37pp.

[1973] *Countable models of set theories*. In: **Cambridge Summer School in Mathematical Logic**. **Lecture Notes in Mathematics**, Vol. 337 (1973), pp. 539—573.

Gaifman, H.

[1968] *Two results concerning extensions of models of set theory*. **Notices of the American Mathematical Society**, vol. 15(1968), p. 947, Abstract.

Gillman, L.

[1956] *Some remarks on η_α sets*. **Fundamenta Mathematicae**, Vol. 43 (1956), pp. 77—82.

Green, J.

[1972] ***Consistency properties for uncountable finite-quantifier languages.*** Doctoral Dissertation, University of Maryland, 1972, 127pp.

[1975] *A note on P-admissible sets with urelements.* **Notre Dame Journal of Formal Logic**, Vol. 16(1975), pp. 415—417.

Gregory, J.

[1971] *Incompleteness of a formal system for infinitary finite-quatifier formulas.* **Journal of Symbolic Logic**, Vol. 36(1971), pp. 445—455.

[1974] *Beth definability in infinitary languages.* **Journal of Symbolic Logic**, vol. 39(1974), pp. 22—26.

Grossberg, R.

[1988] *A downward Löwenheim-Skolem theorem for infinitary theories which have the unsuperstability property.* **Journal of Symbolic Logic**, Vol. 53(1988), pp. 231—242.

Hanf, W.

[1962] ***Some fundamental problems concerning languages with infinitely long expressions.*** Doctoral Dissertation, University of California, Berkeley, 1962, 69pp.

[1964] *Incompactness in languages with infinitely long expressions.* **Fundamenta Mathematicae**, vol. 53(1964), pp. 309—324.

Hanf, W. and Scott, D. S.

[1961] *Classifying inaccessible cardinals.* **Notices of the American Mathematical Society**, vol. 8(1961), p. 445. Abstract.

Helling, M.

[1964] *Hanf numbers for some generalizations of first-order languages.* **Notices of the American Mathematical Society**, vol. 11(1964), p. 679, Abstract.

Henkin, L. A.

[1961] *Some remarks on infinitely long formulas.* In: **Infinitistic Methods: Proceedings of the Symposium on Foundations of Mathematics**,

edited by Anonymous. Pergamon Press and Pánstwowe Wydawnictwo Naukowe (Polish Scientific Publishers), 1961, pp. 167—183.

[1963] *An extension of the Craig-Lyndon theorem.* **Journal of Symbolic Logic**, vol. 28(1963), pp. 201—216.

Jech, T. J.

[1973] *Some combinatorial problems concerning uncountable cardinals.* **Annals of Mathematical Logic**, vol. 5(1973), pp. 165—198.

[1978] **Set Theory**. Academic Press, 1978, xi+621pp.

Jensen, R. B. and Karp, C.

[1971] *Primitive recursive set functions.* In: **Axiomatic Set Theory, Part I**, edited by D. S. Scott. **American Mathematical Society Proceedings of Symposia in Pure Mathematics**, vol. 13(1971), pp. 143—176.

Karp, C.

[1962] *Independence proofs in predicate logic with infinitely long expressions.* **Journal of Symbolic Logic**, vol. 27(1962), pp. 171—188.

[1964] **Languages with Expressions of Infinite Length**. North-Holland Publishing Company, 1964, xx+183pp.

[1965] *Finite-quantifier equivalence.* In: **The Theory of Models**, edited by J. W. Addison, L. A. Henkin and A. Tarski. North-Holland Publishing Company, 1965, pp. 407—412.

[1968] *An algebraic proof of the Barwise compactness theorem.* In: **The Syntax and Semantics of Infinitary Languages**, edited by K. J. Barwise. **Springer-Verlag Lecture Notes in Mathematics**, vol. 72 (1968), pp. 80—95.

[1972] *From countable to cofinality ω in infinitary model theory.* **The Journal of Symbolic Logic**, vol. 37(1972), pp. 430—431.

[1974] *Infinite-quantifier languages and ω-chains of models.* In: **Proceedings of the Tarski Symposium**, edited by L. A. Henkin. **American Mathematical Society Proceedings of Symposia in Pure Mathematics**, vol. 25(1974), pp. 225—232.

Keisler, H. J.

[1960] *The completeness of a certain class of first-order logics with infinitary relations*, *Abstract* 569—46. **Notices of the American Mathematical Society**, vol. 7(1960), p. 363.

[1962] *Some applications of the theory of models to set theory*. In: **Logic, Methodology and Philosophy of Science**, edited by E. Nagel, P. Suppes and A. Tarski. Stanford University Press, 1962, pp. 80—86.

[1963] *A complete first-order logic with infinitary predicates*. **Fundamenta Mathematicae**, vol. 52(1963), pp. 177—203.

[1965] *Finite approximations of infinitely long formulas*. In: **The Theory of Models**, edited by J. W. Addison, L. A. Henkin and A. Tarski. North-Holland Publishing Company, 1965, pp. 158—169.

[1971] **Model Theory for Infinitary Logic; Logic with Countable Conjunctions and Finite Quantifiers**. North-Holland Publishing Company, 1971, x+208pp.

Keisler, H. J. and Morley, M. D.

[1968] *Elementary extensions of models of set theory*. **Israel Journal of Mathematics**, vol. 6(1968), pp. 49—65.

Keisler, H. J. and Silver, J. H.

[1971] *End extensions of models of set theory*. In: **Axiomatic Set Theory Part I**, edited by D. S. Scott. **American Mathematical Society Proceedings of Symposia in Pure Mathematics**, vol. 13(1971), pp. 177—187.

Keisler, H. J. and Tarski, A.

[1964] *From accessible to inaccessible cardinals*. **Fundamenta Mathematicae**, vol. 53(1964), pp. 225—308.

Kleene, S. C.

[1952] **Introduction to Metamathematics**. The University Series in Higher Mathematics, New York (Van Nostrand), 1952.

Knight, J. F.

[1977] *A complete $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$-sentence characterizing $\aleph_1$*. **Journal of Symbolic Logic**, vol. 42(1977), pp. 59—62..

Kreisel, G.

[1968] *Choice of infinitary languages by means of definability criteria; generalized recursion theory.* In: **The Syntax and Semantics of Infinitary Languages**, edited by K. J. Barwise. **Springer-Verlag Lecture Notes in Mathematics**, vol. 72(1968), pp. 139—151.

Kreisel, G. and Krivine, J. L.

[1967] **Elements of Mathematical Logic: Model Theory.** North-Holland Publishing Company, 1967, xi+222pp.

Kripke, S. A.

[1964] *Transfinite recursions on admissible ordinals, I — II.* **Journal of Symbolic Logic**, vol. 29(1964), pp. 161—162. Abstracts.

Kunen, K.

[1968a] *Implicit definability and infinitary languages.* **Journal of Symbolic Logic**, vol. 33(1968), pp. 446—451.

[1968b] ***Inaccessibility properties of cardinals.*** Doctoral Dissertation, Stanford University, 1968, 112pp.

[1970] *Some applications of iterated ultrapowers in set theory.* **Annals of Mathematical Logic**, vol. 1(1970), pp. 179—227.

[1971] *On the* **GCH** *at measurable cardinals.* In: **Logic Colloquium '69**, edited by R. O. Gardy. North-Holland Publishing Company, 1971, pp. 107—110.

Kuratowski, K. and Mostowski, A.

[1968] **Set Theory (First Edition).** Państwowe Wydawnictwo Naukowe (Polish Scientific Publishers) and North-Holland Publishing Company, 1968, xi+417pp.

Lévy, A.

[1971] *The sizes of indescribable cardinals.* In: **Axiomatic Set Theory, Part I**, edited by D. S. Scott. **American Mathematical Society Proceed-**

ings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 13(1971), pp. 205—218.

Lindström, P.

[1969] *On extensions of elementary logic.* **Theoria**, vol. 35(1969), pp. 1—11.

López-Escobar, E. G. K.

[1965] *An interpolation theorem for denumerably long formulas.* **Fundamenta Mathematicae**, vol. 57(1965), pp. 253—272.

[1966] *On defining well-orderings.* **Fundamenta Mathematicae**. vol. 59 (1966), pp. 13—21, 299—300.

[1968] *Well-orderings and finite quantifiers.* **Journal of the Mathematical Society of Japan**, vol. 20(1968), pp. 477—489.

Makkai, M.

[1969a] *Preservation theorems for logic with denumerable conjunctions and disjunctions.* **Journal of Symbolic Logic**, vol. 34(1969), pp. 437—459.

[1969b] *On the model theory of denumerably long formulas with finite strings of quantifier.* **Journal of Symbolic Logic**, vol. 34(1969), pp. 437—459.

[1969c] *Structures elementarily equivalent to models of higher power relative to infinitary languages.* **Notices of the American Mathematical Society**, vol. 16(1969), p. 322. Abstract.

[1977] *Admissible sets and infinitary logic.* In: **Handbook of Mathematical Logic**, edited by K. J. Barwise. North-Holland Publishing Company, 1977, pp. 233—281.

Malitz, J. I.

[1966] ***Problems in the model theory of infinite languages*** . Doctoral Dissertation, University of California, Berkeley, 1966, iii+83pp.

[1968] *The Hanf number for complete* $\mathscr{L}_{\omega_1,\omega}$ sentences. In: **The Syntax and Semantics of Infinitary Languages**, edited by K. J. Barwise. **Springer-Verlag Lecture Notes in Mathematics**, vol. 72(1968),

pp. 166—181.

[1969] *Universal classes in infinitary languages.* Duke Mathematical Journal, vol. 36(1969), pp. 621—630.

[1971] *Infinitary analogs of theorems from first-order model theory.* **Journal of Symbolic Logic**, Vol. 36(1971), pp. 216—228.

Menas, T. K.

[1974] *On strong compactness and supercompactness.* **Annals of Mathematical Logic**, vol. 7(1974), pp. 327—359.

Morley, M. D.

[1965] *Omitting classes of elements.* In: **The Theory of Models**, edited by J. W. Addison, L. A. Henkin and A. Tarski. North-Holland Publishing Company, 1965, pp. 265—273.

[1967] *The Hanf number for ω-logic.* **Journal of Symbolic Logic**, vol. 32 (1967), pp. 437—438. Abstract.

[1968] *Partitions and models.* In: **Proceedings of the Summer School in Logic, Leeds, 1967**, edited by M. H. Löb. **Springer-Verlag Lecture Notes in Mathematics**, vol. 70(1968), pp. 109—158.

[1971] *The Löwenheim Skolem theorem for models with standard part.* In: **Symposia Mathematica** V. Academic Press, London-New York, 1971, pp. 43—52.

Morley, M. D. and Morley, V.

[1967] *The Hanf number for κ-logic.* **Notices of the American Mathematical Society**, vol. 14(1967), p. 556, Abstract.

Mostowski, A.

[1949] *An undecidable arithmetical statement.* **Fundamenta Mathematicae**, vol. 36(1949), pp. 143—164.

Mostowski, A. and Tarski, A.

[1949] *Arithmetical classes and types of well-ordered systems. Preliminary report.* **Bulletin of the American Mathematical Society**, vol. 55 (1949), p. 65. Abstract.

Nadel, M. E.

[1972] *Some Löwenheim-Skolem results for admissible sets.* **Israel Journal of Mathematics**, vol. 12(1972), pp. 427—432.

[1974] *More Löwenheim-Skolem results for admissible sets.* **Israel Journal of Mathematics**, vol. 18(1974), pp. 53—64.

Pierce, R. S.

[1958] *Distributivity and the normal completion of Boolean algebras.* **Pacific Journal of Mathematics**, vol. 8(1958), pp. 133—140.

Platek, R.

[1966] ***Foundations of recursion theory.*** Doctoral Dissertation, Stanford University, 1966, 215pp.

Reznikoff, M. I.

[1965] *Tout ensemble de formules de la logìque classique est equivalent á un ensemble independant.* **Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des sciences.** Paris, vol. 260(1965), pp. 2385—2388.

Schmerl, J. H.

[1970] ***On κ-like models for inaccessible κ.*** Doctoral Dissertation, University of California, Berkeley, 1970.

Scott, D. S.

[1955] *A new characterization of α-representable Boolean algebras.* **Bulletin of the American Mathematical Society**, vol. 61(1955), pp. 522—523.

[1957] *The independence of certain distributive laws in Boolean algebras.* **Transactions of the American Mathematical Society**, vol. 84(1957), pp. 257—261.

[1958] *On the Löwenheim-Skolem theorem in weak second-order logic.* **Notices of the American Mathematical Society**, vol. 6(1958), p. 778. Abstract.

[1961] *Measurable cardinals and constructible sets.* **Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des Sciences Mathématiques**, vol. 9

(1961), pp. 521—524.

[1965] *Logic with denumerably long formulas and finite strings of quantifiers*. In: **The Theory of Models**, edited by J. W. Addison, L. A. Henkin and A. Tarski. North-Holland Publishing Company, 1965, pp. 329—341.

Scott, D. S. and Tarski, A.

[1958] *The sentential calculus with infinitely long expressions*. **Colloquium Mathematicum**, vol. 6(1958), pp. 165—170.

Shelah, S.

[1970] *A note on Hanf numbers*. **Pacific Journal of Mathematics**, vol. 34 (1970), pp. 541—545.

Shoenfield, J. R.

[1967] **Mathematical Logic**. Addision-Wesley, 1967, vii+344pp.

Sierpński, W.

[1958] **Cardinal and Ordinal Numbers. Pańistwowe Wydawnictwo Naukowe (Polish Scientific Publishers)**, 1958, 487pp.

Sikorski, R.

[1960] **Boolean Algebras**. Berlin, 1960.

Silver, J. H.

[1966] *Some applications of model theory in set theory*. Doctoral Dissertation, University of California, Berkeley, 1966, 110pp.

[1971] *Some applications of model theory in set theory*. **Annals of Mathematical Logic**, vol. 3(1971), pp. 45—110.

Smith Jr., E. C.

[1956] *A distributivity condition for Boolean algebras*. **Annals of Mathematics**, vol. 64(1956), pp. 551—561.

Smith Jr., E. C. and Tarski, A.

[1957] *Higher degrees of distributivity and completeness in Boolean algebras*. **Transactions of the American Mathematical Society**, vol. 84 (1957), pp. 230—257.

Smullyan, R. M.

[1963] *A unifying principle in quantification theory.* **Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA**, vol. 49(1963), pp. 828—832.

[1965] *A unifying principle in quantification theory.* In: **The Theory of Models**, edited by J. W. Addison, L. A. Henkin and A. Tarski. North-Holland Publishing Company, 1965, pp. 433 — 434. Abstract.

Solovay, R. M.

[1970] *A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable.* **Annals of Mathematics**, vol. 79(1970), pp. 1—56.

Stavi, J.

[1978] *Compactness properties of infinitary and abstract languages, I: General results.* In: **Logic Colloquium '77**, edited by A. J. Macintyre, L. Pacholski and J. B. Paris. North-Holland Publishing Company, 1978, pp. 263—275.

Stern, J.

[1973] *Les premiers cardinaux compacts.* **Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, Série A**, vol. 277(1973), pp. 401—403.

Tarski, A.

[1923] *Note.* In: **Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences.** Letters Varsovic Ⅱ. 23(1923).

[1958] *Remarks on predicate logic with infinitely long expressions.* **Colloquium Mathematicum**, vol. 6(1958), pp. 171—176.

Tarski, A., Mostowski, A. and Robinson, R. M.

[1953] **Undecidable theories.** North-Holland Publishing Company, 1953, xi+98pp.

Tarski, A. and Vaught, R. L.

[1957] *Arithmetical extensions of relational systems.* **Compositio Mathematica**, vol. 13(1957), pp. 81—102.

Väänänen, J.

[1980] *The Hanf number of $\mathscr{L}_{\omega_1\omega_1}$*. **Proceedings of the American Mathematical Society**, vol. 79(1980), pp. 294—297.

Vopěnka, P. and Hrbáček, K.

[1966] *On strongly measurable cardinals.* **Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des Sciences Mathématiques**, vol. 14 (1966), pp. 587—591.

重要记号索引*

前 言

第 0 章

---

* ① 本索引按所涉记号在本书出现的先后次序排序.
  ② 每一记号右边的数字表示它在本书中作为定义或规定出现之页的页码.

第1章

第 2 章

第 3 章

第 4 章

第 5 章

第 6 章

第 7 章

第 8 章

第 9 章

第 10 章

第 11 章

第 12 章

第 13 章

主题词索引*

B

C

* ① 本索引按汉语拼音通常的次序排序；如主题词中夹有外文等，则忽略不计.
② 每一主题词右边的数字表示它在本书中作为定义或规定出现之页的页码.

E

F

G

P

Q

R

S

T

W

X

Y

Z